

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ШИРОТЫ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПОПРАВКИ**

*Константин Федорович Афонин*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры космической и физической геодезии, тел. (383)343-29-11

*Юлия Сергеевна Трифонова*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, магистрант кафедры космической и физической геодезии, тел. (923)703-53-35

ГНСС-технологии являются в настоящее время основными для координатного обеспечения территорий. Однако они позволяют получить пространственные прямоугольные координаты определяемых точек. В то время как большинству пользователей необходимы плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера. А эти координаты можно вычислить только по геодезическим широтам и долготам. В специальной литературе описано более полтора десятков способов вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам. Для решения этой задачи обычно используют какие-либо итерационные или неитерационные способы. И у тех, и у других есть свои достоинства и недостатки. В работе применен третий путь решения задачи. Предлагается вычислять и использовать дифференциальную поправку в начальное (приближенное) значение геодезической широты. Получены рабочие формулы, реализующие данную идею. Приведен числовой пример, показывающий возможность практического применения предлагаемого способа.

**Ключевые слова:** системы координат, геодезическая широта, геодезические и пространственные прямоугольные координаты.

## **DETERMINATION OF GEODESIC LATITUDE BY SPATIAL RIGHT-MUGAL COORDINATES BY USING A DIFFERENTIAL AMENDMENT**

*Konstantin F. Afonin*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D., Associate Professor, Department of Space and Physical Geodesy, phone: (383)343-29-11

*Yulia S. Trifonova*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Graduate, Department of Space and Physical Geodesy, phone: (923)703-53-35

GNSS technologies are currently essential for coordinate support of territories. However, they make it possible to obtain spatial rectangular coordinates of the points being determined. While most users need the flat rectangular coordinates of Gauss – Kruger. And these coordinates can be calculated only by geodetic latitudes and longitudes. The special literature describes more than a dozen methods for calculating the geodetic latitude in spatial rectangular coordinates. To solve this problem, usually use any iterative or non-iterative methods. Both those and others have their ad-

vantages and disadvantages. In the work applied the third way to solve the problem. It is proposed to calculate and use the differential correction to the initial (approximate) value of the geodesic latitude. Received working formulas that implement this idea. A numerical example is given showing the possibility of practical application of the proposed method.

**Key words:** coordinate systems, geodetic latitude, geodesic and spatial rectangular coordinates.

### *Введение*

Задача определения геодезических пространственных координат  $B, L, H$  по пространственным прямоугольным координатам  $X, Y, Z$  является ключевой при вычислении плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера для геодезистов, использующих ГНСС-технологии. Дело в том, что связь двух систем прямоугольных координат: пространственной и плоской выполняется в два этапа. На первом этапе необходимо по известным пространственным прямоугольным координатам вычислить геодезические широты, долготы и высоты, а на втором – от полученных широт и долгот перейти к координатам Гаусса – Крюгера.

Определение геодезической долготы не вызывает затруднений. По-иному обстоит дело с геодезической широтой, которая зависит и от широты, и от высоты [2, 4]:

$$B = \operatorname{arctg} \left( \frac{Z}{Q \left( 1 - \frac{Ne^2}{N+H} \right)} \right). \quad (1)$$

Радиус кривизны первого вертикала  $N$  и расстояние от центра пространственной прямоугольной системы координат до проекции точки на плоскость экватора  $Q$  могут вычисляться по формулам:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad (2)$$

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (3)$$

В научной литературе описано более полутора десятков способов вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам. Эти способы реализуют либо итерационные [1–11], либо неитерационные пути решения данной задачи [12–19]. Первый итерационный алгоритм был предложен К. А. Лапингом [4]. Известная формула Б. Р. Боуринга [18, 19] является примером использования второго неитерационного пути.

Однако есть еще и третий путь: путь вычисления дифференциальной поправки и последующего введения ее в приближенное значение геодезической широты. Одним из первых этот путь был реализован А. В. Буткевичем в 1967 г. [20]. Цель данной работы показать, что такой подход к решению задачи не исчерпал себя и может конкурировать с первыми двумя.

### **Методы и материалы**

Геодезическую широту  $B$  можно представить в общем виде в функции геодезической высоты  $H$ :

$$B = \varphi(0 + H). \quad (4)$$

Эту функцию можно разложить в ряд Маклорена:

$$B = \varphi(0) + \left(\frac{d\varphi}{dH}\right)H + \dots \quad (5)$$

Начальное значение широты  $B_0$  может быть найдено по формуле (1) при высоте, равной нулю [2, 4]:

$$B_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{Z}{Q(1-e^2)}\right). \quad (6)$$

Производная функции (1) по геодезической высоте может быть преобразована к виду

$$\frac{d\varphi}{dH} = -\frac{ZNe^2 \cos^2 B}{Q(N(1-e^2) + H)^2}. \quad (7)$$

Порядок действий при использовании дифференциальной поправки для вычисления геодезической широты может состоять из пяти этапов.

На первом этапе необходимо вычислить приближенное значение геодезической широты  $B_0$ :

$$B_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{T}{(1-e^2)}\right), \quad (8)$$

где через  $T$  обозначено отношение

$$T = \frac{Z}{Q}. \quad (9)$$

Использование приближенной широты позволяет определить на втором этапе приближенное значение радиуса кривизны первого вертикала  $N_0$  по формуле (2).

На третьем этапе алгоритма необходимо получить приближенное значение геодезической высоты  $H_0$ :

$$H_0 = Q \cos B_0 + Z \sin B_0 - N_0(1 - e^2 \sin^2 B_0). \quad (10)$$

Четвертый этап посвящен определению дифференциальной поправки  $\Delta B$  в приближенное значение широты:

$$\Delta B = -\frac{TN_0 e^2 \cos^2 B_0}{(N_0(1 - e^2) + H_0)^2} H_0 \rho. \quad (11)$$

Геодезическая широта на заключительном пятом этапе вычисляется как сумма двух слагаемых:

$$B = B_0 + \Delta B. \quad (12)$$

### ***Результаты***

Возможность применения предлагаемого алгоритма была проверена на числовом примере. Проверка выполнялась в два этапа. На первом этапе по заданным геодезическим пространственным координатам точки на эллипсоиде Красовского: широте  $B = 56^\circ 21' 11,9868''$ , долготе  $L = 88^\circ 42' 38,5401''$  и высоте  $H = 372,283$  метра были вычислены пространственные прямоугольные координаты. На втором этапе эти координаты использовались для получения геодезической широты предлагаемым способом. Вычисленная широта получилась равной  $B = 56^\circ 21' 11,9866''$ . Различие вычисленного и исходного значений широты в  $0,0002''$  говорит о возможности практического использования способа.

### ***Обсуждение***

Предлагаемый способ вычисления геодезической широты реализует третий путь решения задачи, который заключается в использовании дифференциальных поправок в приближенные значения. Этот путь был популярен в 1960-е гг. В отличие от способа А. В. Буткевича [1] он позволяет получить геодезическую широту с большей точностью. Анализ результатов экспериментальных вычислений позволяет говорить о том, что погрешность определения широты не должна превышать  $0,0002-0,0003''$ .

## *Заключение*

Поиск авторов нового неитерационного способа вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам, на наш взгляд, увенчался успехом. Разработаны новые способ и алгоритм решения задачи. По трудоемкости вычислений и точности полученных результатов их можно поставить в один ряд с классическими способами К. А. Лапинга и Б. Р. Боуринга. Поэтому предлагаемый способ и алгоритм можно, по нашему мнению, рекомендовать для практического использования.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 66 с.
2. Афонин К. Ф. Точность преобразования пространственных прямоугольных координат из общеземных систем в референцные // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2015. XI Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 13–25 апреля 2015 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. Т. 1. – С. 160–163.
3. ГОСТ Р 32453–2017. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. Межгосударственный стандарт. – Введ. 2018-01-07. – М. : Стандартиформ, 2017. – 19 с.
4. Лапинг К. А. Вычисление координат и высот по измеренным азимутам нормальных сечений и углам наклона хорд на двух исходных пунктах // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1962. – № 1. – С. 3–8.
5. Медведев П. А. Исследования способов вычисления геодезической широты и высоты точек земной поверхности по прямоугольным координатам // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 3. – С. 24–28.
6. Медведев П. А., Мазуров Б. Т. Алгоритмы непосредственного вычисления геодезической широты и геодезической высоты по прямоугольным координатам // Вестник СГУГиТ. – 2016. – Вып. 2 (34). – С. 5–13.
7. Медведев П. А., Новородская М. В., Шаров С. А. Неитеративный алгоритм вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам // Вестник Омского гос. агр. ун-та. – 2017. – № 2 (26). – С. 60–64.
8. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004. – 238 с.
9. Медведев П. А., Кенжегузинова М. М. Вычисление геодезической высоты по прямоугольным пространственным координатам точек земной поверхности // Вестник Омского гос. агр. ун-та. – 2016. – № 3(23). – С. 146.
9. Медведев П. А. Математические модели преобразований пространственных координат // Геодезия и картография. – 2016. – № 3. – С. 2–7.
10. Максимова М. В. Преобразования координат при инженерно-геодезических изысканиях // Инженерные изыскания. – 2013. – № 2. – С. 18–21.
11. Алгоритм вычисления геодезической высоты по пространственным прямоугольным координатам / В. Н. Баландин, М. Я. Брянь, С. П. Имшенецкий, А. Ю. Матвеев, А. В. Юскевич // Геодезия и картография – 2006. – № 6. – С. 15–16.
12. Курченко Л. А., Таран В. В., Шлапак В.В. К вопросу о преобразовании геодезических прямоугольных координат в криволинейные // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 3. – С. 29–33.

13. Шануров Г. А., Манилова А. Д. О перевычислении пространственных декартовых координат в геодезические // Геодезия и картография – 2017. – № 1. – С. 13–17.
14. Шануров Г. А., Половнев О. В., Манилова А. Д. Преобразования пространственных координат при геодезическом обеспечении работы сканирующего комплекса // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № 1. – С. 15–18.
15. Огородова Л. В. Совместное вычисление геодезической широты и высоты точек поверхности земли // Геодезия и картография. – 2011. – № 9. – С. 11–15.
16. Гафиатулин Х. Г., Новоселов О. Г. Решения геодезической задачи обратного преобразования плоских прямоугольных и полярных координат, определяемых системой чисел из одной сети в другую посредством проекции условно вспомогательной системы координат [Электронный ресурс] // Интернет-журнал Науковедение, – 2017. – № 3. – С. 1–8. – Режим доступа: <https://naukovedenie.ru/> (дата обращения: 15.04.2019).
17. Bowring B. R. The accuracy of geodetic latitude and height equations // Surv. Rev. – 1985. – № 38. – P. 220–206.
18. Bowring B. R. Transformation from spatial to geodetic coordinates // Surv. Rev. – 1976. – № 23. – P. 323–327.
19. Буткевич А. В. О переходе от пространственных прямоугольных координат к геодезическим // Геодезия и картография. – 1967. – № 5. – С. 6–7.

© К. Ф. Афонин, Ю. С. Трифонова, 2019