УДК 51(075)
DOI 10.33764/2618-8031-2021-1-87-92

ПЕРЕБОР И АНАЛИТИКА В ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧАХ. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Юрий Михайлович Вахромеев
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008, Россия, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, тел. (383)266-27-58, e-mail: tvakhromeeva@gmail.com

Татьяна Васильевна Вахромеева
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008, Россия, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, ст. преподаватель кафедры высшей математики, тел. (383)266-27-58, e-mail: tvakhromeeva@gmail.com

Анализируются олимпиадные задачи, которые можно решать как путем долгих однообразных вычислений, следуя заданному алгоритму, так и аналитически. Обоснована возможность использования таких задач во внутривузовских олимпиадах технических вузов.

Ключевые слова: олимпиады, метод математической индукции, ряд, числа Фибоначчи, задачи

SEACHER AND ANALYSIS IN OLYMPIAD PROBLEMS. EVALUATION CRITERIA

Yury M. Vakhromeev
Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), 113, Leningradskaya St., Novosibirsk, 630008, Russia, Ph. D., Associate Professor, Department of Higher Mathematics, phone: (383)266-27-58, e-mail: tvakhromeeva@gmail.com

Tatyana V. Vakhromeeva
Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), 113, Leningradskaya St., Novosibirsk, 630008, Russia, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, phone: (383)266-27-58, e-mail: tvakhromeeva@gmail.com

Olympiad problems that can be solved both by long monotonous calculations, following a given algorithm, and analytically are analyzed. The possibility of using such tasks in intra-university Olympiads of technical universities is justified.

Keywords: olympiads, mathematical induction method, series, Fibonacci numbers, problems

Организаторам математических олимпиад в технических вузах постоянно приходится решать вопросы содержания и специфичности олимпиадных задач, их количестве, а также критериев оценки трудности и разнообразии подходов к решению задач. Ответы на подобного рода вопросы организаторам олимпиад, чаще всего, приходится искать самостоятельно. Обычно, опыт работы других вузов, в этом направлении, неприменим. Все зависит от того, с какой целью, проводятся олимпиады. Обычно олимпиады по математике проводятся на 1 и 2 курсах. Разумеется, участие в олимпиадах способствует повышению интереса к изучению математики, получению более глубоких и прочных знаний. С другой стороны, олимпиады позволяют отобрать студентов, способных вести научную, исследовательскую работу в рамках вуза, понять особенности мышления наших студентов. Некоторые из них способны напрямую «прорываться» через сложные выкладки и получать результат, другие склонны к большим объемам вычислений, перебору вариантов. В идеале, хотелось бы найти и таких студентов, которые на основе анализа условий поставленной задачи, разобравшись в простых случаях, сумели бы построить модель, использовать аналитические зависимости и решить задачу.

Приведем некоторые задачи, которые допускают различные подходы к решению и позволяют разобраться, кто из студентов к чему склонен.

Рассмотрим для начала несколько несложных задач на числа Фибоначчи [1], которые обладают многими интересными и важными свойствами. Будем считать, что члены ряда Фибоначчи известны для достаточно больших номеров (можно пользоваться справочником).

Задача 1. Найти сумму первых 30 членов ряда Фибоначчи с нечетными номерами $\sum_{n=1}^{30} u_{2n-1} = u_3 + \cdots + u_{59}$. Студент может выбрать их или вычислить, следуя алгоритму

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1,}\ n > 2, u_1 = u_2 = 1 \tag{1}$$

и сложить, если есть калькулятор. Но может заметить, что $u_1 = u_2$, $u_3 = u_4 - u_2, \cdots, u_{57} = u_{58} - u_{56}, u_{59} = u_{60} - u_{58}$, и, сложив их, получить

$$\sum_{n=1}^{30} u_{2n-1} = u_{60} = 591286729879.$$

Разумеется, легко записать результат для любого номера n:

$$u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}. \tag{2}$$

Задача 2. Найти знакопеременную сумму чисел Фибоначчи:

$$S_{60} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{59} - u_{60}.$$

Опять можно выбрать и сложить соответствующие числа на калькуляторе или, учитывая, что $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 4, \cdots,$ заметить:

$$u_2 = u_3 - 1 = 2 - 1 = 1, u_2 + u_4 = 1 + 3 = u_5 - 1 = 5 - 1.$$

Методом математической индукции покажем, что имеет место равенство

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1. \qquad (3)$$

Базу индукции мы установили. Пусть (3) верно для $n > 2$. Покажем, что (3) верно и для n+1.

$$\left(u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}\right) + u_{2n+2} = \left(u_{2n+1} - 1\right) + u_{2n+2} = \left(u_{2n+1} + u_{2n+2}\right) - 1 =$$
$$= u_{2n+3} - 1 = u_{2(n+1)+1} - 1.$$

То есть (3) верно и для n+1. Используя равенства (2) и (3) получим:

$$S_{60} = \sum_{n=1}^{60} (-1)^{n+1} u_n = \sum_{k=1}^{30} u_{2k-1} - \sum_{k=1}^{30} u_{2k} = u_{60} - \left(u_{61} - 1\right) =$$
$$= u_{60} - u_{61} + 1 = u_{60} - \left(u_{59} + u_{60}\right) + 1 = -u_{59} + 1 = -365435296161.$$

Очевидно, используя (2) и (3) можно установить для любого n выражение знакопеременной суммы рядов Фибоначчи:

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + \left(-1\right)^{n+1} u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1.$$

Замечание. На олимпиаде можно задать студентам вопрос: сходится ли ряд Фибоначчи?

Многие достаточно сложные задачи с числами Фибоначчи удобно доказывать методом математической индукции. Однако, часто студенты решают такие задачи, используя неполную математическую индукцию.

Задача 3 (Региональная олимпиада в НГУ, 2019 год). Найти период повторения последней цифры в последовательности Фибоначчи

$$u_1 = u_2 = 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \left(n > 1\right).$$

Если у студента есть под рукой таблица первых 200 чисел Фибоначчи, просматривая ее, он «экспериментально» может установить, что период T=60, и посчитать это ответом. Но такой ответ нельзя считать решением в силу конечности таблицы. Хотя за работу с таблицей ему можно дать какое-то число баллов, примерно 10 % , 20 % от числа баллов за задачу.

Решение. Используем при решении задачи метод математической индукции. Последняя цифра числа – это остаток от деления на 10, который однозначно определяется остатками от деления на 5 и на 2. Остатки от деления на 2 одинаковы у u_1 и u_4, у u_2 и u_5, т.е. повторяются с периодом 3. По индукции находим

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} = u_{n+1} + u_n + u_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n, \text{и } u_{n+3} \equiv u_n \left(\operatorname{mod} 2\right).$$

Следовательно, остаток при делении на 2 повторяется с периодом 3. При делении на 5 замечаем, $u_6 \equiv 3u_1 \pmod 5$, или $u_{1+5} \equiv 3u_1 \pmod 5$, и $u_7 \equiv 3u_2 \pmod 5$ или $u_{2+5} \equiv 3u_2 \pmod 5$.

По индукции, используя (1), получим:

$$u_{n+5} = u_{n+4} + u_{n+3} = u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+2} + u_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} +$$
$$+2(u_{n+1} + u_n) + u_{n+1} = u_{n+1} + u_n + 4u_{n+1} + 3u_n = 5u_{n+1} + 3u_n$$

и, следовательно, $u_{n+3} \equiv 3u_n \pmod 5$. Тогда $u_{n+20} \equiv u_{n+4\cdot 5} \equiv 3^4 u_n \pmod 5 \equiv u_n$.

Таким образом, остатки при делении на 5 повторяются с периодом 20. Легко проверить, что 20 =5·4= 10·2 наименьший период, так как 10 и 4 периодами не являются.

Ответ: Остатки от деления на 10 повторяются с периодом НОК(3, 20) = 60, T=60.

Задачи с биномиальными коэффициентами. Еще один пример задачи, в которой студент может получить путем долгих и однообразных вычислений по заданному алгоритму, но может использовать и аналитику [2].

Задача 4 (Международная интернет олимпиада в 2019 году).

Координатная плоскость разбита на единичные квадраты. В начале координат находится 2^x точек, половина из которых начинает двигаться в положительном направлении оси Ox, а другая половина – в положительном направлении оси Oy. При достижении любой вершины квадрата каждая группа точек разделяется на две части – половина движется в положительном направлении оси Ox, а другая половина – в положительном направлении оси Oy. Известно, что через вершину квадрата M(4;8) прошло 7920 точек. Чему равно значение x?

Из условий задачи следует, что процесс происходит в 1-м квадранте плоскости Oxy. Процесс симметричен относительно биссектрисы 1-го координатного угла.

На 1-м шаге деления точками заполняются вершины (1,0) и (0,1). На втором шаге точки заполняют вершины (0,2), (2,0), (1,1) и т.д. На каждом шаге точки заполняют вершины, расположенные на параллельных прямых, ортогональных биссектрисе первого координатного угла, образуя фронт. Чем дальше вершина от начала координат, тем меньше через нее проходит точек. Если в начале процесса было 2^x точек и $x \in N$, процесс закончится, если в каждой из заполненных вершин будет по нечетному числу точек. Если x – субстанция типа воды, пыли и т.п., или просто некоторое число, то процесс будет протекать сколь угодно долго, и все точки первого квадранта могут быть заполнены на некотором шаге. Самый простой, но и самый долгий способ решить задачу – решение «в лоб». Используя условия задачи, найти последовательно, какое количество точек проходит через каждую из вершин 45 квадратов в прямоугольнике с вершинами A(4,0), O(0,0), B(0,4), C(4,8). На последнем шаге находим количество точек, которое проходит через вершину C(4,8). Эти величины будут зависеть от x, и мы приходим к уравнению $4952^{x-12} = 7920 \to x = 16$.

Решим задачу, получив для вычисления x в любой точке некую формулу.

Заполним вначале квадрат $A_2(2,0)$, $O(0,0)$, $B_2(0,2)$, $C(2,2)$.

В вершинах, через которые проходит фронт, степень двойки одна и та же.

Рассмотрим матрицу коэффициентов при степенях двойки. Как и ожидалось, матрица симметрична относительно вспомогательной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из условия задачи следует, что коэффициенты в заполненных точках на фронте равны сумме коэффициентов, стоящих слева и снизу заполняемого элемента. Процесс напоминает свойства чисел Фибоначчи. Решим задачу, заметив, что в вершинах, которые образуют фронт, коэффициенты являются биномиальными коэффициентами $C_n^k, n = 1,2,3...; k = 0,1,2,...,n$; n определяет степень удаленности фронта от начала координат.

Доказать это утверждение методом математической индукции [2].

Теперь решим исходную задачу.

Через вершину C(4,8) проходит $2^x \cdot C_n^k$ точек, где n=4+8=12, k=4. По условию,

$$2^{x-12} \cdot C_{12}^4 = 7290,\ C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495;$$

$$495 \cdot 2^{x-12} = 7920,\ 2^{x-12} = 2^4,\ x = 16.$$

Очевидно, при таком подходе, степень удаленности вершины C от начала координат не имеет решающего значения. Например, если в начале процесса в точке $O(0,0)$ находилось 2^{22} точек, то достаточно просто найти, сколько точек пройдет через вершину C(10,11). Через эту вершину пройдет $2^x \cdot C_n^k$ точек, где n=10+11=21, k=10, т.е. $2^{22-21} \cdot C_{21}^{10} = 2 \cdot \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 ... 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... 10} = 705432$ точки.

Обычно задачи, которые можно решить или путем долгих однообразных вычислений или использовать аналитический подход, составляются таким образом, что студент физически в состоянии пройти первый путь, имея калькулятор. Если же в задачах 1, 2, 4 количество слагаемых увеличить до сотен, вряд ли кто начнет решать эти задачи в лоб. Такой подход позволяет выяснить склонности (предпочтения участников). При оценке решения подобных задач нужно учитывать, как студент решал другие задачи. Необычность, оригинальность, неожиданность решения поощряется, но и прямолинейный подход к решению задач во внутривузовских олимпиадах технических вузов занимает свое место.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – 5 изд. – М. : Наука, 1984. –144 с.

2. Вахромеев Ю.М., Вахромеева Т.В. Об “эффективных” алгоритмах в задачах о процессах // Актуальные вопросы образования. Современный университет как пространство цифрового мышления: материалы Международной научно-методической конф., 29 января – 2 февраля 2020 г., Новосибирск : СГУГиТ. – 2020. –Т. 1. – С. 180-184.