УДК 519.6

Применение численных методов в математическом моделировании

В. П. Вербная [1], В. Л. Неклюдова[1]*
[1] Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск, Российская Федерация
* e-mail: vv_1506@mail.ru.

Аннотация. Предметом данной статьи является практико-ориентированный подход к изучению численных методов при освоении курса дисциплины «Математические модели физических процессов» обучающимися Сибирского государственного университета геосистем и технологий по специальности 17.05.01 Боеприпасы и взрыватели (уровень специалитета). В работе обосновывается необходимость изучения численных методов для успешного освоения дисциплины в соответствии с рабочей программой курса; перечисляются основные подходы к численному анализу математических моделей, востребованные в рамках курса; приводятся примеры математических моделей физических явлений, как имеющих аналитическое решение, так и требующих численной реализации, в том числе с использованием вычислительной техники.

Ключевые слова: численные методы, математические модели физических процессов

Statistical Approach to Assessing Students' Progress

V. P. Verbnaya[1], V.L. Neklyudova[1]*
[1] Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation
* e-mail: vv_1506@mail.ru

Abstract. The subject of this article is a practice-oriented approach to the study of numerical methods when mastering the course of the discipline "Mathematical models of physical processes" by students in the specialty 17.05.01 Ammunition and fuses (specialty level) of the Siberian State University of Geosystems and Technologies. The paper substantiates the need to study numerical methods for successful development of the discipline in accordance with the work program of the course; lists the main approaches to the numerical analysis of mathematical models that are in demand within the course. Examples of mathematical models of physical phenomena are given, both having an analytical solution and requiring numerical implementation, including using computer technology.

Keywords: numerical methods, mathematical models of physical processes

Введение

Математическое моделирование лежит в основе современной науки. Посредством математических моделей исследуются физические, биологические, социальные и экономические процессы.

Для описания социальных и экономических процессов, как правило, используют статистические и эконометрические (регрессионные) модели [5,9–15]. В основе моделей физических и биологических процессов лежат дифференциальные уравнения, обыкновенные или в частных производных. В настоящей статье рассматриваются модели физических процессов, основанные на дифференциальных уравнениях [1], а также различные методы их реализации [6].

Основной целью курса «Математическое моделирование физических процессов» является знакомство студентов с математическими моделями, описывающие физические явления. Некоторые из таких моделей достаточно просты, и их решения могут быть найдены аналитически. Примером такой модели является уравнение радиоактивного распада [1,2].

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\lambda M, \\ M(0) = M_0, \end{cases} \quad (1)$$

где M – масса радиоактивного вещества, λ – постоянная радиоактивного распада, зависящая от природы вещества. Решением данного уравнения является функция $M(t) = M_0 e^{-\lambda t}$, описывающая экспоненциальное снижение массы вещества.

Некоторые из уравнений, которые рассматриваются в ходе изучения курса дисциплины, также могут быть решены аналитически (например, частные случаи уравнения теплового излучения и модели истечения жидкости из сосудов). Однако при исследовании существенного числа моделей возникает необходимость использования численных методов, как при нахождении решения уравнений, так и в ходе интерпретации полученного результата. Таким образом, изучение численных методов становится неотъемлемой частью курса дисциплины «Математическое моделирование физических процессов» [1–4,6].

Методы и материалы

Основными численными методами, востребованными при анализе математических моделей физических процессов, являются [4,6,7]:

1) численное интегрирование;
2) полиномиальная интерполяция;
3) итерационные методы;
4) численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений;
5) численное решение дифференциальных уравнений в частных производных.

Важной составляющей курса дисциплины «Математическое моделирование физических процессов» является работа по прикладной реализации математических моделей на ЭВМ [8].

Результаты

Методы численного интегрирования позволяют приближенно вычислить значение определенного интеграла заданной функции на отрезке. В рамках дисциплины изучаются метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона (метод парабол). Последний в большинстве случаев дает наилучшее приближения к реальному результату и может быть реализован на ЭВМ без привлечения специальных средств. На практических занятиях обучающиеся используют для вычислений приложение Microsoft Excel.

Примером модели, при анализе которой возникает необходимость в численном интегрировании, является модель теплового изучения [1]:

$$Q = -kF(x)\frac{dT}{dx} = const\,. \qquad (2)$$

Решение уравнения дается формулой $T = -\frac{Q}{k}\int\limits_{x0}^{x1}\frac{dx}{F(x)}$, где интеграл в общем случае может оказаться сложно вычисляемым или неберущимся и должен быть найден численно.

Полиномиальная интерполяция изучается в рамках математического моделирования как вспомогательный инструмент и позволяет приближенно представить функцию в виде многочлена, значения которого в некоторых точках совпадают со значением исходной функции. В курсе дисциплины рассматривается способ построения интерполяционного полинома Лагранжа.

Итерационные методы в дисциплине «Математическое моделирование физических процессов» используются для приближенного вычисления корней уравнения $f(x) = 0$ (нахождения нулей функции) на некотором отрезке. Наиболее эффективным из таких методов является метод Ньютона [4].

Примером математической модели, в которой могут быть полезны итерационные методы, является задача об определении времени преступления [1], где уравнение

$$\frac{dx}{dt} + kx = ka(t) \qquad (3)$$

описывает изменение температуры тела после совершенного убийства. Здесь $x(t)$ – температура тела, $a(t)$ – температура окружающего воздуха, k – коэффициент охлаждения, который вычисляется индивидуально для каждого случая в ходе наблюдений. В случае, если температура воздуха изменяется линейно, $a(t) = a_0 + \alpha t$, решение уравнения может быть найдено в виде неявной функции, и время убийства можно найти из уравнения $F(k,t) = 0$.

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений играет важнейшую роль в математическом моделировании. Существует большое число методов численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В курсе дисциплины «Математическое моделирование физических процессов» рассматривается, возможно, не самый эффективный, но наиболее простой из них – метод Эйлера, аппроксимирующий интегральную кривую ломаной линией с некоторым шагом *h*. Существенным недостатком метода является увеличение погрешности с ростом числа шагов. На занятиях также упоминаются другие методы решения задачи Коши, ознакомиться с которыми обучающиеся могут, изучая дополнительную литературу по курсу дисциплины [7].

Примером модели, при анализе которой может потребоваться численное решение задачи Коши, может выступить модель определения времени преступления в случае, когда температура воздуха $a(t)$ в уравнении (3) меняется нелинейно.

Дифференциальные уравнения в частных производных являются важнейшим инструментом математической физики. Эти модели и способы их численного решения с помощью разностных схем изучаются студентами специальности 17.05.01 Боеприпасы и взрыватели в курсе дисциплины «Механика сплошных сред».

Обсуждение

В настоящее время существует большое количество как мощных прикладных пакетов для математических расчетов, так и онлайн-калькуляторов, позволяющих решать отдельные задачи. Для того, чтобы эффективно использовать программы, реализующие те или иные численные методы, полезно знать механизм работы этих методов, их достоинства и недостатки.

Список прикладных задач математического моделирования очень велик, и умение правильно подобрать алгоритм численного решения задачи в каждом конкретном случае не только является важным критерием успешного освоения дисциплины «Математическое моделирование физических процессов», но и полезным навыком, востребованным в ходе дальнейшего обучения и профессиональной деятельности.

Заключение

Курс «Математическое моделирование физических процессов» находится на стыке физики, математики и информационных технологий. Для его преподавания и освоения необходимо понимать важность междисциплинарных связей и прикладной характер предмета исследования. Материал курса имеет ключевое значение в решении большого класса научных и практических задач, которые встанут перед обучающимися в ходе изучения других дисциплин и профессиональной деятельности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения. – Мн.: Выш. школа, 1982. – 271 с.

2. Аюпов, В.В. Математическое моделирование технических систем: учебное пособие / В.В. Аюпов; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2017. – 242 с.

3. В. П. Вербная. Практико-ориентированные задачи в математическом образовании обучающихся // Актуальные вопросы образования. Модель проблемно-ориентированного проект-

ного обучения в современном университете [Текст]: сб. материалов Международной научно-методической конференции, 24–26 февраля 2021 года, Новосибирск. В 3 ч. Ч. 1. – Новосибирск: СГУГиТ, 2021. – С. 93–96.

4. Вербная В. П., Зайцева Т. С. Обучение математическому моделированию физических процессов // Актуальные вопросы образования. Современные тренды непрерывного образования в России: сб. материалов Междунар. научно-метод. конф., 25–28 февраля 2019 г., Новосибирск. В 3 ч. Ч. 3. – Новосибирск: СГУГиТ, 2019. – С. 51–55.

5. Григоренко О.В., Шмигирилова И.Б., Моделирование процесса контроля и оценки учебных достижений студентов по математическим дисциплинам // Актуальные вопросы образования. Инновационные подходы в образовании: сб. материалов Междунар. научно-метод. конф., 23–27 янв. 2017 г., Новосибирск. В 2 ч. Ч. 2. – Новосибирск: СГУГиТ, 2017. – С. 61–65.

6. Звонарев, С.В. Основы математического моделирования: учебное пособие / С.В. Звонарев. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 112 с.

7. Колдаев, В.Д. Численные методы и программирование [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Д. Колдаев; под ред. Л.Г. Гагариной. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2018. – 336 с. – ЭБС «Znanium.com».

8. Логачева О. М., Логачев А. В. IT и гаджеты как средство повышения вовлеченности студентов в образовательный процесс по математическим дисциплинам // Актуальные вопросы образования. Инновационные подходы в образовании: Междунар. научно-метод. конф.: сб. материалов в 2 ч., Новосибирск, 23–27 янв. 2017 г. – Новосибирск: СГУГиТ, 2017. – Ч. 2. – С. 69–72.

9. Мартынов. Г.П. Статистический анализ зависимостей успеваемости обучающихся от сопутствующих факторов // Актуальные вопросы образования. Современные тренды непрерывного образования в России: сб. материалов Междунар. научно-метод. конф., 25–28 февраля 2019 г., Новосибирск. В 3 ч. Ч. 3. – Новосибирск: СГУГиТ, 2019. – С. 62–66.

10. Неклюдова В.Л., Вербная В.П. Статистический подход к оценке успеваемости обучающихся // Актуальные вопросы образования. Современный университет как пространство цифрового мышления: сборник материалов Международной научно-методической конференции (тематический), 28–30 января 2020 года, Новосибирск. В 3 ч. Ч. 1. – Новосибирск: СГУГиТ. – 2020. – С. 200–205.

11. Павловская О.Г. Особенности и возможности организации дистанционного обучения по дисциплине «Математика» // Актуальные вопросы образования. Модель проблемно-ориентированного проектного обучения в современном университете: сб. материалов Международной научно-методической конференции, 24–26 февраля 2021 года, Новосибирск. В 3 ч. Ч. 2. – Новосибирск :СГУГиТ, 2021. – С. 181–184.

12. Подольная Н. Н., Лещайкина М. В., Еремеева М. А., Архипова К. Н. Применение статистических методов в исследовании успеваемости студентов вузов как составляющей качества образования // Системное управление. – 2009, выпуск 1(4).

13. Проектирование модели дистанционного обучения в современном образовательном пространстве / Е. В. Кухаренко [и др.]. – Текст: непосредственный // Актуальные вопросы образования. Современный университет как пространство цифрового мышления: Междунар. научно-метод. конф.: сб. материалов в 3 ч., Новосибирск, 28–30 янв. 2020 г. – Новосибирск: СГУГиТ, 2020. – Ч. 3. – С. 43–46.

14. Сосницкий В.Н., Потанин Н.И., Шевелева Л.В. Проблемы статистического анализа средней успеваемости студентов // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10 (часть 2). – С. 316–320.

15. Суханова А.Г. Статистический анализ успеваемости студентов и балльно-рейтинговая система // Материалы научно-методической конференции СЗИУ РАНХИГС. – 2013. – № 1. – С. 235–241.