

В. П. Вербная¹, О. Г. Павловская¹✉

Математические методы и модели в геодезии

¹ Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: pavlovskaya@ssga.ru

Аннотация. Практико-ориентированный подход к изучению курса «Высшая математика» отражает его прикладную функцию и позволяет усилить мотивацию студента к усвоению и использованию математических знаний. В статье приведены задачи, которые, с одной стороны, соответствуют изучаемым разделам курса «Высшая математика», с другой стороны, используются при изучении специальных дисциплин для подготовки обучающихся по направлению 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата). Решение подобных задач в курсе «Высшая математика» позволяет студенту получить математические знания и умения, которые при дальнейшем обучении помогают лучше понимать более сложный материал дисциплин, связанных с профессиональной подготовкой. Полученные навыки обучающемуся увидеть в каких дисциплинах понадобятся те или иные знания из курса «Высшей математики», и осознать необходимость его изучения.

Ключевые слова: математика, практико-ориентированный подход, геодезия, действия с матрицами, дифференциальные уравнения

V. P. Verbnaya¹, O. G. Pavlovskaya¹✉

Mathematical Methods and Models in Geodesy

¹Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: pavlovskaya@ssga.ru

Abstract. The practice-oriented approach to the study of the course "Higher Mathematics" reflects its applied function and allows to strengthen the motivation of the student to assimilate and use mathematical knowledge. The article presents tasks that, on the one hand, correspond to the studied sections of the course "Higher Mathematics", on the other hand, are used in the study of special disciplines for the training of students in the direction of 21.03.03 Geodesy and remote sensing (bachelor's degree level). Solving such problems in the Higher Mathematics course allows the student to gain mathematical knowledge and skills that, during further study, help to better understand the more complex material of disciplines related to professional training. The acquired skills allow the student to see in which disciplines certain knowledge from the course of "Higher Mathematics" will be needed, and realize the need to study it.

Keywords: mathematics, practice-oriented approach, geodesy, operations with matrices, differential equations

Введение

Профессиональная направленность обучения нацелена на усиление мотивации студентов, ведущей к сознательному изучению и усвоению математических знаний и их использованию при изучении специальных и общетехнических дисциплин, предусмотренных учебными планами направления подготовки 21.03.03

Геодезия и дистанционное зондирование (уровень бакалавриата), таких как высшая геодезия, космическая геодезия, основы теории движения искусственных спутников Земли, сфероидическая и теоретическая геодезия, теория фигуры Земли.

Для освоения компетенций курсов «Космическая геодезия» и «Высшая геодезия» важную роль играют прикладные математические задачи, применяемые, в частности, в геодезии. Для решения таких задач требуются углубленные знания некоторых разделов курса «Высшая математика», которые обучающийся сможет получить на лекциях и закрепить на практических занятиях, а также при самостоятельной работе с общеобразовательным курсом «Высшая математика».

Такой практико-ориентированный подход к изучению курса «Высшая математика» отражает ее прикладную функцию и дает возможность будущему специалисту приобрести навыки, необходимые в дальнейшей профессиональной деятельности [1–3].

Методы и материалы

Анализируя учебные пособия по дисциплинам «Космическая геодезия» и «Высшая геодезия», а также некоторые монографии ведущих специалистов вуза, выявлены следующие наиболее востребованные разделы «Высшей математики»:

- Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии;
- Дифференциальное исчисление функции одной переменной и нескольких переменных;
- Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных;
- Обыкновенные дифференциальные уравнения;
- Основы математической статистики.

Таким образом, в курсы «Космическая геодезия» и «Высшая геодезия» входят практически все традиционные разделы математики, изучаемой в университете.

В силу своей специфики, некоторые обозначения и формулы, используемые в математике, в геодезических дисциплинах применяются в упрощенном виде. Например, при использовании формул Тейлора для обеспечения требуемой точности вычислений в геодезии достаточно взять первые 1–3 члена разложения.

Так одна из матриц поворота R_X имеет вид:

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ – в математике, } R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \text{ – в геодезии.}$$

В данном случае, исходя из практической целесообразности, в формуле Тейлора для функций $\sin x$ и $\cos x$ ограничиваются первыми членами разложения, так как при этом углы поворота вокруг координатных осей не будут превышать 2,6'' [3, 4].

Однако, вследствие сокращения аудиторной нагрузки, некоторые разделы курса «Высшая математика» предлагаются для самостоятельного изучения, при

этом на практике наиболее углубленно изучаются математические понятия и методы, используемые при решении профессиональных задач.

Приведем задачи, которые предлагаем для решения студентам на практических занятиях или при самостоятельной подготовке по курсу «Высшая математика».

Задача 1. Преобразование системы координат OXYZ в систему O'UVW в векторной (матричной) форме имеет вид (формула Гельмерта) [3, 4]:

$$U = RX(1 + \Delta m) + X_0 \quad (1),$$

где $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрицы пространственных координат точки в систе-

мах O'UVW и OXYZ; $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ – координаты начала системы O'UVW, опреде-

ленные в системе OXYZ; Δm – масштабный множитель; R – матрица вращения системы координат, которая определяется как произведение матриц поворота вокруг координатных осей OX, OY, OZ [3]:

$$R = R_X R_Y R_Z. \quad (2)$$

Матрицы R_X , R_Y , R_Z имеют вид:

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, R_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_Z = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где α , β , γ – углы поворота исходной системы координат (OXYZ) вокруг осей OX, OY, OZ, соответственно.

Найдите: а) матрицу R ; б) запишите матрицу R при условии, что произведениями α , β , γ можно пренебречь; в) используя, результаты пунктов (а), (б) и

формулу (1), вычислите координаты U точки, если $X = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,2 \\ 1,3 \end{pmatrix}$,

$$\Delta m = 0,2, \quad \alpha = 0, \quad \beta = -0,3, \quad \gamma = 0,7.$$

При решении данной задачи используются методы раздела «Линейная алгебра», например, отрабатываются навыки выполнения действий с матрицами. Данные темы студенты изучают в первом семестре обучения, а полученные результаты используют в темах «Преобразование пространственных прямоугольных координат» и «Связь двух систем пространственных прямоугольных координат» в четвертом и далее семестрах [3, 4].

Для геодинимических исследований и интерпретации данных геодезических наблюдений используют дифференциальную модель изучаемого явления. На лекции дается понятие математической модели, в частности, дифференциальной модели, и рассматриваются методы ее реализации. Одна из самых простых моделей реальной системы описана дифференциальными уравнениями: $\frac{dx}{dt} = ax, \frac{dy}{dt} = by$. [5] Студентам предлагается на практике рассмотреть данную модель с различными параметрами и построить фазовые траектории.

Задача 2. Рассмотрим динамическую систему вида:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

- 1) Найдите общее решение данной системы дифференциальных уравнений;
- 2) получите явное решение в виде $y = f(x, C)$; 3) постройте семейство фазовых траекторий при условии, что C принимает значения $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Одним из решений данной задачи является чертеж фазовых траекторий (рис. 1).

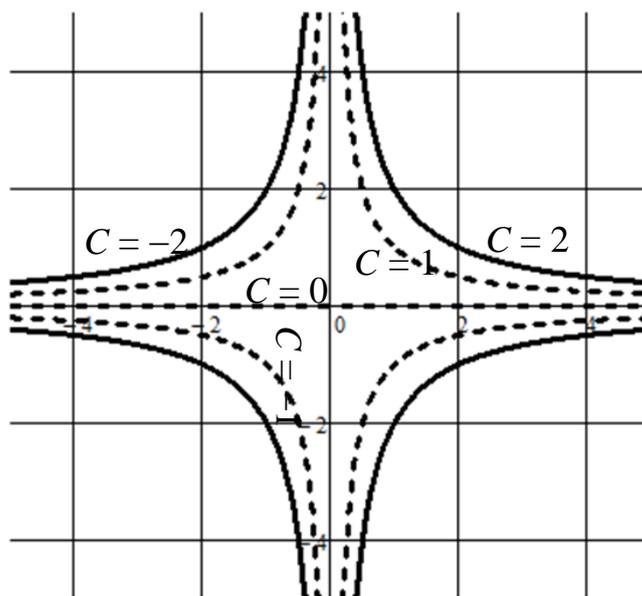


Рис. 1. Фазовые траектории динамической модели

Данная задача позволяет не только изучить и решить простую систему дифференциальных уравнений, но и наглядно увидеть ее решение в виде семейства кривых. При построении траекторий студент может использовать как традиционные методы (карандаш и линейка), так и пакеты прикладных программ (Mathcad, Matlab и др.). В дальнейшем результаты решения помогают лучше понимать более сложный материал при изучении процессов, связанных с геодинимикой.

Заключение

Таким образом, данные задачи дисциплины «Высшая математика», изучаемые на первом и втором курсах обучения, познакомят студентов не только с методами решения типовых математических задач, но и с задачами, которые будут рассматриваться при изучении специальных дисциплин на старших курсах, что позволит разобраться с новым теоретическим и практическим материалом. Также решение прикладных задач поможет обучающимся понять, в каких дисциплинах им понадобятся те или иные знания из курса «Высшая математика», и осознать необходимость его изучения [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вербная В. П., Зайцева Т. С. Обучение математическому моделированию физических процессов // Актуальные вопросы образования. – 2019. – Т. 3. – С. 51–56. – EDN LSWWVM.
2. Вербная В. П. Практико-ориентированные задачи в математическом образовании обучающихся // Актуальные вопросы образования. – 2021. – № 1. – С. 93–96. – DOI 10.33764/2618-8031-2021-1-93-96. – EDN PMSSTD.
3. Неклюдова В.Л., Логачева О.М. Применение задач с экономическим содержанием в компетентностном обучении математическому анализу. // Актуальные вопросы образования. – 2019. – Т.3. – С. 46–50.
4. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2020. – 112 с.
5. Дементьев Ю. В., Ганагина И. Г. Космическая геодезия : учеб. пособие. – Новосибирск: СГУГиТ, 2015. – 85 с.
6. Мазуров Б.Т. Математическое моделирование при исследовании геодинамики: монография. – Новосибирск : Агентство «Сибпринт», 2019. – 360 с.

© В. П. Вербная, О. Г. Павловская, 2024