УДК 534.26:005
DOI 10.33764/2618-8031-2024-1-124-130

В. С. Корнеев [1]✉

Применение специальных функций в задачах математической физики

[1] Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: v.s.korneev@sgugit.ru

Аннотация. Математическая физика – это математический аппарат для изучения многих разделов современной физической науки, при этом рассматриваемые здесь физические поля не связаны с квантовыми или релятивистскими представлениями о строении материи. Большинство задач математической физики сводится к краевым задачам для дифференциальных уравнений с частными производными. Особое внимание уделяется решению корректно поставленных задач математической физики, то есть задачам, для которых нетривиальное решение существует, является единственным и непрерывно зависит от параметров данной задачи. При использовании в задачах математической физики метода Фурье для разделения нескольких переменных в цилиндрических или сферических координатах, приходят к так называемым, специальным функциям: цилиндрическим, сферическим и другим, которые не всегда выражаются через известные элементарные функции, с помощью этих функций решение задачи выглядит в явном виде наиболее компактно.

Ключевые слова: математическая физика, краевые задачи, дифференциальные уравнения, специальные функции, функции Бесселя, полиномы Лежандра

V. S. Korneev [1]✉

Application of Special Functions in Mathematical Physics Problems

[1] Siberian State University of Geosystems and Technologies,
Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: v.s.korneev@sgugit.ru

Abstract. Mathematical physics is a mathematical apparatus for studying many branches of modern physics. The physical fields, considered in the problems of mathematical physics are not related to relativistic and quantum concepts of the structure of matter. Most problems of mathematical physics are reduced to boundary value problems for partial differential equations. Special attention is paid to solving correctly posed problems of mathematical physics, that is, problems for which a non-trivial solution exists, is the only one and continuously depends on the parameters of this problem. When using the Fourier method in mathematical physics problems to separate several variables in cylindrical or spherical coordinates, so-called special functions are obtained: cylindrical, spherical and others, which are not always expressed in terms of known elementary functions, with the help of these functions, the solution of the problem looks explicitly the most compact.

Keywords: mathematical physics, boundary value problems, differential equations, special functions, Bessel functions, Legendre polynomials

Введение

Специальными функциями называются все неэлементарные функции, характерная особенность которых заключается в том, что они являются решениями уравнений с особыми точками вида [1, 2]:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx} \right] - q(x)\,y = 0, \tag{1}$$

где $p(x)$ обращается в 0 в одной или нескольких точках интервала изменения переменной x.

Примерами специальных функций, которые используются в задачах математической физики, являются рассмотренные ниже функции Бесселя и полиномы Лежандра.

Цилиндрические функции Бесселя первого рода любого целого порядка v:

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+v}}{2^{2n+v} + n!(n+v)!}, \quad n \in N. \tag{2}$$

Сферические функции, полиномы Лежандра любого целого порядка n:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1 \right)^n \right]. \tag{3}$$

Методы и материалы

<u>Цилиндрические функции Бесселя первого рода</u>

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами (уравнение Бесселя), его можно получить, решая смешенную задачу для уравнений гиперболического вида с граничными условиями в полярных координатах, например, задачу о колебаниях круглой мембраны с закрепленными краями [1, 2]:

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2} \right)u = 0. \tag{4}$$

Параметр v, входящий в уравнение, может принимать любые положительные значения. Рассмотрим наиболее простые случаи уравнения, когда $v = 0$ и $v = 1$.

Уравнение Бесселя нулевого порядка ($v = 0$) имеет вид

$$u'' + \frac{1}{x}u' + u = 0. \tag{5}$$

При значениях $x = 0$ коэффициент при первой производной терпит разрыв, и точка $x = 0$ для уравнения (5) является особой точкой. Решение для уравнения Бесселя ($v = 0$) найдем в форме степенного ряда [2]:

$$u(x) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}, \quad (0!) = 1. \tag{6}$$

Можно доказать, что данный ряд сходится при всех значениях x, если принять значение постоянной $C_0 = 1$, то полученное решение называется функцией Бесселя первого рода порядка ($\nu = 0$), обозначается $J_0(x)$ [2]

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}, \tag{7}$$

и является решением уравнения (5) при заданных начальных условиях:

$$u\Big|_{x=0} = 1,\ \ u''\Big|_{x=0} = 0.$$

График функции $J_0(x)$ представлен на рис. 1. $J_0(x)$ – четная функция, представлена правая часть графика ($x > 0$).

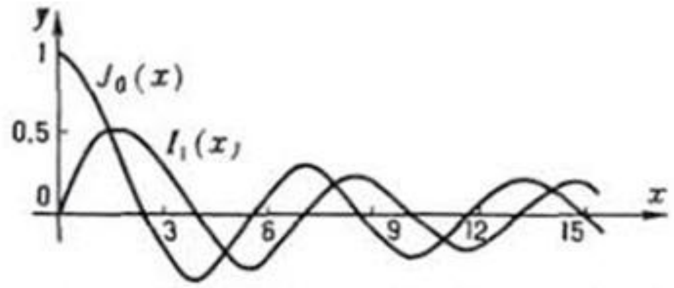

Рис.1. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$ [3]

Функция Бесселя первого рода, порядка $\nu = 0$ имеет бесчисленное множество корней μ_k, приведем значения первых пяти [3]:

$$\mu_1 = 2,405;\ \ \mu_2 = 5,521;\ \ \mu_3 = 8,654;\ \ \mu_4 = 11,792;\ \ \mu_5 = 14,931...$$

На отрезке $[a, b]$ для последовательности функций $J_0(\mu_i x)$, аргументом которых являются корни μ_k, условия ортогональности выглядят следующим образом:

$$\int_a^b x \cdot J_0(\mu_n x) J_0(\mu_m x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2} J_0^2(\mu_n), & m = n. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь уравнение Бесселя первого порядка ($\nu = 1$)

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) u = 0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) можно выразить в следующем виде [2]:

$$u(x) = J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n!(n+1)!}, \tag{9}$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя первого рода, порядка $\nu = 1$, график функции представлен на рис. 1.

Функция $J_1(x)$ – нечетная, она имеет бесчисленное множество корней ν_k, приведем значение первых пяти [3]:

$$\nu_1 = 0;\ \ \nu_2 = 3{,}83;\ \ \nu_3 = 7{,}02;\ \ \nu_4 = 10{,}17;\ \ \nu_5 = 13{,}32...$$

Для функций Бесселя нулевого и первого порядка, почленным дифференцированием можно получить формулу [2, 4]:

$$J_0'(x) = -J_1(x).$$

Согласно формуле (7), функция $J_0(x)$ имеет экстремумы в точках, в которых $J_1(x)$ обращается в ноль, то есть в точках ν_k.

Для уравнений Бесселя (4) произвольного целого порядка v решение получают в следующем виде [2, 4]:

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+v}}{2^{2n+v} + n!(n+v)!}, \quad n \in N. \tag{10}$$

Для расчета корней $\mu_k^{(v)}$ функции Бесселя v-го порядка $J_v(x)$ можно использовать приближенную формулу [3]:

$$\mu_k^{(v)} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k + v\pi. \tag{11}$$

Решение задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краям, содержит функцию Бесселя $J_0(\mu_i x)$ [4–6]

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(\mu_k a t) + b_k \sin(\mu_k a t)\right] J_0(\mu_k r), \tag{12}$$

где коэффициенты a_k, b_k $(k = 1; 2; 3...)$ вычисляются по формулам [5, 6]:

$$a_k = \frac{\int_0^1 x J_0(\mu_k x) \cdot u_0(x)\, dx}{\int_0^1 x\left[J_0(\mu_k x)\right]^2 dx}, \quad b_k = \frac{1}{a\mu_k} \frac{\int_0^1 x J_0(\mu_k x) \cdot u_1(x)\, dx}{\int_0^1 x\left[J_0(\mu_k x)\right]^2 dx}.$$

Вычисление коэффициентов a_k, b_k проводится с помощью Интернет-ресурса «Интегралы онлайн», примеры вычислений представлены в работе [7].

Сферические функции, полиномы Лежандра

Рассмотрим уравнение Лапласа в сферической системе координат:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \tag{13}$$

для осесимметричного случая, когда $u = u(r,\theta)$ и не зависит от φ, уравнение можно привести к виду:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{14}$$

Найдем решение уравнения (14) в виде произведения двух функций

$$u(r,\theta)=U(r)F(\theta),$$

подставляя $u(r,\theta)$ в (14) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=-\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)\frac{1}{F}.$$

Уравнение имеет решение когда, обе части уравнения одновременно равны $\lambda>0$ [2, 4].

$$\begin{aligned} &1)\ \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\lambda;\\ &2)\ \frac{1}{F}\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)=-\lambda. \end{aligned}\tag{15}$$

Решение первого уравнения с новым параметром v, $\lambda=v(v+1)$ найдем в виде $U=r^{\alpha}$, для вычисления показателя степени α, получим [2]:

$$\alpha(\alpha+1)=v(v+1),$$

в силу ограниченности функции $U(r)$, остается решение, когда

$$U(r)=r^{v},v\geq 0.$$

Рассмотрим второе уравнение с новым параметром v

$$\frac{1}{F}\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)=-v(v+1).$$

Так как сферическая координата $0\leq\theta\leq\pi$, то при введении переменной $x=\cos\theta$ новая переменная изменяется в пределах $-1\leq x\leq 1$.

Второе уравнение после введения нового параметра и новой переменной преобразуем к следующему виду [2]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2\theta\frac{\partial F}{\partial x}\right)=-v(v+1)F;\Rightarrow\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial F}{\partial x}\right]+v(v+1)F=0. \end{aligned}\tag{16}$$

Произведем еще одну замену, функцию $F(x)$ обозначим через y, тогда функция $F(\theta)=F(\arccos x)=y(x)$.

Полученное уравнение называют *уравнением Лежандра* [2, 4]

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+v(v+1)y=0,\tag{17}$$

точки $x=\pm 1$ являются особыми точками уравнения, и не все решения этого уравнения будут ограничены на отрезке $-1\leq x\leq 1$.

Уравнения Лежандра (17) имеют ограниченные решения только в случаях, когда v – целое число (v = 0,1,2…n), тогда решения представимы в виде функций, называемых <u>*полиномы Лежандра*</u> [2]:

$$u = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]. \tag{18}$$

Таким образом, решением уравнения Лапласа в сферических координатах будут функции

$$u_n(r,\theta) = U_n(r)F_n(\theta) = C_n r^n P_n(\cos\theta), \; C_n = 1.$$

Первые пять полиномов Лежандра (рис. 2) можно записать в виде [2]:

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{6}\left(5x^3-3x\right); \quad P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right).$$

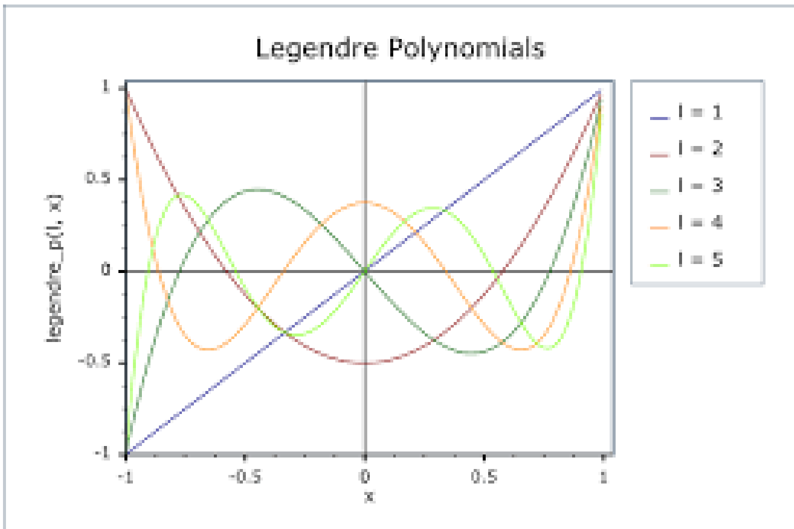

Рис. 2. Графики первых пяти полиномов Лежандра в интервале $-1 \le x \le 1$

На отрезке $-1 \le x \le 1$ полиномы Лежандра ограничены по абсолютной величине $\left|P_n(x)\right| \le 1, \;\; |x| \le 1.$

Многочлен P_n для $n > 0$ имеет n действительных корней, лежащих в интервале $-1 \le x \le 1$.

Полиномы Лежандра ортогональны на интервале $-1 \le x \le 1$

$$\int_a^b P_m(x) P_n(x) dx = 0; \;\; m \ne n. \tag{19}$$

В приложении полиномов Лежандра важную роль играет формула:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}; \;\; n = 0,1,2,\ldots \tag{20}$$

Результаты

Практическое знание свойств специальных функций (Бесселя и Лежандра) позволяет решать физические задачи повышенной сложности и получать решения в формульном, либо в графическом виде, а также проводить обработку результатов физических экспериментов [9].

Заключение

Выполняя разделение переменных в краевых задачах с граничными условиями в криволинейных системах координат, получают решения в виде многочленов: в случае цилиндрических координат – функций Бесселя первого рода, а в случае сферических координат – полиномов Лежандра. Полученные решения, как правило, не могут быть выражены через известные элементарные функции, но с помощью специальных функций решение задачи выглядит в явном виде наиболее компактно. Знание и применение специальных функций при решении задач математической физики повышает уровень математической подготовки обучающихся и способствует наиболее полному пониманию разделов классической физической теории.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: Учебник для вузов. — СПб.: Питер. – 2004. – 539 с.

2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – 2-е изд. – М.: «Наука», 1969. – 288 с.

3. Гутер Р.С., Ямпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. Учеб. пособие для втузов – Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: «Высш. школа», 1976. – 304 с.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: «Наука», 1977. – 736 с.

5. Корнеев, В.С. Методы математической физики. Основные уравнения и задачи [Текст]: учебное пособие / В. С. Корнеев. – Новосибирск: СГУГиТ, 2020. – 81 с.

6. Корнеев В.С. Расчет амплитуд собственных колебаний для мембран прямоугольной и круглой формы // Вестник СГУГиТ, Новосибирск: СГУГиТ, 2017. – Вып. 4(22). – С. 213–220.

7. Корнеев В.С. Цифровые онлайн-платформы «Графики» и «Интегралы» в практических занятиях по дисциплине «Методы математической физики» // Сб. материалов Межд. научно-метод. конф. «Актуальные вопросы образования», Новосибирск: СГУГиТ, 2022. –№1-2. – С.60–68.

8. Корнеев В.С. Решение дифференциальных уравнений в курсе математической физики // Сб. материалов Межд. научно-метод. конф. «Актуальные вопросы образования», Новосибирск: СГУГиТ, 2017. №1-2. – С.56–60.

9. Корнеев В.С., Райхерт В.А. Цифровые технологии обработки оптических изображений в лабораторном практикуме по физике // Сб. материалов Межд. научно-метод. конф. «Актуальные вопросы образования», Новосибирск: СГУГиТ, 2020. – Т.1. – С.185–190.