УДК 378.016 : 512.5
DOI 10.33764/2618-8031-2024-1-158-164

В. Л. Неклюдова [1]✉

Общая алгебра как базовый раздел курса дискретной математики для обучающихся IT-направлений

[1] Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: neklyudova@ssga.ru

Аннотация. Статья посвящена проблемам преподавания общей алгебры – одного из основополагающих и при этом одного из наиболее сложных для освоения разделов курса дискретной математики – обучающимся по направлениям подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии и 10.03.01 Информационная безопасность. В работе обосновывается необходимость изучения типов и свойств алгебраических структур будущими специалистами в области компьютерных наук и информационных технологий. Представлены возможные подходы к теоретическому изложению и практической отработке понятий отношения и операции, заданных на множестве; к формированию у обучающихся навыков анализа свойств бинарных отношений и бинарных операций; к изучению вопросов идентификации и систематизации основных типов алгебраических систем.

Ключевые слова: дискретная математика, общая алгебра, алгебраические системы, бинарные отношения, бинарные операции

V.L. Neklyudova [1]✉

General Algebra as a Basic Section of a Discrete Mathematics Course for IT Students

[1] Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: neklyudova@ssga.ru

Abstract. The article is devoted to the problems of teaching general algebra - one of the fundamental and at the same time one of the most difficult sections of the discrete mathematics course – to students in the areas of training 09.03.02 Information Systems and Technologies and 10.03.01 Information Security. The work substantiates the need for future specialists in the field of computer science and information technology to study the types and properties of algebraic structures. Possible approaches to the theoretical presentation and practical development of the concepts of relationships and operations defined on a set presented; to develop students' skills in analyzing the properties of binary relations and binary operations; to the study of issues of identification and systematization of the main types of algebraic systems.

Keywords: discrete mathematics, general algebra, algebraic systems, binary relations, binary operations

Введение

В эпоху повсеместной цифровизации и развитых информационных технологий высшая школа должна уделять особое внимание не только основам компьютерной грамотности будущих специалистов, но и формированию у них алгоритмического мышления, а также понимания возможностей информационных технологий в современном мире [1, 2].

Одной из важнейших дисциплин, закладывающих основу для восприятия сложных концепций в информатике и компьютерных науках, является дискретная математика.

Дискретная математика представляет собой совокупность областей математики, изучающих действия, отношения и структуры, образованные отдельными, обособленными объектами, то есть, заданные на конечных и счетных множествах. Говоря о курсе дискретной математики в вузе, обычно подразумевают комплекс разделов математики, активно развивавшихся начиная с середины XX века и связанных с приложениями в информатике и вычислительной технике.

Не существует четкого разделения математики на дискретную и непрерывную [3, 4]; также, как и определенного набора тем и разделов, составляющих курс дискретной математики в вузе. Этот набор может сильно варьироваться в зависимости от учебного заведения, направления подготовки и объема курса [3, 5–7].

В Сибирском государственном университете геосистем и технологий дисциплина «Дискретная математика» изучается будущими специалистами в области техносферной безопасности, картографии и др. Однако наиболее важное прикладное значение дискретная математика имеет в сфере информационных технологий, компьютерных наук и программирования. Таким образом, наиболее продолжительный и развернутый курс данной дисциплины предназначен для обучающихся по направлениям 09.03.02 Информационные системы и технологии и 10.03.01 Информационная безопасность.

Программа этого курса включает традиционные для данной дисциплины разделы, такие как теория множеств, комбинаторика, теория графов, теория автоматов, математическая логика. По ним существует большое количество учебной и справочной литературы, а также педагогических приемов, позволяющих изложить соответствующие темы просто и доходчиво и после закрепить полученные знания посредством практикума.

Другие разделы курса, такие как элементы теории чисел, теория отношений, общая алгебра считаются не столь необходимыми для студентов технических вузов и освещены в учебной литературе в меньшей степени. Это может быть связано как с тем, что они реже используются для решения непосредственных практических задач, так и с их сложностью.

Тем не менее, теория чисел имеет важные приложения в криптографии и теории алгоритмов, а общая алгебра, изучающая свойства алгебраических структур, тесно связана с типами данных в программировании и востребована при разработке средств хранения, передачи и обработки информации, в теории кодирования, при решении вопросов оптимизации алгоритмов и анализе сложности программ [8–10].

Методы и материалы

Алгебраической структурой или системой называется множество с заданными на нем операциями и отношениями. В зависимости от того, какими свойствами эти операции и отношения обладают, определяется тип алгебраической системы. По сути, все разделы математики изучают те или иные алгебраические системы, однако общая алгебра позволяет находить сходство в действиях с объектами совершенно разной природы и использовать при работе с ними общие принципы.

Идентификация алгебраической системы сводится к исследованию свойств бинарных отношений (таких, как рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и бинарных операций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, существование нейтрального и симметричного элементов) на различных множествах.

Эта задача часто представляет значительную сложность для студентов. По своей сути она близка к задачам на доказательство, с которыми обучающиеся технических направлений справляются хуже, чем с вычислительными задачами. Кроме того, работа с конкретными операциями и отношениями требует применения знаний, полученных ранее на занятиях по математическим дисциплинам в вузе или общеобразовательной школе, где свойства отношений и операций упоминаются вскользь, а потому скоро забываются учащимися.

Для более глубокого понимания обучающимися сути алгебраических систем целесообразно руководствоваться при их изучении следующими принципами [11,12]:

1) уделить значительное внимание разбору и самостоятельному решению задач на анализ свойств конкретных бинарных отношений и бинарных операций;

2) исследовать все свойства в соответствии с принятым списком даже в тех случаях, когда их наличие кажется очевидным и не требующим доказательств;

3) свести задачу анализа свойств к уже знакомой студентам задаче проверки истинности или ложности некоторых утверждений.

Остановимся на исследовании отношений внутренней композиции. Для того, чтобы изучить свойства отношения **R**, заданного на множестве A, необходимо проверить истинность утверждений, приведенных в табл. 1. Обозначение $x\mathbf{R}y$ означает, что элемент x связан отношением **R** с элементом y, или, что то же самое $(x,y)\in\mathbf{R}$ [13].

Таблица 1

Исследование свойств отношений внутренней композиции

Утверждение	Результат проверки	Вывод
1) $x\mathbf{R}x$	утверждение истинно $\forall x\in A$	отношение рефлексивно
	утверждение ложно $\forall x\in A$	отношение антирефлексивно
2) Если $x\mathbf{R}y$, то $y\mathbf{R}x$	утверждение истинно $\forall x,y\in A$	отношение симметрично
	утверждение ложно $\forall x,y\in A$ *или* утверждение истинно только если $x=y$	отношение антисимметрично
3) Если $x\mathbf{R}y$ и $y\mathbf{R}z$, то $x\mathbf{R}z$	утверждение истинно $\forall x,y,z\in A$	отношение транзитивно

Продемонстрируем применение описанного подхода на примере.

Пример 1. Выяснить, какими свойствами обладает отношение $\mathbf{R}$, заданное на множестве всех студентов СГУГиТ следующим образом: два студента связаны отношением $\mathbf{R}$, если они учатся в разных группах.

Решение. Проанализируем свойства в соответствии с табл. 1. Для этого во всех утверждениях выражение $X\mathbf{R}Y$ заменим на предложение: «X и Y учатся в разных группах».

1) $X\mathbf{R}X \Rightarrow X$ и X учатся в разных группах. Очевидно, что это утверждение ложно для всех X, поскольку ни один студент не может учиться в разных группах с самим собой. Следовательно отношение не является рефлексивным и является антирефлексивным.

2) если $X\mathbf{R}Y$, то $Y\mathbf{R}X \Rightarrow$ если X и Y учатся в разных группах, то Y и X учатся в разных группах. Это утверждение истинно для всех X и Y. Следовательно, отношение является симметричным и не является антисимметричным.

3) Если $X\mathbf{R}Y$ и $Y\mathbf{R}Z$, то $X\mathbf{R}Z \Rightarrow$ если X и Y учатся в разных группах, и Y и Z учатся в разных группах, то X и Z учатся в разных группах. Это утверждение может быть как истинным, так и ложным. Следовательно, отношение не является транзитивным.

В итоге отношение обладает свойствами антирефлексивности и симметричности. Аналогично рекомендуется анализировать бинарные операции, для каждого конкретного случая проверяя истинность условий, фигурирующих в описании их свойств.

В качестве отдельного свойства следует выделить выполнимость операции, то есть убедиться, что для любых двух элементов множества результат операции существует и лежит в том же множестве [13]. Отметим, что в учебной литературе выполнимость зачастую не входит в список свойств операций, и о ней упоминают только в тех случаях, когда она не имеет места, что значительно осложняет освоение обучающимися данной темы.

Для того, чтобы изучить свойства бинарной операции $\odot : M^2 \to M$, необходимо последовательно проверить истинность утверждений, приведенных в определении каждого из свойств в табл. 2. Напомним, что паре элементов $(a,b) \in M^2$ бинарная операция $\odot$ ставит в соответствие элемент, обозначаемый $a \odot b \in M$.

Таблица 2

Исследование свойств бинарных операций

Свойство	Определение
0) Выполнимость	$\forall a,b \in M \;\; \exists a \odot b \in M$
1) Коммутативность	$\forall a,b \in M \;\; a \odot b = b \odot a$
2) Ассоциативность	$\forall a,b,c \in M \;\; a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c = a \odot b \odot c$
3) Существование нейтрального элемента	$\exists e \in M$ такой, что $\forall a \in M \quad a \odot e = e \odot a = a$
4) Существование симметричного элемента	$\forall a \in M \;\; \exists \bar{a} \in M$ такой, что $a \odot \bar{a} = \bar{a} \odot a = e$

Пример 2. Выяснить, какими свойствами обладает операция умножения, заданная на множестве M матриц размерности 2×2.

Решение. Проверим все свойства последовательно в соответствии с табл. 2, при необходимости ссылаясь на определения и свойства из раздела «Линейная алгебра» курса дисциплины «Высшая математика».

0) $\forall A,B\in M\ \ \exists A\cdot B\in M$ – истинно, так как произведение двух матриц размерности 2×2 всегда существует и является матрицей размерности 2×2 (из определения операции умножения матриц); операция выполнима;

1) $\forall A,B\in M\ \ A\cdot B=B\cdot A$ – ложно, так как умножение матриц некоммутативно, то есть в общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$ (известно из курса высшей математики; легко продемонстрировать на примере); операция некоммутативна;

2) $\forall A,B,C\in M\ (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)=A\cdot B\cdot C$ – истинно (известно из курса высшей математики); операция ассоциативна;

3) $\exists E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in M$ (единичная матрица) такая, что $\forall A\in M$ $E\cdot A=A\cdot E=A$ – истинно (из определения единичной матрицы и свойств операции умножения матриц); нейтральный элемент существует;

4) $\forall A\in M\ \ \exists A^{-1}\in M$ такая, что $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$ – ложно, так как в M есть вырожденные матрицы, которые не имеют обратных (из определения обратной матрицы и ее свойств); свойство существования симметричного элемента не выполнено.

В итоге операция умножения матриц выполнима, ассоциативна и имеет нейтральный элемент.

Дополнительную трудность для обучающихся представляет понимание отличий между типами алгебраических систем. Чтобы разобраться в разновидностях алгебраических структур, полезно систематизировать описания различных их типов в виде таблицы. Такая систематизация может быть выполнена студентами на занятиях под руководством преподавателя или самостоятельно на основе имеющегося теоретического материала.

Заключение

Дискретная математика, как отдельная дисциплина, появилась в учебных планах многих направлений подготовки обучающихся сравнительно недавно. Некоторые разделы, которые принято относить к дискретной математике (в том числе общая алгебра), до недавнего времени изучались в первую очередь студентами, чья будущая профессиональная деятельность связана с наукой и научными исследованиями. Однако в последние годы заметно выросла прикладная ценность материала курса дискретной математики, глубина его связей с другими дисциплинами и востребованность в профессиональной деятельности специалистов в самых разных областях. Возникла необходимость в создании методических приемов, позволяющих донести сложные математические концепции до обучающихся технических вузов, изложить их простым языком и разработать практикум для отработки и закрепления полученных знаний. Некоторые из таких приемов представлены в настоящей статье, а также являются частью учебно-методического комплекса дисциплины, одним из создателей которого выступает автор [13, 14].

Изучение общей алгебры в рамках дисциплины «Дискретная математика» определяет всю структуру данного курса. В свете теории алгебраических систем его отдельные разделы становятся частями единого целого, возникает ощущение связности и преемственности между темами курса, и такое видение позволяет иначе взглянуть на математические дисциплины и точные науки в целом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айтымова, А. М. Формирование it-компетенций в условиях непрерывного образования средствами информационно-образовательной среды / А. М. Айтымова, Е. В. Шевчук, А. В. Шпак // Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области : Материалы III Всероссийской научно-практической конференции, Тверь, 29–30 марта 2019 года. – Тверь: Тверской государственный университет, 2019. – С. 6–9. – EDN JBHYKM.

2. Павловская, О. Г. О трансформации преподавания математики при обучении цифрового поколения / О. Г. Павловская // Актуальные вопросы образования. – 2023. – № 3. – С. 140–145. – EDN PWBXCB.

3. Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учебник и практикум для вузов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова ; С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – 5-е издание, исправленное и дополненное. – Москва : Общество с ограниченной ответственностью "Издательство ЮРАЙТ", 2023. – 279 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00871-5. – EDN SMILSW.

4. Тестов, В. А. Философские вопросы соотношения дискретного и непрерывного в математике / В. А. Тестов // Философия науки и техники в России: вызовы информационных технологий : Сборник научных статей / под общей редакцией Н. А. Ястреб. – Вологда : Вологодский государственный университет, 2017. – С. 298–301. – EDN YHQIIO.

5. Евсеева, О. А. Актуальные вопросы преподавания дискретной математики в техническом вузе / О. А. Евсеева, О. Р. Параскевопуло, Е. В. Пронина // Наука и образование: новое время. Научно-методический журнал. – 2018. – № 1(8). – С. 70–71. – EDN YOTBAJ.

6. Евсюкова, Е. В. Из опыта преподавания дисциплины "Основы дискретной математики" в вузе / Е. В. Евсюкова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2010. – № 12. – С. 133–138. – EDN WHBQUX.

7. Зепнова, Н. Н. Особенности преподавания курса дискретной математики во втузе / Н. Н. Зепнова, О. В. Кузьмин // Омский научный вестник. – 2011. – № 1(95). – С. 160–163. – EDN OFTPFV.

8. Бегматов, А. Х. Некоторые принципы построения курса высшей математики в инженерном вузе (на примере ит-специальностей) / А. Х. Бегматов // Актуальные вопросы образования. – 2021. – № 2. – С. 157–160. – EDN ACUGVF.

9. Крылова, Е. М. Значимость математических дисциплин в структуре образовательных программ высшего образования с учетом введения ФГОС 3++ / Е. М. Крылова // Актуальные вопросы образования. – 2020. – Т. 1. – С. 191–195. – DOI 10.33764/2618-8031-2020-1-191-195. – EDN OEAPOX.

10. Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов "Информатика и вычислительная техника" / Ф. А. Новиков ; Ф. А. Новиков. – 3-е изд.. – Москва [и др.] : Питер, 2008. – 383 с. – (Учебник для вузов). – ISBN 978-5-91180-759-7. – EDN QJSPQZ.

11. Григоренко, О. В. Реализация принципов прочности усвоения знаний в обучении математике в школе / О. В. Григоренко, И. Б. Шмигирилова // Сибирский учитель. – 2017. – № 3(112). – С. 95–100. – EDN ZXEDJP.

12. Величко, Ю. А. Сравнение эффективности методик преподавания дискретной математики / Ю. А. Величко // Сибирский учитель. – 2018. – № 4(119). – С. 37–44. – EDN UWLPLW.

13. Дискретная математика: учеб.-метод. пособие / В. Л. Неклюдова, О. В. Григоренко. – Новосибирск : СГУГиТ, 2021. – 100 с.

14. Дискретная математика : задачник / В. Л. Неклюдова, В. П. Вербная, О. Г. Павловская. – Новосибирск : СГУГиТ, 2022. – 42 с.

© В. Л. Неклюдова, 2024