УДК 51(075)

Ю. М. Вахромеев [1]✉

Нестандартные задачи с элементами симметрии

[1] Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин),
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: vakhromy@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается небольшая часть нестандартных задач, в которых присутствует симметрия в том или ином виде. Такие задачи достаточно редко встречаются в студенческих, да и школьных олимпиадах по математике, но, несомненно, могут украсить набор предлагаемых на олимпиадах задач.

Ключевые слова: олимпиады, задачи, симметрия, решение

Yu. M. Vakhromeev [1]✉

Non-standard Problems with Symmetry Elements

[1] Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin),
Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: vakhromy@gmail.com

Abstract. The paper considers a small part of non-standard problems in which there is a symmetry in one form or another. Such tasks are quite rare in student and school math olympiads, but they can undoubtedly decorate the set of tasks offered at the olympiads.

Keywords: olympiads, problems, symmetry, solution

Введение

В работе математического кружка в вузе уделяется большое внимание методам доказательства от противного, выделение полного квадрата, методу математической индукции, принципу Дирихле и т.д. И незаслуженно мало задач на симметрию. Автор хотел бы обратить внимание на такой перекос.

Методы и материалы

Разумеется, в школьных курсах и курсе математического анализа в вузе симметрия в полной мере используется при построении графиков четных и нечетных функций, в упрощении интегралов в симметричных пределах, при доказательстве теорем, например, при доказательстве теоремы о первом замечательном пределе и т.д. Во всех таких случаях симметрия носит вспомогательный характер. Иногда задачи с симметрией служат задачами для разминки [1] или «развлекательной» математики. С другой стороны, есть очень много задач [2, 3], которые достаточно трудны и требуют серьезного анализа. Часто элементы симметрии играют ключевую роль в их решении. Такие задачи могут служить поводом для участия в студенческих конференциях, выступлений на занятиях математического кружка и т.д.

Пример 1. Дан осесимметричный выпуклый 51-угольник. Доказать, что ось симметрии проходит через одну из его вершин.

Решение. Если бы ось симметрии не проходила через вершину многоугольника, то 51 вершины должны быть разбиты на симметричные относительно оси пары, что невозможно.

Пример 2. Найти все такие четырехзначные палиндромы, что если сумма его цифр делится на 6, то палиндром делится на 37.

Решение такого рода задач предполагает некоторый перебор, который сильно упрощается, если заметить, что такой палиндром делится на 11, что является следствием его симметрии и, по условию задачи, на 3. Кроме того, если умножить палиндром на целое положительное число и при этом палиндром останется четырехзначным, результат будет удовлетворять условиям задачи.

Пример 3. Задача предлагалась на Межвузовской олимпиаде по математике для студентов 1 курса технических направлений. Студент-легкоатлет находится в центре плоскости с шагом по координатным осям в 1 метр. Первым прыжком студент разминается и прыгает на 1 метр в любую сторону параллельно любой из осей. С каждым шагом его сила растет, и он вдвое увеличивает расстояние прыжка. Направление он выбирает сам (также параллельно одной из осей). В точки с какими координатами он может попасть, прыгая таким образом?

Решение. Назовем достижимыми множество точек $D_n(x,y)$, в которые может попасть студент, сделав n+1 прыжков. Координаты таких точек можно представить в виде разложений по степеням двойки

$$x = \alpha_0 2^0 + \alpha_1 2^1 + \alpha_2 2^2 + \ldots + \alpha_n 2^n. \quad (1)$$

$$y = \beta_0 2^0 + \beta_1 2^1 + \beta_2 2^2 + \ldots + \beta_n 2^n. \quad (2)$$

Коэффициенты α_i и β_i могут принимать значения 1,0,–1, причем, если $\alpha_i \neq 0$, то $\beta_i = 0$ и наоборот, если $\beta_i \neq 0$, то $\alpha_i = 0$.

То есть, если студент прыгает вдоль оси Ox, то $\alpha_i \neq 0$, $\beta_i = 0$, и изменяется только координата x, если вдоль оси Oy, то $\beta_i \neq 0$, $\alpha_i = 0$, и изменяется только координата y. Знаки коэффициентов показывают направление прыжка по оси, пара α_i, β_i соответствует одному прыжку студента. Последовательность коэффициентов в (1), (2) определяет путь прыгуна от начала координат к достижимой точке.

Если задать коэффициенты в (1), (2), мы получим координаты достижимой точки. Это можно принять за решение задачи. Но вопрос, является ли данная точка достижимой, например (7,2), остается открытым. Сформулируем такой критерий и установим конфигурацию достижимых точек на плоскости Oxy, используя симметрию.

Пусть точка $(x,y) \in D_n(x,y)$. Если умножить равенства (1) или (2) или оба вместе на –1, полученные точки остаются достижимыми. Если поменять x и y местами, полученная точка также будет достижимой. Поэтому множество $D_n(x,y)$ достижимых точек симметрично относительно осей координат, относительно начала координат и относительно $y = x$ и $y = -x$, причем для любого n.

Следовательно, множество всех достижимых точек также симметрично относительно осей координат и биссектрис координатных углов. И нам достаточно рассмотреть конфигурацию допустимых точек в области D_x, ограниченной положительной полуосью Ox и биссектрисой первого координатного угла.

Из (1), (2) следует, что сумма координат достижимой точки – нечетное число. То есть достижимые точки могут лежать только на прямых $x + y = C$, где C – некоторое нечетное число. Покажем, что точки $(1;0),(3;0),(5;0),\ \ldots,\left[(2m+1);0\right]$ на оси Ox – достижимы. В силу определения (1), (2), такая точка будет достижимой, если произвольное нечетное число $(2m+1)$, $m=0;1;2;\ldots$ можно представить в виде разложения по степеням двойки:

$$x=\alpha_0 2^0+\alpha_1 2^1+\alpha_2 2^2+\ldots+\alpha_n 2^n, \tag{3}$$

где все коэффициенты разложения $\alpha_i \neq 0$ и могут принимать значения $1; -1$

Докажем индукцией по количеству прыжков. При $n = 0$ студент делает один прыжок вдоль оси Ox и, по условию, точка (1;0) достижима, $x=1\cdot 2^0$. При $n=1$ студент делает два прыжка вдоль оси Ox, точка достижима, $x=1\cdot 2^0+1\cdot 2^1$. Пусть студент делает n прыжков вдоль оси Ox и точки $(1;0),(3;0),(5;0),\ \ldots,\left[(2m+1);0\right]$ достижимы при $1\le 2m+1\le 2^n-1$.

Покажем, что если студент делает $n+1$ прыжок, то точки $(2m+1;0)$ также достижимы при $2^n+1\le 2m+1\le 2^{n+1}-1$. Заметим, что $n+1$ – это минимальное количество прыжков, за которые студент, прыгая вдоль оси Ox, попадает в точку $(2m+1;0)$. Запишем нечетное число $2m+1$ в двоичной системе

$$2m+1=1+\beta_1 2^1+\beta_2 2^2+\ldots+\beta_{n-1}2^{n-1}+2^n, \tag{4}$$

где коэффициенты β_i принимают значения $0;1$. Пусть β_k, $1\le k\le n-1$, – первый коэффициент, считая слева, равный нулю. То есть первые k коэффициентов в (4) отличны от нуля, $\beta_0=\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{k-1}=1;\beta_k=0$. Тогда слагаемые $\beta_{k-1}2^{k-1}+\beta_k 2^k$ в (4) можно заменить на $\beta_{k-1}\left(2^k-2^{k-1}\right)+\beta_k 2^k=-2^{k-1}+2^k$. И уже $k+1$ первых коэффициентов в (4) отличны от нуля. Так, последовательно, можно заменить все нулевые коэффициенты в (4) и для каждого нечетного числа $2m+1, 2^n+1\le 2m+1\le 2^{n+1}-1$ получить разложение (3).

Таким образом, если студент, делая $1,2,3,\ldots,n$ прыжков, достигает точки $(1;0),(3;0),(5;0),\ \ldots,\left[(2m+1);0\right]$, где $1\le 2m+1\le 2^n-1$, то делая на один прыжок больше, он может достичь точки $(1;0),(3;0),(5;0),\ \ldots,\left[(2m+1);0\right]$, где $1\le 2m+1\ \le 2^{n+1}-1$. И, следовательно, все точки с нечетными абсциссами на положительной полуоси Ox – достижимы.

Так, например, точка (37,0) достижима за 6 прыжков $37=100101=-1+2^1-2^2-2^3+2^4+2^5$. Поскольку 37, как и всякое нечетное число, представимо в виде разложения (3). Заметим, что количество нулей в двоичной записи совпадает с числом отрицательных членов в разложении.

Единственность разложения (3) при данном n.

Пусть число $2m+1$ представлено в виде (3) с иными коэффициентами

$$2m+1=\gamma_0 2^0+\gamma_1 2^1+\gamma_2 2^2+\ldots+2^n, \tag{5}$$

Вычтем из (3) выражение (5), тогда

$$0=\left(\alpha_0-\gamma_0\right)2^0+\left(\alpha_1-\gamma_1\right)2^1+\ldots+\left(\alpha_{n-1}-\gamma_{n-1}\right)2^{n-1}.$$

Выражения в скобках либо равны нулю, если $\alpha_i=\gamma_i$, либо равны двум со знаком плюс или минус, если $\alpha_i\neq\gamma_i$. Сокращая на 2 со знаком последней скобки, получим $\tau_0 2^0+\tau_1 2^1+\tau_2 2^2+\ldots+2^{n-1}=0$, где τ_i могут принимать значения –1, 0, 1. В любом случае, левая часть больше нуля. Полученное противоречие доказывает единственность разложения (3).

Построим множество достижимых точек D_x. Как было отмечено, достижимые точки могут лежать только на прямых $x+y=2m+1,\ m=0,1,2,3$. Используем индукцию по количеству скачков. Заметим, что прыгая $n+1$ раз, студент может попасть только в те точки, которые лежат либо внутри либо на границе треугольника:

$$y=0,\ \ y=x,\ \ x+y=2^{n+1}-1. \tag{6}$$

При $n=0$ студент попадает в достижимую точку (1;0). При $n=1$ студент попадает в достижимые точки: (1;0), (3;0) и точку (2;1), она достижима, так как ее координаты $x=0\cdot 2^0+1\cdot 2^1, y=1\cdot 2^0+0\cdot 2^1$, удовлетворяют условиям (1), (2). После двух прыжков достижимые очки лежат в треугольнике (6) на линиях $x+y=1$ и $x+y=3$.

Предположим, что после n прыжков достижимые точки лежат в треугольнике $y=0,\ y=x,\ x+y=2^n-1$ на линиях $x+y=2m+1,\ 1\leq 2m+1\leq 2^n-1,$ где $m=0,1,2$. Покажем, что после $n+1$ прыжков достижимые точки лежат на линиях $x+y=2m+1,\ 2^n+1\leq 2m+1\leq 2^{n+1}-1$ внутри треугольника (6). Все такие точки студент достигает первый раз после $n+1$ прыжков. Рассмотрим произвольную достижимую точку $\left(2m+1;0\right),\ 2^n+1\leq 2m+1\leq 2^{n+1}-1$, которая лежит на прямой $x+y=2m+1$. Абсцисса точки разложима по степеням двойки (3).

$$2m+1=\alpha_0 2^0+\alpha_1 2^1+\alpha_2 2^2+\ldots+\alpha_{n-1}2^{n-1}+2^n. \tag{7}$$

Докажем, что точки с целочисленными координатами на выбранной прямой, которые лежат в треугольнике (6), достижимы. У таких точек ординаты равны натуральным числам: $1,2,\ldots m;\ 2^{n-1}\leq m\leq 2^n-1$. Утверждение будет доказано, если среди слагаемых в правой части равенства (7) можно выбрать такие, суммы которых равны натуральным числам от 1 до m, и в таких суммах нет одинаковых слагаемых.

Пусть, например, выражение в скобках в правой части (7) имеет вид

$$-2^0-2^1-\ldots-2^k+2^{k+1}+2^{k+2}-2^{k+3}-2^{k+4}+2^{k+5}+\ldots+2^{n-1} \qquad (8)$$

Из первых $k+1$ отрицательных слагаемых, очевидно, можно выбрать суммы, равные, $-1,-2,-3,\ldots,-\left(2^{k+1}-1\right)$, используя двоичную систему. Складывая такие суммы с первым положительным членом 2^{k+1} в (8) получим натуральные числа: $1,2,3,\ldots,\left(2^{k+1}-1\right)$. Добавим к ним 2^{k+1} и получаем натуральные числа: $1,2,3,\ldots,\left(2^{k+1}-1\right),2^{k+1}$, как некоторые суммы первых $k+2$ членов в (8). При этом в таких суммах нет одинаковых слагаемых. Определим теперь все натуральные числа от $2^{k+1}+1$ до 2^{k+2}, как суммы некоторых слагаемых в (8). Сложим 2^{k+2} с определенными выше отрицательными суммами, записанными в двоичной системе: $2^{k+2}-1,2^{k+2}-2,2^{k+2}-3,\ldots,2^{k+2}-\left(2^{k+1}-1\right)$. Так как $2^{k+2}-\left(2^{k+1}-1\right)=2^{k+1}+1$, то мы получили натуральные числа от $2^{k+1}+1$ до $2^{k+2}+1$, добавляя к ним 2^{k+2}, получим натуральные числа от $2^{k+1}+1$ до 2^{k+2}, как некоторые суммы первых $k+3$ членов в (8).

Рассмотрим следующий участок (8) с отрицательными слагаемыми. Так как

$$-2^{k+3}-2^{k+4}+2^{k+5}=2^{k+3}, \qquad (9)$$

то нам, вначале, нужно найти все натуральные числа от $2^{k+2}+1$ до $2^{k+3}-1$. Представим их как $2^{k+2}+p$, где p – натуральные числа от 1 до $2^{k+2}-1$, p можно найти, если известны степени двойки: $2^0,2^1,2^2,\ldots,2^{k+1}$, используя двоичную систему. Добавим к найденным числам 2^{k+3} в виде суммы (9) и получим все натуральные числа от 1 до 2^{k+3} как некоторые суммы первых $k+5$ членов (8). На следующем шаге, поскольку

$$-2^{k+4}+2^{k+5}=2^{k+4}, \qquad (10)$$

найдем все натуральные числа от $2^{k+3}+1$ до $2^{k+4}-1$, точно так же, как на предыдущем шаге. Добавляя 2^{k+5} к найденным числам, находим натуральные числа от 1 до 2^{k+4}, как некоторые суммы первых $k+5$ членов. И, наконец, определим все натуральные числа от $2^{k+4}+1$ до $2^{k+5}-1$ так же, как это делали выше, и, добавляя 2^{k+5} к найденным, получим все натуральные числа от 1 до 2^{k+5}, как некоторые суммы первых $k+5$ членов в (8). Продолжая вычисления, описанным выше способом, находим все натуральные числа от 1 до 2^n-1, как некоторые суммы членов в правой части равенств (8) и, соответственно, (7).

Рассмотрим точки $\left(x_k,y_k\right)=\left(2m+1-k;k\right)$, $k=1,2,\ldots,m$, на прямой $x+y=2m+1, 2^n+1\le 2m+1\le 2^{n+1}-1, 2^{n-1}\le m\le 2^n-1$. Докажем, что они достижимы.

Нечетное число $2m+1$ имеет разложение по степеням двойки (7). Отметим те члены в разложении (7), суммы которых равны k. Заменяя отмеченные члены нулями, получаем абсциссу x_k такой точки. Заменяя не отмеченные члены нулями, получаем ординату y_k такой точки. Очевидно, (x_k, y_k) удовлетворяет условиям и (1), (2) и (x_k, y_k) достижима.

Делая $1,2,...,n$ прыжков, студент достигает любые точки, лежащие в треугольнике $y=0,\ y=x,\ x+y=2^n-1$ на линиях $x+y=2m+1,\ 1\le 2m+1\le 2^n-1$, где $m=0,1,2$. Делая на один прыжок больше, он достигает любые точки, которые лежат на линиях $x+y=2m+1,\ 2^n+1\le 2m+1\le 2^{n+1}-1$ в треугольнике (6). Таким образом, множество достижимых точек в области D_x – это все точки на линиях $x+y=2m+1,\ m=0,1,2,...$.

В силу симметрии множества достижимых точек D относительно осей координат и биссектрис координатных углов, множество D есть множество всех точек с целочисленными координатами на прямых:

$$x+y=2m+1;\ x-y=-(2k+1);\ x+y=-(2p+1);$$

$$x-y=(2l+1);\ \ m,k,l,p=0,1,2...$$

в 1, 2, 3, 4 координатных углах. Или, как можно показать, D – множество всех точек с целочисленными координатами на прямых $x+y=2m+1$, где $m=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$. То есть множество допустимых точек D – это все точки, у которых сумма координат – нечетное число.

Последняя задача о студенте-прыгуне, очевидно, не является простой. Ее можно отнести к задачам о процессах [3]. Модель некой ситуации, развивающейся во времени по определенным правилам. Задачу можно по-разному оценивать, в зависимости от того, как участник олимпиады понял условия поставленной задачи. И как далеко продвинулся в ее решении. Некоторые этапы решения можно выделить в самостоятельные задачи и рассматривать их на занятиях математического кружка. Заметим, что симметрия является одним из ключевых элементов решения этой задачи, при доказательстве достижимости точек (x_k, y_k).

Заключение

В задачах с элементами симметрии есть не только развлекательная составляющая. Часто это текстовые задачи. Студент должен приложить усилие, чтобы формализовать задачу, построить математическую модель [4]. Затем использовать симметрию, если он ее там усмотрел, для упрощения и свести задачу к решаемой. Знакомство с различными видами симметрии побуждает студентов к более углубленному изучению математики. Тем более, что симметрия играет огромную роль и в физике [5], и в механике, и в прикладных науках. Знакомство с ней полезно во всех отношениях.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке внутреннего гранта НГАСУ (Сибстрин) в номинации У-5: подготовка и участие обучающихся в конкурсах и олимпиадах по специальности. Автор выражает благодарность руководству НГАСУ (Сибстрин) за поддержку гранта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. АСА. – Киров.: 1994. – 272с.

2. Парамонова И.М. Симметрия в математике // Серия: «Библиотека. Математическое просвещение» – Москва.: МЦНМО, 2000. – 16 с.

3. Вахромеев Ю.М., Вахромеева Т.В. Об «эффективных» алгоритмах в задачах о процессах // Актуальные вопросы образования. Современный университет как пространство цифрового мышления. Междунар. науч.-метод. конф.: сб. материалов в 3 ч. (Новосибирск, 25 – 28 февраля 2020 г.). – Новосибирск: СГУГиТ, 2020. – Ч. 1. – С. 180–184.

4. Гвоздев С.Е., Захарова Т.Э. Роль текстовых задач курса математики в предпрофессиональной подготовке // Актуальные вопросы образования. Модель проблемно-ориентированного проектного обучения в современном университете. Междунар. науч.-метод. конф.: сб. материалов в 3 ч. (Новосибирск, 25–28 февраля 2021 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2021. Ч. 1. – С. 97–99.

5. Вигнер Е. Этюды о симметрии. Перевод с английского. МИР. – Москва.:1971. – 318 с.