

И. Е. Дорогова^{1✉}, К. А. Демидов¹

Анализ наблюдений пунктов фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС) для уточнения параметров движения земной коры

¹Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
г. Новосибирск, Российская Федерация
e-mail: inna_dorogova@mail.ru

Аннотация. В статье продемонстрированы результаты исследования по уточнению параметров модели движения земной коры на основе анализа скоростей движения пунктов фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС). В рамках данной работы были использованы данные скоростей и координат пунктов ФАГС с сайта RGS-Centre. Для решения задачи по уточнению параметров модели движения земной коры использовался метод наименьших квадратов (МНК) и алгоритм сингулярного разложения. Для решения задачи при помощи алгоритма сингулярного разложения была создана программная реализация на языке Python. По результатам уточнения было проведено сравнение полученных результатов с уже существующими моделями движения земной коры, получены параметры оценки точности, сделаны выводы о корректности решения.

Ключевые слова: геодинамика, модель движения земной коры, параметры движения литосферных плит, сингулярное разложение, фундаментальная астрономо-геодезическая сеть

I. E. Dorogova^{1✉}, K. A. Demidov¹

Analysis of observations from fundamental astro-geodetic network (FAGN) points to refine parameters of Earth's crust movement

¹Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation
e-mail: inna_dorogova@mail.ru

Abstract. The article demonstrates the results of a study to refine the parameters of the model of motion of the Earth's crust based on the analysis of the speeds of movement of points of the fundamental astronomical and geodetic network (FAGN). As part of this work, data on the speeds and coordinates of the FAGN points from the RGS-Centre website were used. To solve the problem of clarifying the parameters of the model of motion of the Earth's crust, the method of least squares and the algorithm of singular decomposition were used. A software implementation was created in Python for solving the problem using the singular value decomposition algorithm. Based on the results of the refinement, the results obtained were compared with existing models of the movement of the Earth's crust, accuracy assessment parameters were obtained, and conclusions were drawn about the correctness of the solution.

Keywords: geodynamics, model of Earth's crust movement, parameters of lithospheric plate movement, singular value decomposition, fundamental astro-geodetic network

Введение

Литосферные плиты постоянно находятся в движении, учет их смещений необходим для обеспечения высокой точности координатно-временного обеспечения

государства. Параметры движения плит на территории Российской Федерации могут быть уточнены при помощи анализа данных, полученных из многолетних наблюдений на пунктах фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС). Данная задача является актуальной, поскольку общепринятые модели движений литосферных плит построены с опорой на станции международных геодезических сетей, в то время как на территории России количество пунктов международных сетей невелико, особенно в восточной части [1].

Задача по уточнению программно-математической модели движений земной коры является нелинейной и может быть решена методом наименьших квадратов (МНК) с применением алгоритма сингулярного разложения.

Методы и материалы

Компоненты угловой скорости движения плит можно представить в виде модели

$$\vec{\omega} = A\vec{d}, \quad (1)$$

где A – матрица преобразования;

d – вектор скоростей смещений пунктов, м/год.

Формирование вектора d с использованием скоростей смещений пунктов осуществлялось по формуле

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{Y_1} \\ V_{Z_1} \\ \dots \\ V_{X_n} \\ V_{Y_n} \\ V_{Z_n} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где V_X, V_Y, V_Z – компоненты вектора скорости движения точки, м/год.

Сингулярное разложение – это математический алгоритм, широко используемый в линейной алгебре. В основе метода лежит декомпозиция матрицы A на три составные матрицы: U (левые сингулярные векторы), матрицу Σ (диагональная матрица сингулярных значений) и матрицу V^T (транспонированная матрица правых сингулярных векторов), что позволяет представить исходную матрицу в виде произведения [2]

$$A = U\Sigma V^T, \quad (3)$$

Данный метод широко используется для машинного обучения, в численных расчетах, представляет собой прямой алгоритм.

Блок-схема для решения задачи по уточнению параметров модели движений земной коры при помощи метода наименьших квадратов с применением алгоритма сингулярного разложения представлена на рис. 1.

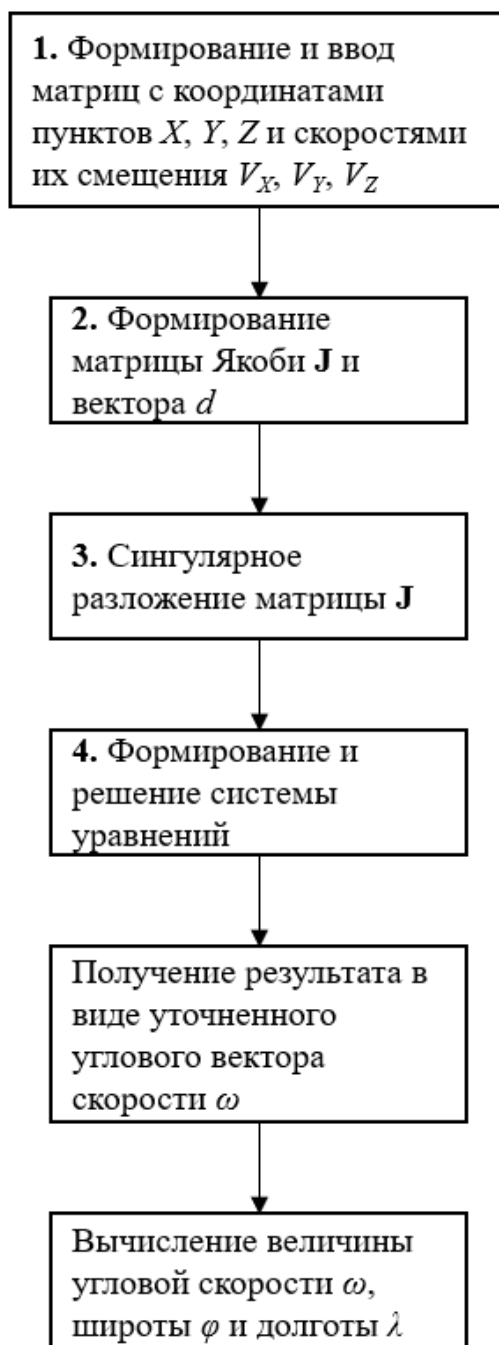


Рис. 1. Блок-схема для решения задачи методом наименьших квадратов с применением алгоритма сингулярного разложения

Согласно блок-схеме, представленной на рис. 1, первым этапом является формирование и ввод матриц координат пунктов r и их скоростей смещения матрицы v (с сайта RGS-Centre) по формулам [3]

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ X_n & Y_n & Z_n \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} V_{X_1} & V_{Y_1} & V_{Z_1} \\ V_{X_2} & V_{Y_2} & V_{Z_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{X_n} & V_{Y_n} & V_{Z_n} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где X, Y, Z – прямоугольные пространственные координаты пунктов, м;

V_X, V_Y, V_Z – скорости смещения пунктов, м/год.

Вторым этапом стало формирование матрицы Якоби J с использованием координат пунктов, согласно формуле

$$J = \begin{bmatrix} 0 & Z_1 & -Y_1 \\ -Z_1 & 0 & X_1 \\ Y_1 & -X_1 & 0 \\ 0 & Z_2 & -Y_2 \\ -Z_2 & 0 & X_2 \\ Y_2 & -X_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & Z_n & -Y_n \\ -Z_n & 0 & X_n \\ Y_n & -X_n & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где X, Y, Z – прямоугольные пространственные координаты пунктов, м.

Третьим этапом производится сингулярное разложение, согласно формуле 1. Оно выполняется при помощи библиотеки Python – `numpy`, а именно функции `numpy.linalg.svd` [4, 5]. Для выполнения необходимо ввести в данную функцию ранее сформированную матрицу J . На выходе, происходит разложение на три подматрицы.

Четвертым этапом является формирование и решение системы уравнений для нахождения уточненного углового вектора скорости. Данное значение вычисляется по методу наименьших квадратов

$$\vec{\omega} = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T \cdot \vec{d}, \quad (7)$$

где V – матрица правых сингулярных векторов;

Σ^+ – псевдообратная матрица от Σ ;

U^T – транспонированная матрица левых сингулярных векторов;

d – вектор скоростей смещений пунктов.

Псевдообратная матрица Σ^+ формируется по формуле

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – составляющие диагональной матрицы сингулярных значений Σ .

Вычисление величины угловой скорости ω , широты φ и долготы λ производится по формулам

$$\omega = \sqrt{\omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2}, \quad (9)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\omega_Z}{\omega}\right) \cdot \frac{180}{\pi}, \quad (10)$$

$$\lambda = \arctan 2(\omega_Y, \omega_X) \cdot \frac{180}{\pi}, \quad (11)$$

где $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ – компоненты скорости вращения плит, рад/год;

ω – величина угловой скорости, рад/год.

Результаты

Для решения задачи определения уточненных параметров движения плит были использованы скорости движения пунктов ФАГС, определенные по результатам многолетних наблюдений. Результаты вычисления угловых скоростей $\omega, \omega_X, \omega_Y, \omega_Z$, а также координат полюса Эйлера, полученных при помощи метода наименьших квадратов с применением алгоритма сингулярного разложения, а также значения из уже существующих моделей движений земной коры представлены в табл. 1–4 [6–11].

Таблица 1

Параметры движения Евразийской плиты

Модель движения плит	$\omega_x, 10^{-3}$ сек/год	$\omega_y, 10^{-3}$ сек/год	$\omega_z, 10^{-3}$ сек/год	$B, ^\circ$ N	$L, ^\circ$ E	$\omega,$ °/Ma
Сингулярное разложение						
Скорости и пункты с сайта RGS	-0,087	-0,534	0,727	53,35	-99,23	0,252
Данные из моделей движения литосферных плит						
NNR-MORVEL56	-0,151	-0,508	0,605	48,85	-106,50	0,223
NUVEL-1A	-0,202	-0,494	0,650	—	—	—
ITRF2008	-0,083	-0,534	0,750	—	—	0,257
ITRF2014	-0,085	-0,531	0,770	—	—	0,261
ITRF2020	-0,085	-0,519	0,753	—	—	0,255

Таблица 2

Параметры движения Амурской плиты

Модель движения плит	$\omega_x, 10^{-3}$ сек/год	$\omega_y, 10^{-3}$ сек/год	$\omega_z, 10^{-3}$ сек/год	$B, ^\circ$ N	$L, ^\circ$ E	$\omega,$ °/Ma
Сингулярное разложение						
Скорости и пункты с сайта RGS	-0,343	-0,148	1,300	73,96	-156,62	0,376
Данные из моделей движения литосферных плит						
NNR-MORVEL56	-0,263	-0,407	0,954	63,17	-122,82	0,297
NUVEL-1A	—	—	—	—	—	—
ITRF2008	-0,190	-0,442	0,915	—	—	0,287
ITRF2014	—	—	—	—	—	—
ITRF2020	-0,131	-0,551	0,837	—	—	0,281

Таблица 3

Параметры движения Охотской плиты

Модель движения плит	$\omega_x, 10^{-3}$ сек/год	$\omega_y, 10^{-3}$ сек/год	$\omega_z, 10^{-3}$ сек/год	$B, ^\circ$ N	$L, ^\circ$ E	$\omega,$ °/Ma
Сингулярное разложение						
Скорости и пункты с сайта RGS	0,028	-0,622	0,233	20,50	-87,46	0,185
Данные из моделей движения литосферных плит						
NNR-MORVEL56	-0,029	-0,713	0,418	30,30	-92,28	0,229
NUVEL-1A	—	—	—	—	—	—
ITRF2008	—	—	—	—	—	—
ITRF2014	—	—	—	—	—	—
ITRF2020	—	—	—	—	—	—

Таблица 4

Параметры движения Северо-Американской плиты

Модель движения плит	$\omega_x, 10^{-3}$ сек/год	$\omega_y, 10^{-3}$ сек/год	$\omega_z, 10^{-3}$ сек/год	$B, ^\circ$ N	$L, ^\circ$ E	$\omega,$ °/Ma
Сингулярное разложение						
Скорости и пункты с сайта RGS	0,154	-0,667	0,265	21,19	-77,03	0,204
Данные из моделей движения литосферных плит						
NNR-MORVEL56	0,122	-0,738	-0,065	-4,85	-80,64	0,209
NUVEL-1A	0,053	-0,742	-0,032	—	—	—
ITRF2008	0,035	-0,662	-0,100	—	—	0,186
ITRF2014	0,024	-0,694	-0,063	—	—	0,194
ITRF2020	0,045	-0,666	-0,098	—	—	0,187

На основе данных угловых скоростей движения плит $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, вычисленных при помощи метода наименьших квадратов с применением алгоритма сингулярного разложения, а также с использованием уже существующих реализаций моделей движений земной коры ITRF2020 и NNR-MORVEL56 были вычислены значения скоростей V_x, V_y, V_z для каждого пункта, участвующего в уточнении. Затем были получены оценки точности вычисленных скоростей движений пунктов mV_x, mV_y, mV_z . Результаты представлены в табл. 5.

Таблица 5

Оценка точности методов для территорий различных литосферных плит

Название метода или модели движения плит	$mV_x,$ м/год	$mV_y,$ м/год	$mV_z,$ м/год
Евразийская плита			
Метод сингулярного разложения	0,00115	0,00208	0,00341
Модель движения литосферных плит ITRF2020	0,00128	0,00208	0,00345
Модель движения литосферных плит NNR-MORVEL56	0,00247	0,00210	0,00383
Амурская плита			
Метод сингулярного разложения	0,00416	0,00198	0,00272
Модель движения литосферных плит ITRF2020	0,00605	0,00175	0,00252
Модель движения литосферных плит NNR-MORVEL56	0,00503	0,00326	0,00265
Охотская плита			
Метод сингулярного разложения	0,00078	0,00127	0,00161
Модель движения литосферных плит ITRF2020	0,00230	0,00498	0,00157
Модель движения литосферных плит NNR-MORVEL56	0,00464	0,00184	0,00237
Северо-Американская плита			
Метод сингулярного разложения	0,01229	0,00684	0,01899
Модель движения литосферных плит ITRF2020	0,01346	0,00854	0,01942
Модель движения литосферных плит NNR-MORVEL56	0,01264	0,00684	0,01959

Обсуждение

Анализируя данные, представленные в табл. 5, можно заметить, что скорости пунктов, полученные с использованием вычисленных угловых скоростей движения плит ω , ω_X , ω_Y , ω_Z при помощи алгоритма сингулярного разложения, имеют более высокую сходимость с результатами наблюдений, чем скорости, рассчитанные с использованием уже существующих моделей движений плит. Данный алгоритм наиболее эффективен для решения плохо обусловленных глобальных задач на локальной территории, где важными факторами являются площадь, охватываемая пунктами, а также их распределение вокруг полюса Эйлера.

Заключение

В ходе уточнения параметров модели движения земной коры на основе анализа скоростей движения пунктов фундаментальной астрономо-геодезической сети были вычислены параметры угловых скоростей ω , ω_X , ω_Y , ω_Z , а также координаты полюса Эйлера методом наименьших квадратов с использованием алгоритма сингулярного разложения. Полученные результаты свидетельствуют о том, что уточненные параметры имеют более высокую сходимость с данными натурных наблюдений по сравнению с уже существующими реализациями моделей движений литосферных плит и могут быть в дальнейшем использованы для развития координатно-временного обеспечения на территории Российской Федерации.

Благодарности

Исследование выполнено в рамках СЧ НИР «ГЕОТЕХ-КВАНТ-3» с целью повышения точности координатно-временных определений на территории Российской Федерации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дорогова И.Е., Разработка программно-математической модели движений земной коры для территории Российской Федерации // Геодезия и картография. – 2024. – No 7. – С. 2-11. DOI: 10.22389/0016-7126-2024-1009-7-2-1.
2. Press, W. Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing Second Edition / W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery. – Cambridge : University of Cambridge, 1992. – 31 с. – ISBN 0-521-43108-5. – Текст : непосредственный.
3. Центр точных эфемерид RGS Centre. Координаты пунктов ФАГС – Текст : электронный // [сайт]. – URL: <https://rgs.cgkipd.ru/fags-coords>. – (дата обращения : 11.11.2025). – Режим доступа : свободный.
4. Библиотека numpy для Python. NumPy official site – Текст : электронный // [сайт]. – URL: <https://numpy.org>. – (дата обращения : 11.11.2025). – Режим доступа : свободный.
5. Библиотека numpy для Python. Документация по методу `numpy.linalg.svd` – Текст : электронный // [сайт]. – URL: <https://gclnk.com/kZvyrZaD>. – (дата обращения : 11.11.2025). – Режим доступа : свободный.
6. Argus, D. Geologically current motion of 56 plates relative to the no-net-rotation reference frame / D. Argus, R. Gordon, C. DeMets. // American Geophysical Union. – 2011. – Т. 12. – No 11. – 13 с. – DOI 10.1029/2011GC003751. – Текст : непосредственный.
7. MORVEL and NNR-MORVEL56 plate velocity estimates and information – Текст :

электронный // [сайт]. – URL: <https://clck.ru/3QHCU>. – (дата обращения : 11.11.2025). – Режим доступа : свободный.

8. Shuanggen, J. A revision of the parameters of the NNR-NUVEL-1A plate velocity model / J. Shuanggen, Z. Wenya. // *Journal of Geodynamics*. – 2004. – № 38. – С. 85–92. – DOI 10.1016/j.jog.2004.03.004. – Текст : непосредственный.

9. Altamimi, Z. ITRF2008 plate motion model / Z. Altamimi, L. Metivier, X. Collilieux. // *Journal of geophysical research*. – 2012. – № 117. – 14 с. – DOI 10.1029/2011JB008930. – Текст : непосредственный.

10. ITRF2014 plate motion model / Z. Altamimi, L. Metivier, P. Rebischung [и др.] // *Geophysical Journal International*. – 2016. – № 209. – С. 1906–1912. – DOI 10.1093/gji/ggx136. – Текст : непосредственный.

11. ITRF2020 plate motion model / Z. Altamimi, L. Metivier, P. Rebischung [и др.] // *Geophysical Research Letters*. – 2023. – № 50. – 7 с. – DOI 10.1029/2023GL106373. – Текст : непосредственный.

© И. Е. Дорогова, К. А. Демидов, 2026