


На правах рукописи

Дударев Владимир Иванович 

Развитие теории и методов определения пространственных  
координат наземных пунктов по результатам  
траекторных измерений спутников

25.00.32 – Геодезия

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора  
технических наук

Новосибирск – 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий» (СГУГиТ).

Научный консультант – доктор технических наук, профессор  
Карпик Александр Петрович.

Официальные оппоненты:

Мазурова Елена Михайловна, доктор технических наук, профессор,  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», заведующая кафедрой геодезии;

Пимшин Юрий Иванович, доктор технических наук, профессор,  
Волгодонский инженерно-технический институт – филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», профессор кафедры строительных производств;

Толстикова Александр Сергеевич, доктор технических наук, профессор,  
федеральное государственное унитарное предприятие «Сибирский государственный ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский институт метрологии», начальник отдела Государственной службы времени, частоты и определения параметров вращения Земли.

Ведущая организация – федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный научно-технический центр геодезии, картографии и инфраструктуры пространственных данных» (г. Москва).

Защита состоится 9 июня 2016 г. в 12-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.251.02 при ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет геосистем и технологий» по адресу: 630108, Новосибирск, ул. Плахотного, д. 10, ауд. 402.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте СГУГиТ [http:// sgugit.ru/science-and-innovations/dissertation-councils/dissertations/dudarev-vladimir-ivanovich](http://sgugit.ru/science-and-innovations/dissertation-councils/dissertations/dudarev-vladimir-ivanovich).

Автореферат разослан 25 марта 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Середович В. А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

*Актуальность темы исследования.* Растущий интерес человечества к вопросам детального изучения физической поверхности Земли, геодинамических процессов, совершенствование аэрокосмических методов и средств морской, воздушной и наземной навигации, а также необходимость решения целого ряда научных и практических задач потребовали создания новых технологий выполнения геодезических работ и методов оперативной математической обработки результатов измерений, полученных с помощью навигационных спутников и их систем. Высокая точность решения задач космической геодезии возможна только при развитии теории и методов математической обработки больших массивов результатов траекторных измерений спутников для определения необходимых орбитальных и геодезических параметров. В данном исследовании особое внимание уделяется: параметрам движения спутника, параметрам вращения Земли (координатам истинных полюсов Земли и поправке к неравномерной шкале Всемирного времени UT1), элементам взаимного ориентирования (ЭВО) геодезических систем координат, пространственным координатам наземных пунктов (НП), под которыми понимаются точки различного назначения, расположенные как на земной и водной поверхности, так и в воздушном пространстве.

Современная спутниковая радиотехническая аппаратура позволяет измерять длину траектории распространения электромагнитного колебания от космического аппарата (КА) до НП с точностью до 0,01 длины волны. Это дает возможность гарантированно определять орбитальные и геодезические параметры по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников с высокой точностью при различной геометрии относительного расположения КА и НП. Чтобы решать с такой высокой точностью поставленную задачу, требуются адекватные этим измерениям математические модели и соответствующие им уравнения поправок. Для этого требуется развивать теорию и методы, связанные с учетом влияния на результаты измерений атмосферы Земли, особенностей работы приемной и передающей радиотехнической спутниковой ап-

паратуры и других физических эффектов; разработкой оптимальных математических алгоритмов формирования матриц коэффициентов и вектора правой части уравнений поправок; оценкой влияния изменения гравитационного поля Земли на движение КА.

Существующие математические методы уравнивания плановых и высотных геодезических сетей, созданных посредством выполненных относительных ГНСС-измерений, используют не все потенциальные возможности геодезических навигационных спутниковых систем типа ГЛОНАСС, НАВСТАР и др. Поэтому развитие теории и методов определения координат одного или нескольких НП при использовании различных пространственных геодезических построений на основе относительных ГНСС-измерений имеет важное научное значение.

*Степень разработанности темы.* За предыдущие годы накоплен достаточно большой опыт и объем знаний в области определения орбитальных и геодезических параметров по результатам траекторных измерений спутников. Весомый вклад в развитие этого направления внесен научными сотрудниками Центрального научно-исследовательского института геодезии, аэрофотосъемки и картографии (ЦНИИГАиК); Научно-исследовательского института Военно-топографической службы (НИИ ВТС); Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК); Акционерного общества «Информационные спутниковые системы» им. академика М. Ф. Решетнева»; Сибирского государственного университета геосистем и технологий (СГУГиТ), Института астрономии РАН (Астрономический Совет АН СССР); Государственного астрономического института им. П. К. Штенберга и целого ряда других организаций. Значительный вклад в решение научных и практических задач космической геодезии привнесли советские, российские и зарубежные ученые, в том числе: Бартенев В. А., Бурша М., Вейс Г., Головенкин Е. Н., Гречкосеев А.К., Дубошин Г. Н., Жданюк Б. Ф., Изотов А. А., Каула У., Тестоедов Н. А., Толстикова А. С., Урмаев М. С., Эльясберг П. Е. и др.

Для обработки результатов наблюдений спутников отечественными и зарубежными исследователями разработан ряд математических моделей радио-

технических траекторных измерений. При анализе этих моделей было выявлено их несоответствие возросшему за последние годы уровню точности измерений, выполняемых современной спутниковой аппаратурой. По этой причине возникла потребность в создании более совершенных математических моделей, учитывающих влияние на результаты измерений как внешних, так и внутренних факторов, обусловленных атмосферой Земли, спецификой работы приемной и передающей спутниковой радиотехнической аппаратуры, особенностями движения КА по орбите и др. Разработка более точных моделей траекторных измерений обусловила и разработку соответствующих им уравнений поправок, которые должны обеспечивать надежную оценку определяемых параметров.

Теоретическим разработкам в области математической постановки решения задачи оценивания посвящены работы Брандина В. Н., Бровара Б. В., Жданюка Б. Ф., Разоренова Г. Н., Кафтана В. И., Онькова И. В., Эльясберга П. Е. и ряда других авторов. Повышение точности и увеличение видов траекторных измерений спутников, рост количества определяемых параметров требует постоянного совершенствования математических алгоритмов обработки результатов измерений, что вызывает необходимость в дальнейшем развитии и совершенствовании математической постановки решения задачи оценивания.

В вопросах развития и уравнивания геодезических сетей с использованием ГНСС-технологий накоплен значительный опыт. Решению таких задач посвящены работы российских ученых: Антоновича К. М., Бойко Е. Г., Герасимова А. П., Годжаманова М. Г., Шанурова Г. А. и др. Особого внимания заслуживает работа Маркузе Ю. И. и Welsh W. M., в которой представлена система линейных уравнений поправок для уравнивания геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений. Для обработки ГНСС-измерений используются программные комплексы, например: «GPSurvey», «Trimble Geomatics Office», «Ski» и др. Однако, в руководствах по их применению не приводится описание математических алгоритмов обработки этих измерений, что существенно усложняет осмысление получаемых с их помощью результатов. Кроме

этого, подобные зарубежные программные продукты не позволяют активно влиять на ход вычислительного процесса. Универсальный и оптимальный математический алгоритм решения рассматриваемой задачи, по-видимому, создать невозможно, так как он будет слабо учитывать особенности отдельно поставленной задачи. Поэтому существует потребность в разработке математических алгоритмов, позволяющих эффективно решать конкретные задачи с учетом их специфики. К ним относятся задачи по определению координат как одного или двух, так и нескольких наземных пунктов в системе координат исходных геодезических пунктов, элементов взаимного ориентирования, по созданию геодезических сетей – сплошных, протяженных, высотных и других.

*Цели и задачи исследования.* Целью исследования является развитие теории и методов гарантированного определения по результатам современных беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников пространственных координат наземных пунктов и орбитальных параметров с точностью, соответствующей точности современных спутниковых радиотехнических систем (РТС).

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие основные задачи:

- систематизировать и развить теоретическое обоснование регулярной постановки задачи оценивания геодезических параметров по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений КА;

- разработать теорию формирования нелинейных математических моделей беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников, отвечающих современному уровню точности;

- разработать уравнения поправок для обработки результатов беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников;

- развить теорию и методику учета влияния атмосферной рефракции на результаты радиотехнических траекторных измерений спутников;

- разработать теорию оценки влияния изменения гравитационного поля Земли (ГПЗ) на движение спутника по орбите;
- развить теоретические положения и выполнить экспериментальные исследования для выявления такой геометрии взаимного расположения КА и НП, при которой по выполненным радиотехническим траекторным измерениям определяются не все оцениваемые параметры;
- развить теорию уравнивания и методы построения различных геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений.

*Научная новизна:*

- разработанные нелинейные математические модели и уравнения поправок для обработки результатов беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников позволяют получать оценки заданного набора определяемых орбитальных, геодезических и геодинамических параметров при различной геометрии взаимного расположения КА и НП с точностью, соответствующей точности выполняемых измерений;
- определены качественные и количественные условия наблюдаемости в измерительной задаче, что повышает надежность и точность определения заданного набора оцениваемых параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников;
- предложенные методы построения и уравнивания различных геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений уменьшают время и производственные затраты на выполнение топографо-геодезических работ.

*Теоретическая и практическая значимость работы.* Разработанные в диссертации теоретические и методические положения позволяют оптимизировать решение измерительной задачи, связанной с определением орбитальных параметров и пространственных координат геодезических пунктов.

Полученные аналитические выражения доведены до практического использования и предназначены для решения фундаментальных и прикладных задач геодезии, космической геодезии, геодинамики и точной навигации.

Результаты исследований предлагается использовать для координатно-временного обеспечения целого ряда задач народно-хозяйственного и оборонного назначения. К ним относятся: изучение топографии земной поверхности и геодинамических процессов, поиск и освоение полезных ископаемых, геодезическое обеспечение строительства различных инженерных сооружений, определение параметров движения КА. Результаты исследований позволяют повысить эффективность проведения производственных работ и существенно снизить затраты на их выполнение.

*Методология и методы исследования* основаны на системном анализе, теории и математических методах изучения поведения нелинейных динамических систем, теоретических исследованиях в области космической геодезии и баллистики, небесной механики и астродинамики, астрометрии, теории фигуры и физики атмосферы Земли. Решение поставленных задач базировалось на использовании математического моделирования, анализа и синтеза, сравнения, обобщений и оценок с привлечением методов интегрального и дифференциального исчисления, численных методов линейной алгебры, теории математической обработки и интерпретации результатов геодезических измерений.

*Положения, выносимые на защиту:*

– результаты теоретических разработок в области формирования нелинейных и линеаризованных математических моделей радиотехнических траекторных измерений спутников, отвечающих уровню точности современных РТС, повышают степень состоятельности оценок определяемых параметров;

– теория расчета различия между длиной траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли и прямой наклонной дальностью до спутника повышает степень адекватности математических моделей радиотехнических траекторных измерений спутников;

– теория учета влияния изменения гравитационного поля Земли на движение спутника по орбите обеспечивает существенное преимущество перед чис-

ленным методом по эффективности, быстрдействию машинных алгоритмов и надежности получаемых результатов;

– теоретические и экспериментальные исследования условий наблюдаемости орбитальных и геодезических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутника повышают степень регулярной постановки измерительной задачи и способствуют созданию оптимальных алгоритмов ее решения;

– теоретические разработки методов уравнивания и развития различных геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений существенно повышают эффективность использования ГНСС-измерений и понижают производственные затраты при проведении геодезических работ.

*Степень достоверности и апробация результатов.* Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались, обсуждались и получили одобрение на Всесоюзном научно-организационном совещании ИТА АН СССР (г. Ленинград, 1990 г.); IX Съезде ВАГО (г. Новосибирск, 1990 г.); XLII и XLIII научно-технических конференциях преподавателей НИИГАиК (г. Новосибирск, 1993, 1994 гг.); XLIV научно-технической конференции с международным участием (г. Новосибирск, 1994 г.); XLV–XLVIII научно-технических конференциях преподавателей СГГА (г. Новосибирск, 1995–1998 гг.); Третьем Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98) (г. Новосибирск, 1998 г.); Международной научно-технической конференции, посвященной 220-летию МИИГАиК (г. Москва, 1999 г.); L научно-технической конференции преподавателей СГГА (г. Новосибирск, 2000 г.); Четвертом Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000) (г. Новосибирск, 2000 г.); LI научно-технической конференции преподавателей СГГА, посвященной памяти академика В. В. Бузука (г. Новосибирск, 2001 г.); LIII Международной научно-технической конференции, посвященной 70-летию СГГА (г. Новосибирск, 2003 г.); LIV научно-технической конференции, посвященной 225-летию геодезического образования в России (г. Новосибирск, 2004 г.);

Международной научно-технической конференции, посвященной 225-летию МИИГАиК (г. Москва, 2004 г.); 2-й Региональной научно-практической конференции (г. Иркутск, 2006 г.); Международных научных конгрессах «ГЕО-Сибирь» (г. Новосибирск, 2006–2008 гг., 2010–2012 гг.).

Работа выполнялась в рамках госбюджетной научно-исследовательской работы (НИР) «Анализ и разработка алгоритмов оценивания геодезических и геодинамических параметров по результатам траекторных наблюдений ИСЗ» (1992–1996 гг.), фундаментальной НИР № ГР 0186.0036274 «Разработка методов изучения динамики гравитационного поля и фигуры Земли планетарного, регионального и локального характера» (1995 г.) по комплексной научно-технической программе «Человек и окружающая среда», фундаментальной НИР № ГР 0196.0005075 Грант Госкомвуза РФ «Исследование динамической составляющей гравитационного потенциала Земли и его характеристик, построение их математических моделей» (1996 г.), хоздоговорной НИР № 4.30.392 «Обследование приаэродромной территории, определение координат и высот препятствий» (2001 г.), госбюджетной НИР № 6.30.194 «Развитие локальных и региональных геодезических сетей с использованием результатов спутниковых траекторных измерений» (2002–2006 гг.), фундаментальной НИР № ГР 012008.03158 «Разработка теории и методов определения геодезических и геодинамических параметров по результатам спутниковых радиотехнических траекторных измерений» (2008–2010 гг.) по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие вузовского потенциала высшей школы России на 2009–2012 гг.», фундаментальной НИР № ГР 01201151296 «Исследование и разработка теории и методов оценки состояния нелинейных динамических систем по результатам траекторных измерений космических аппаратов» (2011 г.) по аналитической ведомственной целевой программе «Развитие вузовского потенциала высшей школы России на 2009–2012 гг.», фундаментальной НИР № ГР 01201252771 государственного задания Министерства образования и науки РФ «Теория и методы обработки радиотехнических траекторных измерений космических аппаратов» (2012 г.).

Разработки автора нашли применение при выполнении производственных работ, связанных с развитием геодезических сетей и проведением топографических съемок участков земной поверхности с использованием ГНСС-технологий, в ряде регионов России.

Результаты выполненных исследований внедрены в экспедицию № 171 Ноябрьского филиала ФГУП «ЗапсибАГП», в ФГУП Кузбасское топографо-маркшейдерское предприятие «КУЗБАССМАРКШЕЙДЕРИЯ», в учебный процесс СГУГиТ.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении представлены актуальность темы исследования и степень ее разработанности, обоснованы цель и задачи, объект и предмет исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, раскрыта методология и методы исследования, приведены основные положения диссертации, выносимые на защиту, отражены степень достоверности и апробация результатов исследования.

В первом разделе «Теория оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем» представлена математическая постановка задачи оценивания орбитальных и геодезических параметров по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений КА, основанная на постановке задачи оценивания состояния нелинейных динамических систем. Рассмотрены системы элементов орбиты КА, шкалы времени, системы координат и их преобразования, используемые в диссертационном исследовании. Приведен вывод фундаментальной матрицы и рассмотрен математический алгоритм оценки влияния изменения ГПЗ на движение КА.

Движение КА происходит под влиянием целого ряда возмущений. Среди них значительную долю составляет ГПЗ, которое меняется из-за различных природных и техногенных явлений. Например, проведенные В. В. Бузуком исследования показали, что изменение масс крупных водохранилищ и озер меня-

ет коэффициенты низких гармоник модели ГПЗ уже в третьей значащей цифре. В работе разработан математический алгоритм, позволяющий определить влияние изменения коэффициентов модели ГПЗ на движение КА.

Оскулирующие кеплеровы элементы  $\mathcal{E}$  орбиты спутника на текущий момент времени  $t$  можно определить выражением

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}_0 \cdot dt + \int_{t_0}^t \mathbf{B} \cdot dt, \quad (1)$$

где  $\mathcal{E}_0$  – вектор начальных условий движения КА на начальный момент  $t_0$ ;

$\mathbf{A}_0$  – вектор правой части системы дифференциальных уравнений движения Ньютона – Лагранжа для кеплеровых элементов орбиты КА, полученных в стационарном ГПЗ;

$\mathbf{B}$  – вектор-столбец изменений правых частей уравнений движения, обусловленных изменением ГПЗ (или ошибками его представления).

В выражении (1) второе слагаемое отражает возмущения элементов орбиты, вызванные влиянием стационарного ГПЗ, третье – возмущения элементов орбиты, вызванные изменением коэффициентов  $\Delta \mathbf{G} = [\Delta C_{00} \Delta S_{00} \dots \Delta C_{nm} \Delta S_{nm}]^T$  модели ГПЗ (либо ошибками ее представления). Матрица  $\mathbf{B}$  определяется из равенства

$$\mathbf{B} = r^{-1} \cdot \sqrt{p \cdot \mu} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{G}, \quad (2)$$

где  $r$  – геоцентрическое расстояние КА;

$p$  – фокальный параметр;

$\mathbf{P}$  – матрица преобразования координат из общеземной системы в звездную.

Матрицы-сомножители в выражении (2) имеют вид:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \cdot a^2 \cdot e \cdot p^{-1} \cdot \sin v & 2 \cdot a^2 \cdot r^{-1} & 0 \\ \sin v & \cos v + (\cos v + e) \cdot r \cdot p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r \cdot p^{-1} \cdot \cos u \\ 0 & 0 & r \cdot p^{-1} \cdot \sin u \cdot \sin^{-1} i \\ -e^{-1} \cdot \cos v & e^{-1} \cdot \sin v \cdot (1 + r \cdot p^{-1}) & -r \cdot p^{-1} \cdot \sin u \cdot \operatorname{ctg} i \\ e^{-1} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (\cos v + 2 \cdot e \cdot r \cdot p^{-1}) & -e^{-1} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (1 + r \cdot p^{-1}) \cdot \sin v & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i & \cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i & \sin u \cdot \sin i \\ -\sin u \cdot \cos \Omega - \cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i & -\sin u \cdot \sin \Omega + \cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i & \cos u \cdot \sin i \\ \sin \Omega \cdot \sin i & -\cos \Omega \cdot \sin i & \cos i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{O}^T = r^{-1} \begin{bmatrix} x_G & -r^{-1} \cdot x_G \cdot \operatorname{tg} \varphi & -r^{-1} \cdot y_G \cdot \cos^2 \varphi \\ y_G & -r^{-1} \cdot y_G \cdot \operatorname{tg} \varphi & r^{-1} \cdot x_G \cdot \cos^2 \varphi \\ z_G & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{(n+1)}{r} \cdot \left(\frac{R_\ominus}{r}\right)^n \cdot \cos m \cdot \lambda \cdot P_{nm}(\sin \varphi) & -\frac{(n+1)}{r} \cdot \left(\frac{R_\ominus}{r}\right)^n \cdot \sin m \cdot \lambda \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \\ \left(\frac{R_\ominus}{r}\right)^n \cdot \cos m \cdot \lambda \cdot \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} & \left(\frac{R_\ominus}{r}\right)^n \cdot \sin m \cdot \lambda \cdot \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} \\ -\left(\frac{R_\ominus}{r}\right)^n \cdot m \cdot \sin m \cdot \lambda \cdot P_{nm}(\sin \varphi) & \left(\frac{R_\ominus}{r}\right)^n \cdot m \cdot \cos m \cdot \lambda \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \end{bmatrix},$$

где  $x_G, y_G, z_G$  – прямоугольные координаты КА в общеземной системе;

$a, e$  – большая полуось и эксцентриситет орбиты спутника;

$v, u$  – истинная аномалия и аргумент широты спутника;

$i$  – наклонение орбиты;

$R_\ominus$  – средний экваториальный радиус Земли;

$P_{nm}(\sin \varphi)$  – функции Лежандра;

$\varphi, \lambda$  – геоцентрические широта и долгота КА.

Матрица  $\mathbf{L}$  всегда имеет три строки, а число ее столбцов определяется размером матрицы  $\Delta \mathbf{G}$ .

Рассмотренный метод оценки влияния изменения ГПЗ на движение КА предпочтительнее численного из-за своей простоты, быстродействия и наличия конечного числа операций. Он позволяет оперативно оценивать влияние на орбитальное движение КА от одного до нескольких коэффициентов ГПЗ. Численный метод отличается большей трудоемкостью потому, что для решения задачи требуется высокая точность интегрирования дифференциальных уравнений движения. Для расчета третьего слагаемого в выражении (1) можно применять простые численные методы интегрирования (вплоть до аналитического по невозмущенной орбите), так как вычисления выполняются с числами, имеющими всего от двух до трех значащих цифр.

Во втором разделе «Математические модели и уравнения поправок для обработки результатов радиотехнических траекторных измерений космических аппаратов» выполнен анализ математических моделей радиотехнических измерений, систематизировано и развито теоретическое обоснование учета тропосферной и ионосферной рефракции в спутниковых радиотехнических измерениях. Представлено теоретическое обоснование формирования математических моделей беззапросных импульсных и фазовых радиодальномерных, а также интегральных (в шкалах времени КА и НП) и дифференциальных доплеровских траекторных измерений. Детально изложена последовательность вывода уравнений поправок, соответствующих этим моделям измерений.

В доплеровском методе приемником непосредственно измеряется число колебаний разностной частоты  $f_G - f_R$ , образованной смещением частоты  $f_R$  принятого сигнала и частоты  $f_G$  колебаний генератора приемника. Частота  $f_G$  обычно несколько больше частоты  $f_S$  радионавигационного сигнала КА на величину частоты подставки  $\Phi = f_G - f_S$ , которая всегда положительна. Вследствие взаимного перемещения передатчика и приемника в пространстве (а также влияния атмосферной рефракции, абберационных и прочих эффектов) частота  $f_R$  будет отличаться от частоты  $f_S$  на величину доплеровского сдвига.

Существуют два вида доплеровских измерений – дифференциальный и интегральный. В первом случае приемником НП измеряется доплеровский сдвиг частоты, во втором – число колебаний  $N_{ij}$  разностной частоты за строго определенный интервал времени. В интегральном методе значение  $N_{ij}$  может быть отнесено либо к интервалу времени  $T_S = [t_{\Gamma i}, t_{\Gamma j}]$  в спутниковой системе времени (ССВ), либо к интервалу  $T_G = [\tau_i, \tau_j]$  в локальной системе времени (ЛСВ). Длительность интервала  $T_S$  определяется разностью двух последовательных моментов  $t_{\Gamma i}$  и  $t_{\Gamma j}$  генерации временной метки аппаратурой КА. Длительность интервала  $T_G$  определяется разностью двух последовательных моментов  $\tau_i$  и  $\tau_j$  приема метки времени и с высокой точностью измеряется часами приемника. Если точно известны моменты  $\tau_i$  и  $\tau_j$ , то обработку измерений следует выполнять в ЛСВ, если же точно известны моменты  $t_{\Gamma i}$  и  $t_{\Gamma j}$  – то в ССВ. Вторичным измеряемым параметром в дифференциальном методе является лучевая псевдоскорость  $(V(\tau) + \Delta_V)$  по линии НП – КА, в интегральном – разности псевдодальностей  $(\delta\rho_G + \Delta_G)$  в ЛСВ и  $(\delta\rho_S + \Delta_S)$  в ССВ между НП и КА.

Для рассматриваемых видов измерений разработаны математические модели. В них для дифференциальных доплеровских измерений моделируется значение разностной частоты, в случае интегральных – число циклов  $N_{ij}^G$  в ЛСВ и  $N_{ij}^S$  в ССВ разностной частоты. Модели измерений имеют вид:

$$N_{ij}^G = T_G \cdot \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot (\delta\rho_G + \Delta_G), \quad (3)$$

$$N_{ij}^S = T_S \cdot \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_G^0 \cdot (\delta\rho_S + \Delta_S), \quad (4)$$

$$f_G - f_R = \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot (V(\tau) + \Delta_V), \quad (5)$$

где  $f_s^0$  и  $f_G^0$  – номинальные значения частот колебаний опорных генераторов передатчика и приемника соответственно;

$\Phi^0$  – номинальное значение частоты подставки;

$C$  – скорость света в вакууме.

В формулах (3) – (5) сингулярные ошибки (медленно изменяющиеся со временем систематические ошибки)  $\Delta_G$  и  $\Delta_S$  измеряемых разностей псевдодальностей и  $\Delta_V$  лучевой псевдоскорости обусловлены нестабильностью работы опорных генераторов приемника и передатчика, изменением условий прохождения электромагнитных волн в атмосфере Земли, абберационным и релятивистским эффектами, внутренними временными задержками приемной и передающей аппаратуры.

Эти ошибки определяются из выражений:

$$\begin{aligned} \Delta_G = & (\delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((\tau_i + \tau_j) / 2 - \tau_0)) \cdot T_G \cdot C / f_S^0 + \Delta\rho + (1 + K_T) \cdot TR + IR_G + \delta\rho_{AB}^G + \delta\rho_{АП} + \\ & + \delta\rho_p - (m_j \cdot V(\tau_j) - m_i \cdot V(\tau_i)) \cdot \delta\tau - (\delta\Phi - \Phi^0 \cdot \delta f_G / f_G^0) \cdot (m_j \cdot \dot{\gamma}(\tau_j) \cdot (\tau_j - \tau_0) - \\ & - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0)) / f_S^0 + \delta f_S / f_S^0 \cdot \delta\rho_G, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_S = & 2 \cdot (\delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((t_{Tj} + t_{Ti}) / 2 - t_0)) \cdot T_S \cdot C / f_G^0 + \Delta\rho + (1 + K_T) \cdot TR + IR_S + \delta\rho_{AB}^S + \\ & + (n_j \cdot V(t_{Tj}) - n_i \cdot V(t_{Ti})) \cdot \delta t_s - (\delta\Phi - \Phi^0 \cdot \delta f_S / f_S^0) \cdot (n_j \cdot \dot{\beta}(t_{Tj}) \cdot (t_{Tj} - t_0) - \\ & - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{Ti}) \cdot (t_{Ti} - t_0)) / f_G^0 + \delta\rho_S \cdot \delta f_G / f_G^0 - C / f_G^0 \cdot \delta f_S / f_S^0 \cdot \Phi^0 \cdot T_S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_V = & (\delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot (\tau - \tau_0)) \cdot C / f_S^0 + \Delta V + (1 + K_T) \cdot \delta V_{TR} + \delta V_{IR} + \delta V_{AB} + \delta V_{АП} + \delta V_p - \\ & - \ddot{\gamma}(\tau) \cdot \delta\tau + V(\tau) \cdot \delta f_S / f_S^0 - (\dot{\gamma}(\tau) + \ddot{\gamma}(\tau) \cdot (\tau - \tau_0)) \cdot \delta\Phi / f_S^0, \end{aligned}$$

где  $\delta\Phi, \dot{\Phi}$  – уход и скорость ухода частоты подставки;

$\tau_0, t_0$  – в ЛСВ и ССВ моменты синхронизации часов приемника по первой временной метке в прохождении КА в зоне видимости НП;

$\Delta\rho$  и  $\Delta V$  – поправки в разность дальностей и лучевую скорость, обусловленные кривизной траектории радиосигнала в тропосфере;

$K_T$  – масштабный множитель, учитывающий погрешности моделей тропосферной рефракции;

$TR$  и  $\delta V_{TR}$  – тропосферные поправки в разность дальностей и лучевую скорость;

$IR$  и  $\delta V_{IR}$  – ионосферные поправки в разность дальностей и лучевую скорость;

$\delta f_G, \delta f_S$  – уходы частот опорных генераторов приемника и передатчика;

$\dot{f}_G, \dot{f}_S$  – скорости уходов частот опорных генераторов приемника и передатчика;

$\delta\tau, \delta t_S$  – внутренние временные задержки приемника и передатчика;

$$V(\tau) = \rho^{-1}(\tau) \cdot \dot{\rho}(\tau) \cdot \rho(\tau)$$

– лучевая скорость КА (проекция вектора  $\dot{\rho}(\tau)$  топоцентрической скорости КА на его топоцентрический радиус-вектор  $\rho(\tau)$  в момент времени  $\tau$ );

$$\delta\rho_G = \rho(\tau_j) - \rho(\tau_i), \quad \delta\rho_S = \rho(t_{Tj}) - \rho(t_{Ti})$$

– разности топоцентрических дальностей до КА;

$$\delta\rho_{AB}^G = -C^{-1} \cdot (\dot{\gamma}(\tau_j) \cdot \rho(\tau_j) - \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot \rho(\tau_i)), \quad \delta\rho_{AB}^S = -C^{-1} \cdot (\dot{\beta}(t_{Tj}) \cdot \rho(t_{Tj}) - \dot{\beta}(t_{Ti}) \cdot \rho(t_{Ti})),$$

$$\delta V_{AB} = -C^{-1} \cdot (\ddot{\gamma}(\tau) \cdot \rho(\tau) + \dot{\gamma}(\tau) \cdot V(\tau))$$

– поправки за абберационный эффект;

$$\delta\rho_{\text{АП}} = -C^{-1} \cdot (V(\tau_i) \cdot V(\tau_j) + \frac{1}{3} \cdot (V(\tau_j) - V(\tau_i))^2) \cdot T_G, \quad \delta V_{\text{АП}} = -C^{-1} \cdot V^2(\tau)$$

– поправки за аппроксимацию;

$$\dot{\gamma}(\tau) = \rho^{-1}(\tau) \cdot \rho^T(\tau) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\tau), \quad \dot{\beta}(t_\Gamma) = \rho^{-1}(t_\Gamma) \cdot \rho^T(t_\Gamma) \cdot \dot{\mathbf{R}}(t_\Gamma)$$

– проекции векторов геоцентрической скорости  $\dot{\mathbf{r}}(\tau)$  КА и  $\dot{\mathbf{R}}(t_\Gamma)$  НП на топоцентрический радиус-вектор  $\rho$  спутника в моменты  $\tau$  и  $t_\Gamma$ ;

$$m = 1 - \dot{\gamma}(\tau)/C, \quad n = 1 - \dot{\beta}(t_\Gamma)/C$$

– масштабирующие коэффициенты;

$$\ddot{\gamma}(\tau) = \rho^{-1}(\tau) \cdot (-V(\tau) \cdot \dot{\gamma}(\tau) + \ddot{\mathbf{r}}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau) + \dot{\mathbf{r}}(\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau))$$

– ускорение КА, движущегося относительно неподвижного НП ( $\ddot{\mathbf{r}}(\tau)$  – вектор геоцентрического ускорения КА в момент  $\tau$ ).

Поправки за релятивистский эффект рассчитываются по формулам

$$\delta\rho_p = C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2 / 2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) \cdot T_G, \quad \delta V_p = C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2(\tau) / 2 - \mu \cdot (R^{-1}(\tau) - r^{-1}(\tau))),$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли;

$R, r$  – геоцентрические расстояния до НП и КА;

$\dot{\rho}$  – топоцентрическая скорость КА.

Величины  $\dot{\rho}$ ,  $R$  и  $r$  вычисляются на средний момент интервала  $T_G$ , то есть на момент  $0,5 \cdot (\tau_i + \tau_j)$ .

Абсолютная ошибка представленных моделей интегральных доплеровских измерений не превышает 0,01 цикла, дифференциальных – 0,003 Гц (без учета поправок за рефракцию и релятивистский эффект).

В математических моделях импульсных и фазовых радиодальномерных траекторных измерениях КА моделируется промежуток времени  $(\tau - t_T)$  между моментом  $\tau$  приема радиоимпульса в ЛСВ и моментом  $t_T$  генерации в ССВ опорного импульса, а также разность фаз  $\Delta\varphi(\tau) = \varphi_S(t_T) - \varphi_G(\tau)$ , одна из которых – фаза образованных в момент генерации колебаний, модулирующих несущий радионавигационный сигнал частоты  $f_S$ , а другая – фаза в момент  $\tau$  колебаний, модулирующих сигнал с частотой  $f_G$  опорного генератора приемника. Вторичными измеряемыми параметрами здесь являются псевдодальности  $\rho_\tau(\tau) + \Delta_\tau$  и  $\rho_\varphi(\tau) + \Delta_\varphi$  до КА. Модели измерений имеют вид:

$$\tau - t_T = C^{-1} \cdot (\rho_\tau(\tau) + \Delta_\tau), \quad (6)$$

$$\Delta\varphi(\tau) = -K \cdot C^{-1} \cdot f_S^0 \cdot (\rho_\varphi(\tau) + \Delta_\varphi), \quad (7)$$

где  $K = f_s^M/f_s$  – отношение частот модулирующего  $f_s^M$  и несущего  $f_s$  колебаний электромагнитных сигналов.

Для модели фазовых измерений при  $K = 1$  будет получена математическая модель так называемых фазовых траекторных измерений спутников, при  $K < 1$  – дальномерных (кодовых).

Сингулярные ошибки  $\Delta_\tau$  и  $\Delta_\varphi$  измеряемых наклонных дальностей  $\rho(\tau)$  определяются из выражений:

$$\Delta_\tau = -\rho_\tau(\tau) \cdot C^{-1} \cdot \dot{\gamma}(\tau) + \delta\rho + (1 + K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR} + C \cdot (m \cdot \delta\tau_c + \delta\tau + \delta t_p) - \\ - V(\tau) \cdot m \cdot \delta\tau_G + C^{-1} \cdot \dot{\gamma}^2(\tau) \cdot \delta\tau_c,$$

$$\Delta_\varphi = \Delta_\tau + \rho_\varphi(\tau) \cdot \delta f_s / f_s^0,$$

где  $\delta\rho_{TR}$  и  $\delta\rho_{IR}$  – тропосферная и ионосферная поправки;

$\delta\rho$  – поправка за кривизну траектории распространения радиосигнала в тропосфере;

$\delta\tau_G$  – внутренняя временная задержка приемника;

$\delta\tau = \delta\tau_G + \delta\tau_g$  – временная задержка, обусловленная внутренней временной задержкой  $\delta\tau_G$  сигнала в приемнике и промежутком времени  $\delta\tau_g$  декодирования временной метки.

Временная задержка  $\delta\tau_c$  обусловлена нестабильностью работы опорных генераторов приемника и передатчика и находится по формуле

$$\delta\tau_c = (\delta f_G / f_G^0 - \delta f_s / f_s^0) \cdot (\tau - \tau_0) + (\dot{f}_G / f_G^0 - \dot{f}_s / f_s^0) \cdot (\tau - \tau_0)^2 / 2.$$

В некоторых радиотехнических системах частоты  $f_G^0$  и  $f_s^0$  совпадают. Тогда задержка  $\delta\tau_c$  может быть определена как

$$\delta\tau_c = (\tau - \tau_0) \cdot (\delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot (\tau - \tau_0) / 2) / f_G^0.$$

Поправка за релятивистский эффект рассчитывается по формуле

$$\delta t_p = C^{-2} \cdot (\dot{\rho}^2(\tau) / 2 - \mu \cdot (R^{-1}(\tau) - r^{-1}(\tau))).$$

Абсолютная ошибка представленных моделей не превышает 0,01 длины волны несущего колебания (без учета поправок за рефракцию и релятивистский эффект).

Все представленные модели получены при условии совпадения фазового центра передающей антенны и центра массы КА. Они могут в различной степени упрощаться в зависимости от точности решения поставленной задачи.

Состояние рассматриваемой нелинейной динамической системы на текущий момент времени  $t$  характеризуется вектором параметров состояния этой системы  $\mathbf{q} = [\mathbf{Y}_1 \dots \mathbf{Y}_g \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{R}}_1 \dots \mathbf{R}_l \dot{\mathbf{R}}_l d\mathbf{R} \boldsymbol{\omega} k \Theta]^T$ . В нем  $\mathbf{Y}_g$  – шестимерный вектор-столбец элементов орбиты КА ( $g$  – число КА),  $\mathbf{R}_j, \dot{\mathbf{R}}_j$  – трехмерные векторы-столбцы прямоугольных координат положения и скорости НП в звездной системе координат ( $l$  – число НП),  $d\mathbf{R} = [dX dY dZ]^T$  – вектор-столбец смещения начала референцной системы координат относительно начала общеземной системы,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \omega_y \omega_z]^T$  – вектор-столбец малых углов поворота координатных осей референцной системы координат относительно осей общеземной системы,  $k$  – поправка к масштабу референцной системы координат,  $\Theta = [x_p y_p UT]^T$  – вектор-столбец ПВЗ, состоящий из плоских прямоугольных координат  $x_p$  и  $y_p$  мгновенного полюса Земли и поправки  $UT$  к неравномерной шкале Всемирного времени  $UT1$ . Величины  $x_p, y_p$  и  $UT$  могут быть аппроксимированы на отрезке времени  $[t_0, t]$  степенным полиномом с аргументом  $\Delta t = t - t_0$  в шкале  $RT$ :

$$x_p = \sum_{k=0}^{L1} x_k \cdot \Delta t^k, \quad y_p = \sum_{k=0}^{L1} y_k \cdot \Delta t^k, \quad UT = \sum_{k=0}^{L1} UT_k \cdot \Delta t^k, \quad (8)$$

где  $x_k, y_k, UT_k$  – коэффициенты полиномов;

$L$  и  $L1$  – порядки полиномов.

Начальное состояние изучаемой динамической системы на некоторый момент  $t_0$  характеризуется расширенным вектором параметров состояния. Этот вектор составляют: шестимерный вектор-столбец  $\mathbf{Y}_0$  элементов орбиты КА на

момент  $t_0$ ; трехмерные векторы-столбцы  $\mathbf{R}_G$  прямоугольных координат НП в общеземной системе; векторы  $d\mathbf{R}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ; поправка к масштабу  $k$ ; вектор-столбец  $\boldsymbol{\Theta}_0 = [x_0 \dots x_{L1} \ y_0 \dots y_{L1} \ UT_0 \dots UT_{L1}]^T$  параметров кинематических моделей (8) изменения ПВЗ; пятимерный вектор-столбец  $\boldsymbol{\Gamma} = [\delta\Phi \ \dot{\Phi} \ K_T \ \delta\tau \ \delta f_s]^T$  мешающих параметров, компоненты которого независимы между собой. Для определения расширенного вектора параметров состояния получены уравнения поправок:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_V \cdot \Delta\boldsymbol{\Gamma} + \rho^{-1}(\tau) \cdot ([\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - \mathbf{V}(\tau)]^T \cdot \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \boldsymbol{\Phi}_2) \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - \rho^{-1}(\tau) \cdot ([\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - \mathbf{V}(\tau)]^T \cdot \mathbf{P} + \\ + \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \dot{\mathbf{P}}) \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \rho^{-1}(\tau) \cdot ([\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - \mathbf{V}(\tau)]^T \cdot \mathbf{M} + \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \dot{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta\boldsymbol{\Theta}_0 = f^V + V_V \end{aligned}$$

– для дифференциальных доплеровских измерений;

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_G \cdot \Delta\boldsymbol{\Gamma} + ((\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}_1)_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}_1)_{\tau_i}) \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - ((\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{P})_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{P})_{\tau_i}) \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \\ - ((\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K})_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K})_{\tau_i}) \cdot \Delta\boldsymbol{\Theta}_0 = f^G + V_G \end{aligned}$$

– для интегральных доплеровских измерений в ЛСВ;

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_S \cdot \Delta\boldsymbol{\Gamma} + ((\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}_1)_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}_1)_{\tau_i}) \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - ((\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{P})_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{P})_{\tau_i}) \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \\ - ((\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K})_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K})_{\tau_i}) \cdot \Delta\boldsymbol{\Theta}_0 = f^S + V_S \end{aligned}$$

– для интегральных доплеровских измерений в ССВ;

$$\mathbf{E}_\tau \cdot \Delta\boldsymbol{\Gamma} + \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot (\boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - \mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \mathbf{M} \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta\boldsymbol{\Theta}_0) = f^\tau + V_\tau$$

– для беззапросных импульсных радиодальномерных измерений;

$$\mathbf{E}_\varphi \cdot \Delta\boldsymbol{\Gamma} + \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot (\boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - \mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \mathbf{M} \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta\boldsymbol{\Theta}_0) = f^\varphi + V_\varphi$$

– для беззапросных фазовых радиодальномерных измерений.

В этих уравнениях поправок обозначено:  $\mathbf{V}(\tau)$  – вектор лучевой скорости КА;  $\Delta\boldsymbol{\Gamma}$ ,  $\Delta\mathbf{Y}_0$ ,  $\Delta\mathbf{R}_G$  и  $\Delta\boldsymbol{\Theta}_0$  – векторы поправок к одноименным приближенным

значениям векторов, заданных на момент  $t_0$ ;  $V$  – поправки к результатам измерений соответствующего вида.

При определении начальных условий движения КА, ПВЗ и ЭВО в уравнениях поправок следует заменить вектор-столбец  $\Delta \mathbf{R}_G$  поправок к вектору  $\mathbf{R}_G$  координат НП в общеземной системе матричным выражением

$$\Delta \mathbf{R}_G = d\mathbf{R} + k \cdot \mathbf{R}_\Gamma + \begin{bmatrix} 0 & -Z_\Gamma & Y_\Gamma \\ Z_\Gamma & 0 & -X_\Gamma \\ -Y_\Gamma & X_\Gamma & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

и оценивать компоненты векторов  $d\mathbf{R}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и параметр  $k$ , образующих ЭВО. Здесь радиус-вектор  $\mathbf{R}_\Gamma$  НП задан в референцной системе координат.

Матрицы преобразования  $\mathbf{P}$  и  $\dot{\mathbf{P}}$  имеют вид:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & v' - x_p \cdot \cos S - y_p \cdot \sin S \\ \sin S & \cos S & \delta\epsilon - x_p \cdot \sin S + y_p \cdot \cos S \\ -v' \cdot \cos S - \delta\epsilon \cdot \sin S + x_p & v' \cdot \sin S - \delta\epsilon \cdot \cos S - y_p & 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{P}}^T = \dot{S} \cdot \begin{bmatrix} -\sin S & \cos S & (-\dot{S}^{-1} \cdot v' - \delta\epsilon) \cdot \cos S + (v' - \dot{S}^{-1} \cdot \delta\epsilon) \cdot \sin S \\ -\cos S & -\sin S & (\dot{S}^{-1} \cdot v' + \delta\epsilon) \cdot \sin S + (v' - \dot{S}^{-1} \cdot \delta\epsilon) \cdot \cos S \\ \dot{S}^{-1} \cdot v' + x_p \cdot \sin S - y_p \cdot \cos S & \dot{S}^{-1} \cdot \delta\epsilon - x_p \cdot \cos S - y_p \cdot \sin S & 0 \end{bmatrix},$$

где  $S$  – звездное время;

$v'$  – функция прецессии и нутации по склонению;

$\delta\epsilon$  – функция нутации по наклону;

$\dot{v}'$  – параметр, являющийся результатом сложения скорости изменения прецессии и нутации по склонению;

$\dot{\delta\epsilon}$  – скорость изменения нутации по наклону;

$\dot{S}$  – скорость изменения звездного времени в шкале Всемирного времени  $UT1$ .

Матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\dot{\mathbf{M}}$  и  $\mathbf{K}$  имеют вид:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -Z_G \cdot \cos S & -Z_G \cdot \sin S & \\ -Z_G \cdot \sin S & Z_G \cdot \cos S & \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R}_G \\ X_G & -Y_G & \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \dot{S} \cdot \begin{bmatrix} Z_G \cdot \sin S & -Z_G \cdot \cos S & \\ -Z_G \cdot \cos S & -Z_G \cdot \sin S & \dot{S}^{-1} \cdot \ddot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R}_G \\ 0 & 0 & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & t - t_0 & \dots & (t - t_0)^{L1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t - t_0 & \dots & (t - t_0)^{L1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t - t_0 & \dots & (t - t_0)^{L1} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\ddot{\mathbf{P}}$  размерности  $3 \times 3$  находится из равенства

$$\ddot{\mathbf{P}} = -\dot{S}^2 \cdot (\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}),$$

в котором

$$\Delta\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(v + \delta v) \\ 0 & 0 & -\delta \varepsilon \\ -x_p - 2 \cdot \dot{S}^{-1} \cdot (\dot{v} + \delta \dot{v}) \cdot \sin S & -y_p - 2 \cdot \dot{S}^{-1} \cdot (\dot{v} + \delta \dot{v}) \cdot \cos S & -1 \end{bmatrix}.$$

Фундаментальная матрица  $\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2]^T$  определяется как

$$\Phi_1 = [(\mathbf{r} - 1,5 \cdot (t - t_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}) / p_0 \quad -\eta \cdot \mathbf{r} / p_0 + K \cdot \dot{\mathbf{r}} / \sqrt{\mu \cdot p_0} \quad -\xi \cdot \mathbf{r} / p_0 + L \cdot \dot{\mathbf{r}} / \sqrt{\mu \cdot p_0} \\ (-f \cdot \mathbf{r} + \mathbf{S}_1) / \kappa \quad (-q \cdot \mathbf{r} + \mathbf{S}_2) / \kappa \quad r_0^2 \cdot \dot{\mathbf{r}} / \sqrt{\mu \cdot p_0}],$$

$$\Phi_2 = [(3 \cdot \mu \cdot (t - t_0) \cdot \mathbf{r}) / r^3 - \dot{\mathbf{r}} \cdot 0,5 / p_0 \quad -\sqrt{\mu / p_0} \cdot (\mathbf{e}_1 + K \cdot \mathbf{r} / r^3) \quad \sqrt{\mu / p_0} \cdot (\mathbf{e}_2 - L \cdot \mathbf{r} / r^3) \\ (-f \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{S}_3) / \kappa \quad (-q \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{S}_4) / \kappa \quad -\sqrt{\mu / p_0} \cdot r_0^2 \cdot \mathbf{r} / r^3].$$

В ней

$$K = (g_0 \cdot N + (r + r_0) \cdot (\xi_0 - \xi + h_0 \cdot (r - r_0))) / v_0^2, \quad L = (h_0 \cdot N - (r + r_0) \cdot (\eta_0 - \eta + g_0 \cdot (r - r_0))) / v_0^2,$$

$$N = -3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0), \quad \kappa = (1 + f^2 + q^2) / 2, \quad \delta = \text{sign}(\cos i),$$

где  $p, g, h, f, q, l$  – регулярные элементы орбиты;

$r$  и  $r_0$  – геоцентрические расстояния до КА в моменты  $t$  и  $t_0$ ;

$\zeta$  и  $\eta$  – координаты КА в орбитальной системе;

$\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  – орты координатных осей  $\zeta$  и  $\eta$  орбитальной системы;

$i$  – наклонение орбиты;

$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4$  – векторы размерности  $3 \times 1$ , являющиеся функциями регулярных элементов орбиты.

Значения правых частей уравнений поправок определяются как разность измеренных лучевой псевдоскорости  $\tilde{V}(\tau)$ , разности псевдодальностей  $\delta\tilde{\rho}_G$  и  $\delta\tilde{\rho}_S$ , а также псевдодальностей  $\tilde{\rho}_\tau(\tau)$  и  $\tilde{\rho}_\varphi(\tau)$  до КА и их вычисленных значений измеряемых параметров:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}(\tau) \\ \delta\tilde{\rho}_G \\ \delta\tilde{\rho}_S \\ \tilde{\rho}_\tau(\tau) \\ \tilde{\rho}_\varphi(\tau) \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} (\tilde{f}_G - \tilde{f}_R - \Phi^0)/f_S^0 \\ (\tilde{N}_{ij}^G - \Phi^0 \cdot T_G)/f_S^0 \\ (\tilde{N}_{ij}^S - \Phi^0 \cdot T_S)/f_G^0 \\ \tilde{\tau} - \tilde{t}_T \\ -\Delta\tilde{\varphi}(\tau) \cdot K^{-1}/f_S^0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f^V \\ f^G \\ f^S \\ f^\tau \\ f^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}(\tau) - V(\tau) - \Delta_V \\ \delta\tilde{\rho}_G - \delta\rho_G - \Delta_G \\ \delta\tilde{\rho}_S - \delta\rho_S - \Delta_S \\ \tilde{\rho}_\tau(\tau) - \rho_\tau(\tau) - \Delta_\tau \\ \tilde{\rho}_\varphi(\tau) - \rho_\varphi(\tau) - \Delta_\varphi \end{bmatrix}.$$

Матрицы коэффициентов перед поправками  $\Delta\Gamma$  к вектору мешающих параметров имеют вид

$$\mathbf{E}_V = [(C - \dot{\gamma}(\tau) - \ddot{\gamma}(\tau) \cdot (\tau - \tau_0)) / f_S^0 \quad C \cdot (\tau - \tau_0) / f_S^0 \quad \delta V_{TR} \quad -\dot{\gamma}(\tau) \quad V(\tau) / f_S^0],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_G = & [(C \cdot T_G + (\Phi_0 / f_G^0 - 1) \cdot (m_{i+1} \cdot \dot{\gamma}(\tau_{i+1}) \cdot (\tau_{i+1} - \tau_0) - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0))) / f_S^0 \\ & C \cdot T_G \cdot ((\tau_i + \tau_{i+1}) / 2 - \tau_0) / f_S^0 \quad TR \quad (m_i \cdot V(\tau_i) - m_{i+1} \cdot V(\tau_{i+1})) \\ & (\delta\rho_G + (m_{i+1} \cdot \dot{\gamma}(\tau_{i+1}) \cdot (\tau_{i+1} - \tau_0) - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0)) \cdot \Phi^0 / f_G^0) / f_S^0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_S = & [(2 \cdot C \cdot T_S - (n_{i+1} \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i+1}) \cdot (t_{\Gamma i+1} - t_0) - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i}) \cdot (t_{\Gamma i} - t_0)) + \delta\rho_S) / f_G^0 \\ & 2 \cdot C \cdot T_S \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma i+1}) / 2 - t_0) / f_G^0 \quad TR \quad (n_i \cdot V(t_{\Gamma i}) - n_{i+1} \cdot V(t_{\Gamma i+1})) \\ & (\delta\rho_S + (n_{i+1} \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i+1}) \cdot (t_{\Gamma i+1} - t_0) - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i}) \cdot (t_{\Gamma i} - t_0) - C \cdot T_S) \cdot \Phi^0 / f_S^0) / f_G^0], \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_\tau = [(C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0) / f_G^0 \quad (C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0)^2 / f_G^0 / 2 \quad \delta\rho_{TR} \quad (C - m \cdot V(\tau)) \quad 0],$$

$$\mathbf{E}_\varphi = [(C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0) / f_G^0 \quad (C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0)^2 / f_G^0 / 2 \quad \delta\rho_{TR} \quad (C - m \cdot V(\tau)) \quad \rho_\varphi(\tau) / f_S^0].$$

В теории расчета различия между длиной траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли и прямой наклонной дальностью до спутника принята двухслойная модель атмосферы Земли. В этом случае длина фазового пути  $S'$  радиосигнала от КА до НП определяется как

$$S' = S + \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR}, \quad S = \rho + \delta\rho,$$

где  $\delta\rho_{TR}$ ,  $\delta\rho_{IR}$  – тропосферная и ионосферная поправки, обусловленные изменением скорости распространения радиосигнала в атмосфере Земли;

$S$  – криволинейное расстояние до КА;

$\rho$  – прямая наклонная дальность до КА;

$\delta\rho$  – поправка за кривизну траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли.

Под параметром  $S$  будем понимать длину траектории радиосигнала в тропосфере Земли (рисунок 1).

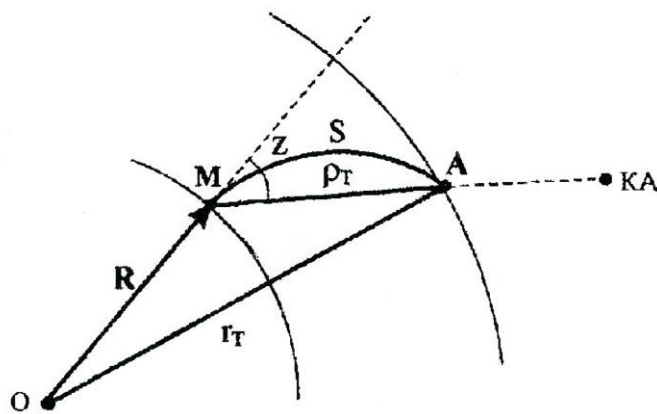


Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация определения поправки  $\delta\rho$

На рисунке 1 обозначено:  $M$  – положение НП на поверхности Земли;  $O$  – начало геоцентрической системы координат;  $R$  – геоцентрический радиус-

вектор НП;  $\rho_T$  – топоцентрическое расстояние до верхней точки тропосферы (точка А) в направлении на КА;  $r_T$  – геоцентрическое расстояние до верхней точки тропосферы;  $Z$  – зенитное расстояние КА.

Поправка за кривизну рассчитывается по формуле

$$\delta\rho = S - \rho_T, \quad (9)$$

в которой

$$\rho_T = r_T \cdot \sin \beta / \sin Z, \quad \beta = Z - \arcsin(R/r_T \cdot \sin Z), \quad r_T = N + 60\,000 \text{ м},$$

$$Z = \arccos(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\rho} / (R \cdot \rho)), \quad S = 2 \cdot \xi \cdot \arcsin(0,5 \cdot \rho_T / \xi),$$

$$\xi = -(1 + 0,776 \cdot 10^{-6} \cdot T^{-1} \cdot (P + 4\,810 \cdot e \cdot T^1)) / (K \cdot \sin Z), \quad K = -4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1},$$

где  $N$  – радиус кривизны первого вертикала в точке расположения НП;

$R$  – геоцентрическое расстояние до НП;

$\rho$  – топоцентрическое расстояние до КА;

$\boldsymbol{\rho}$  – топоцентрический радиус-вектор КА;

$T$  – абсолютная температура;

$P$  – атмосферное давление;

$e$  – парциальное давление водяных паров.

В ионосфере значение  $\delta\rho$  не превышает 0,8 см для зенитных расстояний  $Z \leq 80^\circ$ . Поэтому ее можно не учитывать. Исследования показали, что численные значения поправки  $\delta\rho$  в тропосфере для  $Z \geq 60^\circ$  достаточно большие (таблица 1). Следовательно, эта поправка должна учитываться в математических моделях радиотехнических измерений.

В таблице 1 значения  $\delta\rho$  получены для НП, имеющего широту  $B = 55^\circ$  и высоту  $h = 100$  м. Параметры тропосферы:  $T = 293^\circ\text{K}$ ,  $P = 1\,013$  мбар,  $e = 11$  мбар.

Таблица 1 – Значение поправки  $\delta\rho$  в тропосфере

Зенитное расстояние $Z$	Длина дуги траектории $S$ (м)	Длина спрямленной траектории (хорды) $\rho_T$ (м)	Значение поправки $\delta\rho$ (см)
90°	877219,640	877174,638	4500,2
85°	482010,902	482003,493	740,9
80°	304740,135	304738,305	183,0
75°	218140,733	218140,088	64,5
70°	169394,754	169394,468	28,6
65°	138832,531	138832,384	14,7
60°	118176,717	118176,634	8,3
50°	92581,520	92581,489	3,1
40°	77940,021	77940,008	1,3
30°	69059,884	69059,878	0,6
20°	63705,103	63705,101	0,2
10°	60815,279	60815,279	0,0

В математических моделях измерений (3) – (7) поправка  $\delta\rho$  рассчитывается по формуле (9), а для доплеровских измерений – по формулам

$$\Delta\rho = \delta\rho_j - \delta\rho_i, \quad \Delta V = \Delta\rho / T_G.$$

Здесь поправки  $\delta\rho_i$  и  $\delta\rho_j$  вычисляются по формуле (9) на моменты времени  $\tau_j$  и  $\tau_i$  приема временных меток.

В третьем разделе «Вопросы наблюдаемости в задаче определения геодезических параметров» изложены общие вопросы количественной и качественной наблюдаемости и их влияние на решение измерительной задачи. Рассмотрены количественные условия наблюдаемости параметров движения КА, пространственного положения НП и параметров вращения Земли (ПВЗ) при измерении наклонной дальности и лучевой скорости КА. Представлены количественные и качественные условия наблюдаемости при определении элементов взаимного ориентирования геодезических систем координат по ГНСС-измерениям. Описаны экспериментальные исследования точности определения высотных отметок НП по результатам абсолютных ГНСС-измерений в зависимости от высоты спутника над горизонтом.

Под наблюдаемостью динамической системы понимается свойство взаимно однозначного соответствия между множеством измеряемых и множеством

оцениваемых параметров. Наблюдаемость является одним из условий регулярной постановки измерительной задачи. Нарушение этого условия на этапе определения параметров состояния анализируемой динамической системы выражается в повышенной чувствительности решения измерительной задачи к ошибкам задания исходных данных или в неоднозначности получаемого решения, а также в слабой сходимости итерационного процесса при решении системы нелинейных уравнений.

В работе для исследования качественных условий наблюдаемости применялись ранговые критерии, для количественных – число обусловленности  $\mu(\mathbf{A})$  матрицы коэффициентов  $\mathbf{A}$  системы линейных уравнений поправок. Здесь число обусловленности рассчитывается по каждой группе базисных векторов матрицы  $\mathbf{A}$  для соответствующих им компонент вектора оцениваемых параметров. Такой подход позволяет более достоверно установить причину появления плохой обусловленности матрицы коэффициентов  $\mathbf{A}$  и принять правильное решение по улучшению наблюдаемости (обусловленности системы линейных уравнений поправок) исследуемой динамической системы. Если невозможно улучшить обусловленность матрицы  $\mathbf{A}$  добавлением информативных измерений или привлечением других видов измерений, то можно прибегнуть к сокращению числа компонент вектора оцениваемых параметров. Такой прием в вычислительных программах может выполняться без вмешательства человека: определяется эффективный ранг матрицы коэффициентов и находится нормальное обобщенное решение.

Получены качественные условия наблюдаемости в случае уточнения регулярных элементов орбиты КА, определения пространственных положений НП и ПВЗ по результатам измерений наклонной дальности и лучевой скорости. Здесь приведены только общие случаи.

Орбита КА не определяется, если:

– наклонные дальности до КА измерены вблизи точек траверса в течение одного или более сеансов, проведенных с одного или нескольких НП;

– лучевые скорости или наклонные дальности до КА, находящегося на экваториальной орбите, измерены в течение одного или более сеансов, проведенных с одного или нескольких НП, расположенных в экваториальной зоне.

Пространственное положение НП не определяется, если:

– лучевые скорости и наклонные дальности до одного или нескольких КА, находящихся на экваториальных орбитах, измерены в течение одного или более сеансов с НП, расположенного в экваториальной зоне;

– лучевые скорости одного или нескольких КА, находящихся на экваториальных орбитах, измерены вблизи точек траверса в течение одного или более сеансов;

– наклонные дальности измерены до одного или нескольких КА, имеющих полярную орбиту, в течение одного или более сеансов и вблизи зенита НП, находящегося на полюсе.

ПВЗ не определяются, если:

– измерены лучевые скорости или наклонные дальности с НП, расположенного на экваторе или в области экватора (не определяются  $x_P, y_P$ );

– измерены лучевые скорости или наклонные дальности с НП, расположенного на полюсе или в области полюса (не определяются  $x_P, y_P$  и  $UT$ );

– измерены наклонные дальности до КА, находящегося в зените или области зенита НП (не определяются  $x_P, y_P$  и  $UT$ );

– измерены наклонные дальности до КА, находящегося в плоскости местного меридиана НП (не определяется  $UT$ );

– измерены лучевые скорости КА, находящегося на экваториальной орбите или пересекающего плоскость экватора (не определяются  $x_P, y_P$ );

– измерены наклонные дальности до КА, находящегося в области земных полюсов (не определяются  $x_P, y_P$  и  $UT$ ).

Следует отметить, что при определении ПВЗ дифференциальные доплеровские измерения предпочтительнее прочих видов радиотехнических измерений, так как при решении этой задачи они более информативны.

В работе получены качественные условия наблюдаемости ЭВО для ГНСС-измерений. Установлено, что по относительным ГНСС-измерениям вектор  $d\mathbf{R}$  не определяется, а по абсолютным – определяется по любому числу измерений. Последний факт объясняется тем, что матрица коэффициентов системы линейных уравнений поправок перед  $d\mathbf{R}$  является ортогональной. Установлено также, что углы  $\omega$  не определяются по абсолютным и относительным ГНСС-измерениям, если:

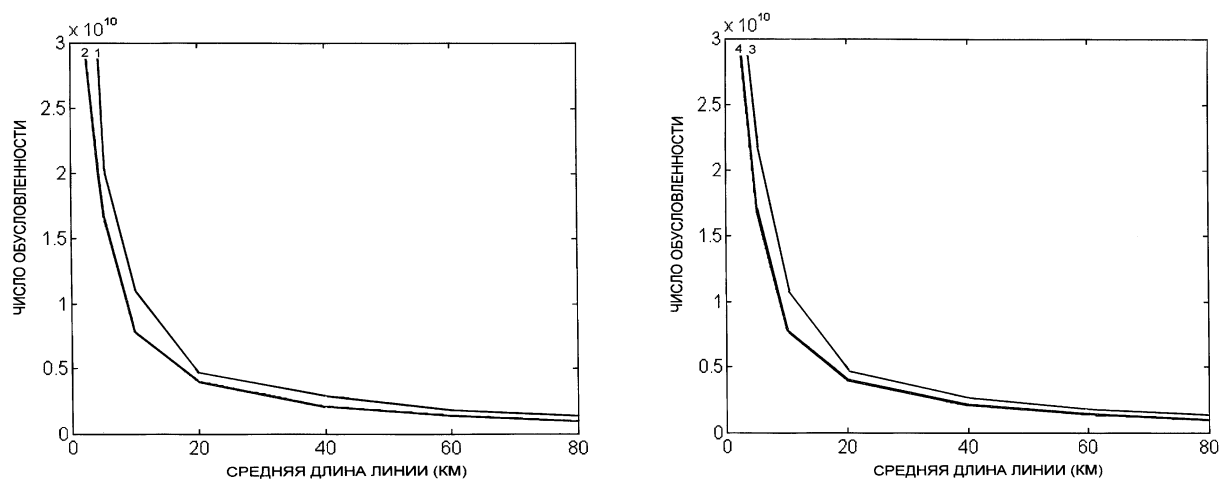
- выполнено только одно измерение;
- измерения выполнены на пунктах, расположенных на полюсах;
- измерения выполнены на пунктах, расположенных на экваторе.

Определено, что по абсолютным ГНСС-измерениям углы  $\omega$  не определяются, если несколько НП расположены на одном меридиане или в точках с координатами  $B = L = 45^\circ; 125^\circ; 225^\circ; 315^\circ$ .

Выполнены исследования количественных условий наблюдаемости ЭВО и ошибок их определения по результатам ГНСС-измерений для различных геометрических схем взаимного расположения опорных НП: треугольник, четырехугольник, четырехугольник с одной и двумя диагоналями, трех- и четырехлучевые построения. Здесь к прямоугольным матрицам коэффициентов уравнений поправок, сформированным для абсолютных и относительных ГНСС-измерений, применялась процедура сингулярного разложения с последующим расчетом числа обусловленности  $\mu(\mathbf{A})$  и определением полного либо эффективного рангов этих матриц. В результате экспериментальных исследований установлено, что задача определения ЭВО по результатам абсолютных измерений характеризуется плохой обусловленностью (рисунок 2), приводящей к большим ошибкам (таблица 2).

Для определения ЭВО лучше использовать относительные ГНСС-измерения и геометрические фигуры – четырехугольники с одной и двумя диагоналями, четырехлучевые построения. Здесь обусловленность матрицы коэффициентов значительно меньше, чем при абсолютных ГНСС-измерениях. Значения числа обусловленности находятся в пределах от 1,4 до 3,4 (рисунок 3), а абсолютных

ошибок углов  $\omega$  – от 0,000" до 0,003" (таблица 3). Численные значения этих величин практически не изменяются при увеличении средней длины линии геометрических построений.



1 – три луча; 2 – четырехугольник; 3 – треугольник; 4 – четыре луча.

Рисунок 2 – Абсолютные определения

Таблица 2 – Абсолютные ошибки  $\Delta\omega$  углов поворота и  $\Delta dR$  вектора смещения в случае абсолютных ГНСС-измерений

Фигура	Средняя длина линии 2,5 км			Средняя длина линии 10 км			Средняя длина линии 20 км			Средняя длина линии 40 км		
	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\Delta\omega$	$\Delta dR$ м	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\Delta\omega$	$\Delta dR$ м	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\Delta\omega$	$\Delta dR$ м	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\Delta\omega$	$\Delta dR$ м
Тре- угольник	35	1,74" 0,69" 0,55"	27,2 43,0 32,0	11	1,73" 0,68" 0,56"	27,2 42,9 32,0	4,7	1,73" 0,68" 0,56"	26,1 42,8 32,0	2,6	1,72" 0,68" 0,56"	27,1 42,5 31,9
3 луча	38	1,74" 0,69" 0,54"	27,2 43,0 32,0	11	1,73" 0,68" 0,56"	27,1 42,9 32,0	4,7	1,73" 0,68" 0,55"	27,0 42,8 32,0	2,8	1,73" 0,68" 0,55"	26,9 42,6 31,9
4 луча	29	1,74" 0,68" 0,57"	27,4 43,1 32,0	7,8	1,74" 0,68" 0,56"	27,2 43,0 32,0	4,0	1,74" 0,68" 0,56"	27,1 42,9 32,0	2,1	1,73" 0,68" 0,56"	27,1 42,8 32,0
Четырех- угольник	37	1,79" 0,66" 0,51"	25,6 44,5 32,7	8,2	1,79" 0,66" 0,51"	25,7 44,4 32,7	4,1	1,78" 0,66" 0,51"	25,8 44,3 32,6	2,0	1,78" 0,67" 0,52"	26,0 44,1 32,5

Таблица 3 – Абсолютные ошибки  $\Delta\omega$  углов поворота в случае относительных ГНСС-измерений

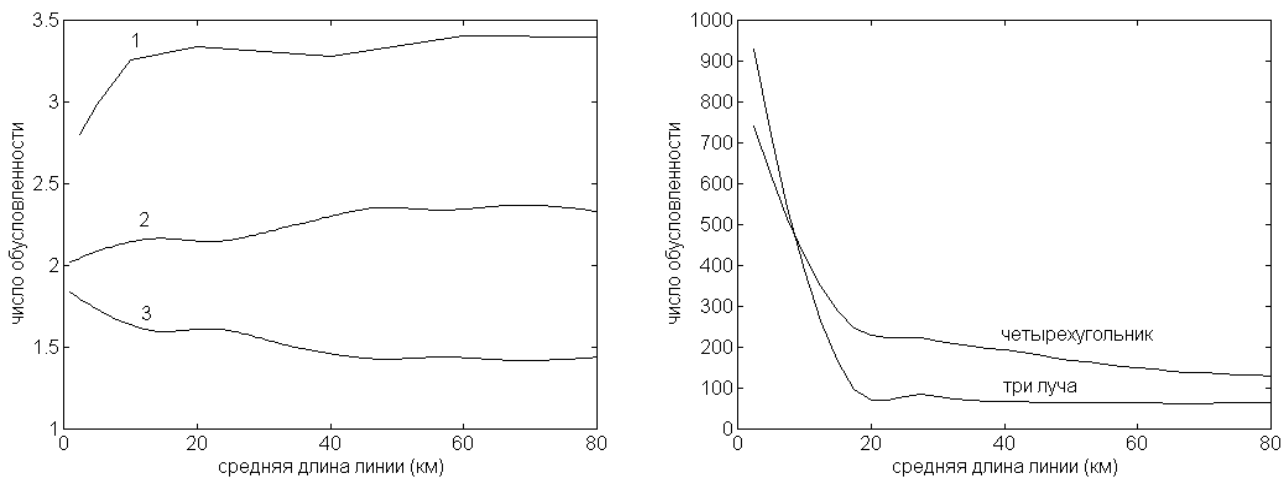
Фигура	Средняя длина линии 2,5 км		Средняя длина линии 10 км		Средняя длина линии 20 км		Средняя длина линии 40 км	
	$\mu(A)$	$\Delta\omega$	$\mu(A)$	$\Delta\omega$	$\mu(A)$	$\Delta\omega$	$\mu(A)$	$\Delta\omega$
Треугольник	$2,1 \cdot 10^3$	2,234" 1,560" 1,181"	$7,1 \cdot 10^3$	6,665" 6,249" 4,605"	$1,4 \cdot 10^4$	13,427" 12,603" 9,243"	$2,8 \cdot 10^4$	26,66" 24,91" 19,76"
3 луча	$9,3 \cdot 10^2$	211,4" 131,7" 109,6"	83	0,396" 0,370" 0,275"	67	0,179" 0,168" 0,124"	66	0,127" 0,118" 0,087"
4 луча	2,8	0,002" 0,006" 0,002"	3,1	0,002" 0,002" 0,000"	3,3	0,001" 0,001" 0,000"	3,4	0,001" 0,001" 0,000"
Четырехугольник	$7,4 \cdot 10^2$	137,1" 1,068" 0,660"	$2,2 \cdot 10^2$	1,969" 0,674" 0,010"	$1,9 \cdot 10^2$	0,752" 0,011" 0,003"	$1,4 \cdot 10^2$	0,273" 0,005" 0,001"
Четырехугольник (одна диагональ)	2,2	0,003" 0,000" 0,000"	2,2	0,003" 0,000" 0,000"	2,4	0,003" 0,000" 0,000"	2,3	0,003" 0,000" 0,000"
Четырехугольник (две диагонали)	1,6	0,000" 0,000" 0,000"	1,5	0,000" 0,000" 0,000"	1,4	0,000" 0,000" 0,000"	1,4	0,000" 0,000" 0,000"

Менее предпочтительным для определения ЭВО относительным методом является четырехугольник и трехлучевое построение. Здесь при средних длинах линий фигур до 20 км число обусловленности быстро уменьшается, а после 20 км практически стабилизируется (рисунок 3). Отсюда следует, что в случае возникшей необходимости эти построения желательно применять только при средних длинах линий более 20 км.

Из всех рассмотренных геометрических построений треугольник является наиболее «слабой» фигурой для определения ЭВО как по абсолютным, так и по относительным ГНСС-измерениям (рисунки 2 и 4). В обоих случаях матрицы коэффициентов соответствующих систем уравнений характеризуются большими числами обусловленности и ошибками решения (таблицы 2 и 3).

Из полученных результатов проведенных экспериментов следует, что при развитии геодезических сетей относительными ГНСС-измерениями они должны содержать не менее чем четыре исходных НП. В этом случае будет образо-

вываться не менее шести векторных ходов (замыкающих векторов) между исходными НП и определение ЭВО при этом будет происходить по схеме четырехугольника с двумя диагоналями.



1 – четыре луча; 2 – четырехугольник с одной диагональю;  
3 – четырехугольник с двумя диагоналями.

Рисунок 3 – Относительные определения

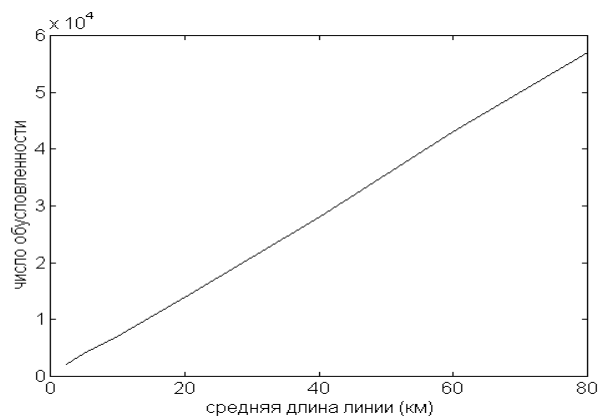


Рисунок 4 – Относительные определения (треугольник)

В четвертом разделе «Методы построения и уравнивания геодезических сетей с использованием ГНСС-технологий» приведены теория уравнивания и методы построения геодезических сетей, а также определения пространственных координат одного или нескольких НП векторными построениями с использованием результатов относительных ГНСС-измерений. Изложена методика

оперативного выявления геодезических пунктов, испытавших эффект морозного выпирания.

Одной из важных и часто встречающихся геодезических задач является развитие геодезических сетей различного назначения в системе координат исходных пунктов с помощью ГНСС-технологий. В работе рассмотрены методы и математические алгоритмы определения координат одного, двух и более НП пространственными векторными построениями на основе проведения относительных ГНСС-измерений.

Значительная часть геодезических работ выполняется на узких и протяженных (от нескольких десятков до нескольких сотен километров) участках местности, на которых выполняется топографическая съемка надземных и подземных линейных объектов (автомобильных и железных дорог, линий электропередачи, трубопроводов различного назначения и т. д.). Расстояние между определяемыми НП здесь, как правило, колеблется от сотен метров до 20 км. В таких случаях целесообразно развивать геодезическую сеть пространственными векторными ходами с применением относительного метода ГНСС-измерений. При этом в качестве исходных достаточно иметь два пункта (рисунок 5, а). Если на участке работ требуется определять ЭВО геодезических систем координат, то в число исходных необходимо включать один или два дополнительных пункта ГГС, что позволяет получить четырехугольники с одной или двумя диагоналями (рисунок 5, б, в).

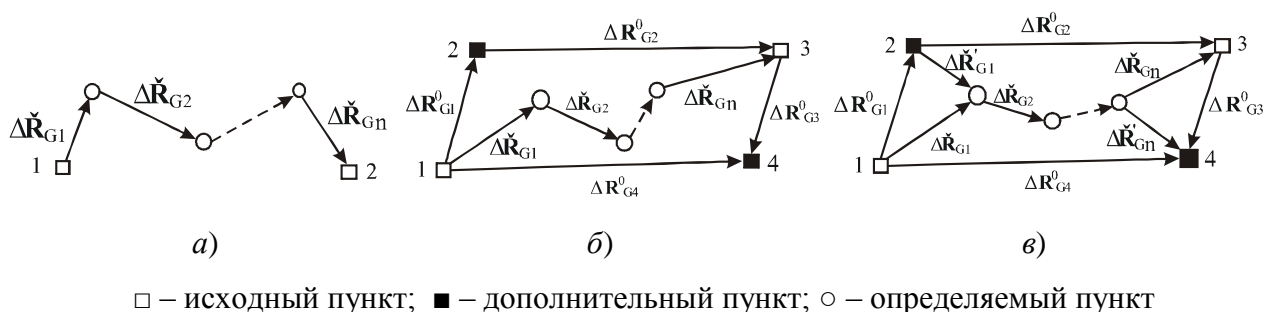


Рисунок 5 – Некоторые варианты схем построения векторных ходов:

а) схема 1; б) схема 2; в) схема 3

В векторном ходе (рисунок 5, а) измеряются базовые векторы  $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$  ( $i = 1, \dots, n$ , где  $n$  – число базовых векторов) между пунктами хода. Эти векторы, как правило, представлены в общеземной системе координат. На этапе математической обработки вычисляется вектор-столбец  $\mathbf{W} = [W_x \ W_y \ W_z]^T$  невязок координат и вектор-столбец поправок  $\mathbf{V}_i = [V_{xi} \ V_{yi} \ V_{zi}]^T$  к векторам  $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$ :

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi} - \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0 - \mathbf{R}_{\Gamma 2}^0, \quad \mathbf{V}_i = -\mathbf{W} \cdot S_i / S, \quad S_i = \sqrt{\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}^T \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}},$$

где  $\mathbf{R}_{\Gamma 1}^0$  и  $\mathbf{R}_{\Gamma 2}^0$  – радиус-векторы первого и последнего по ходу исходных НП в референцной системе координат;

$\sum_{i=1}^n \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$  – сумма измеренных базовых векторов;

$S_i$  – длина  $i$ -го базового вектора;

$S$  – сумма длин базовых векторов хода (общая длина хода).

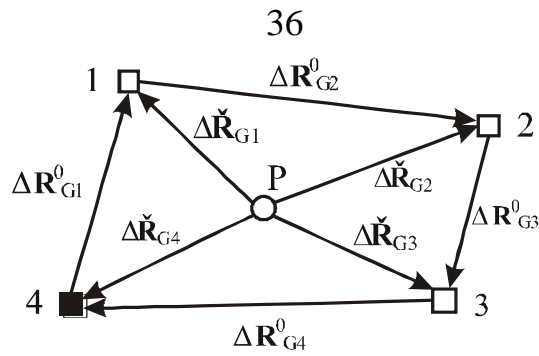
Исправленные значения базовых векторов  $\Delta\mathbf{R}_{Gi}$  вычисляются в системе координат исходных НП по формуле

$$\Delta\mathbf{R}_{Gi} = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi} + \mathbf{V}_i.$$

Затем определяются радиус-векторы НП векторного хода  $\mathbf{R}_{\Gamma j}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ , где  $m$  – число определяемых НП) в референцной системе координат как

$$\mathbf{R}_{\Gamma 1} = \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0 + \Delta\mathbf{R}_{\Gamma 1}, \quad \mathbf{R}_{\Gamma 2} = \mathbf{R}_{\Gamma 1} + \Delta\mathbf{R}_{\Gamma 2}, \quad \dots, \quad \mathbf{R}_{\Gamma m} = \mathbf{R}_{\Gamma m-1} + \Delta\mathbf{R}_{\Gamma m-1}.$$

Для определения координат отдельных НП можно применять пространственную векторную засечку. Она представляет собой пространственную фигуру, в общем случае многоугольную пирамиду. У нее боковые ребра образованы базовыми векторами, полученными из выполненных относительных ГНСС-измерений. В ее основании находятся исходные НП, а в вершине – определяемый НП (рисунок 6). При построении засечек в число исходных желательно также включать один или два дополнительных НП.



□ – исходный пункт; ■ – дополнительный пункт; ○ – определяемый пункт.

Рисунок 6 – Вариант построения пространственной векторной засечки

В пространственной векторной засечке геоцентрический радиус-вектор  $\mathbf{R}_p$  определяемого НП вычисляется в референционной системе координат по каждому базовому вектору  $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$  отдельно (здесь число базовых векторов совпадает с числом исходных НП) как

$$\mathbf{R}_{Pi} = \mathbf{R}_{Gi}^0 + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}.$$

Окончательно пространственное положение определяемого НП при равно-точных ГНСС-измерениях базовых векторов находится по формуле

$$\mathbf{R}_p = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{Pi} \right) / n,$$

где  $n$  – число измеренных базовых векторов.

Рассмотренные методы определения координат НП просты, весьма эффективны и дают хорошие результаты. Например, в 2003 г. на Самбургском месторождении газа была создана геодезическая сеть, состоящая из 20 пунктов. При этом ГНСС-измерения выполнялись двухчастотными приемниками. Всего было проложено четыре основных векторных хода, опирающихся на четыре пункта ГГС. Характеристика точности полученных координат НП этой сети представлена в таблице 4.

Таблица 4 – Точность определения координат пунктов в векторных ходах

Номер хода	Число определяемых пунктов	Длина хода (км)	Невязка в превышении $F_H$ (мм)	Относительные ошибки по координатам		
				$X$	$Y$	$H$
1	8	38,9	73	1/499000	1/322000	1/533000
2	4	12,5	28	1/241000	1/447000	1/447000
3	6	19,6	61	1/1630000	1/306000	1/321000
4	2	33,3	63	1/362000	1/2223000	1/529000

Из таблицы 4 видно, что высоты пунктов векторных ходов под номерами 1, 3 и 4 по точности соответствуют требованиям нивелирования IV класса, а хода под номером 2 – III класса.

При развитии сплошных геодезических сетей применяется другой метод уравнивания. В нем формируется система линейных уравнений поправок для определения пространственных координат НП в системе координат исходных пунктов и углов поворота  $\omega$ :

$$\mathbf{D} \cdot \delta\omega - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_i + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_{i+1} = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi,i+1} - \Delta\mathbf{R}'_{Gi,i+1} + \mathbf{V}, \quad (11)$$

где  $\delta\omega$ ,  $\delta\mathbf{R}_i$  и  $\delta\mathbf{R}_{i+1}$  – поправки к приближенным значениям одноименных векторов;

$\mathbf{E}$  – единичная  $3 \times 3$  матрица коэффициентов;

$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi,i+1}$  – измеренный в общеземной системе координат базовый вектор ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  – число измерений);

$\Delta\mathbf{R}'_{Gi,i+1}$  – вычисленный базовый вектор;

$\mathbf{V}$  – трехмерный вектор-столбец поправок к вектору  $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$ .

Здесь матрица коэффициентов  $\mathbf{D}$  имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\tilde{Z}_G & \Delta\tilde{Y}_G \\ \Delta\tilde{Z}_G & 0 & -\Delta\tilde{X}_G \\ -\Delta\tilde{Y}_G & \Delta\tilde{X}_G & 0 \end{bmatrix}.$$

Она формируется из компонент измеренного базового вектора  $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$ . Это имеет большое значение, так как при решении систем нелинейных уравнений итерационными методами более точное значение матрицы коэффициентов линеаризованной системы уравнений дает более точное ее решение и приводит к уменьшению числа итераций. В значительно преобладающем числе случаев вектор  $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$  известен точнее, чем пространственные положения исходных НП.

Из решения системы уравнений (11) можно не определять сразу все поправки, а сначала определить углы поворота  $\omega$ , а затем – пространственное положение всех НП. При таком подходе система уравнений (11) упрощается, так как из нее исключается вектор неизвестных  $\delta\omega$ . Для определения вектора  $\omega$  можно применить один из двух приемов. В первом – измеряются базовые векторы между опорными НП, например, векторы  $\Delta\mathbf{R}_{G1}^0$ ,  $\Delta\mathbf{R}_{G2}^0$ ,  $\Delta\mathbf{R}_{G3}^0$  и  $\Delta\mathbf{R}_{G4}^0$  (см. рисунки 5 и 6). Однако, такой прием увеличивает затраты на выполнение полевых работ. Во втором – вместо непосредственно измеренных базовых векторов между опорными НП предлагается получить замыкающие векторы из суммы измеренных базовых векторов по векторным ходам, проложенным между опорными и определяемыми НП. Так, например, базовый вектор  $\Delta\mathbf{R}_{G2}^0$  (см. рисунок 6) можно определить как

$$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2}^0 = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2} - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G1}.$$

Как следует из анализа количественных условий наблюдаемости ЭВО, для достижения качественных результатов уравнительных вычислений желательно, чтобы создаваемые геодезические сети содержали в себе не менее четырех исходных НП. Соблюдение этого условия приводит к тому, что матрица коэффициентов сформированной системы линейных уравнений поправок будет хорошо обусловлена и мало чувствительна к ошибкам координат исходных НП и результатов измерений.

В рассмотренных схемах геодезических построений измеряются базовые векторы  $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – число базовых векторов) между НП. Для выполнения уравнительных вычислений их численные значения выбираются из электронных протоколов работы утилит используемых программных комплексов, например, утилиты «Baselines» программного комплекса «GPSurvey», либо «Trimble Geomatics Office» и других.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные и практические результаты, полученные в диссертации, заключаются в следующем:

– дано теоретическое обоснование регулярной постановки задачи оценивания параметров состояния нелинейной динамической системы по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников. Раскрыта сущность сингулярных ошибок и показано, что различие между измеряемыми параметрами и псевдопараметрами обусловлено наличием этих ошибок в результатах измерений. Это позволило сформировать общий вид нелинейных и линеаризованных моделей измерений для первичных и вторичных измеряемых псевдопараметров в задаче оценки параметров состояния рассматриваемой нелинейной динамической системы;

– разработаны нелинейные математические модели беззапросных импульсных и фазовых радиодальномерных, интегральных (в локальной и спутниковой шкалах времени) и дифференциальных доплеровских траекторных измерений спутников, которые отвечают уровню точности современных радиотехнических систем;

– получены уравнения поправок с матрицами коэффициентов и вектором правой части для определения расширенного вектора оцениваемых параметров по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников, что позволяет получать оценки заданного набора определяемых орби-

тальных и геодезических параметров при различной геометрии взаимного расположения спутника и наземного пункта с точностью, соответствующей точности выполняемых измерений;

– разработана теория и получены экспериментальные значения различий между длиной траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли и прямой наклонной дальностью до спутника. Развита теория и методика учета влияния тропосферной и ионосферной рефракции в результатах беззапросных радиодальномерных и доплеровских измерениях спутников. Учет этих эффектов в математических моделях измерений позволил повысить степень их адекватности;

– разработана теория учета влияния изменения гравитационного поля Земли на движение спутника по орбите, которая позволяет повысить точность определения параметров движения спутника, и имеет существенное преимущество перед численным методом по эффективности, быстрдействию машинных алгоритмов и надежности получаемых результатов;

– выполнены теоретические и экспериментальные исследования качественных условий наблюдаемости параметров движения спутника, пространственных положений наземных пунктов и параметров вращения Земли, а также количественных условий наблюдаемости элементов взаимного ориентирования в случае радиотехнических траекторных измерений спутников, что повышает степень регулярной постановки измерительной задачи и способствует созданию оптимальных алгоритмов ее решения;

– на основе выполненных экспериментальных исследований определены оптимальные значения высот спутника над горизонтом, при которых в процессе абсолютных спутниковых наблюдений значение высоты наземного пункта находится с максимальной точностью;

– развитая в диссертации теория уравнивания и методы создания плановых и высотных геодезических построений по результатам относительных ГНСС-измерений для определения пространственных положений наземных пунктов в

системе координат исходных пунктов, а также экспериментально доказанное положение о том, что эти построения должны содержать в себе не менее четырех исходных геодезических пунктов, позволяет расширить область применения ГНСС-технологий в геодезии и повысить точность определения координат наземных пунктов;

– разработана методика оперативного выявления геодезических пунктов, испытавших влияние эффекта морозного выпирания, которая позволяет сократить производственные затраты на выполнение работ и повысить надежность создаваемых геодезических построений.

Таким образом, цель диссертационной работы достигнута, поставленные задачи решены. Совокупность теоретических и практических положений, имеющих важное научно-практическое значение, позволяет считать проблему разработки теории и методов определения пространственных координат наземных пунктов по результатам траекторных измерений спутников решенной, что способствует расширению области применения спутниковых технологий в геодезии.

Эффективность теоретических и практических результатов исследований подтверждена в процессе проведения в СГУГиТ фундаментальных НИР и производственных работ. Разработанные в диссертации математические алгоритмы и созданные на их основе алгоритмические программы доведены до практического применения и используются при проведении различных топографо-геодезических работ с помощью ГНСС-технологий. Применение ряда разработанных методов и технологических решений при выполнении этих работ позволило повысить как их качество, так и производительность, что обусловило значительный экономический эффект при их выполнении. Результаты исследований внедрены в производство и в учебный процесс.

Перспективы дальнейшей разработки темы связаны с расширением направлений использования моделей траекторных измерений спутников, а также развитием теории и методов построения и уравнивания пространственных векторных построений.

СПИСОК РАБОТ,  
ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1 Дударев, В. И. Математические модели доплеровских траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2008. – № 2. – С. 76–77.

2 Дударев, В. И. К вопросу расчета аномалии высоты при GPS-определениях пространственных координат точек [Текст] / В. И. Дударев, Г. А. Панаев // Геодезия и картография. – 2008. – № 2. – С. 78.

3 Дударев, В. И. Математические модели беззапросных радиодальномерных траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2008. – № 6. – С. 53–54.

4 Дударев, В. И. Оценка состояния динамической системы по результатам радиодальномерных траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2009. – № 5. – С. 17–21.

5 Дударев, В. И. Поправка в дальность за кривизну траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли [Текст] / В. И. Дударев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2009. – № 6. – С. 37–39.

6 Дударев, В. И. Формирование вектора правой части уравнений поправок для обработки результатов радиотехнических траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2010. – № 3. – С. 46–48.

7 Дударев, В. И. Дифференциальный и интегральный методы доплеровских спутниковых наблюдений [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2010. – № 6. – С. 12–16.

8 Дударев, В. И. Оценка состояния динамической системы по результатам доплеровских траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2010. – № 7. – С. 6–10.

9 Дударев, В. И. Развитие геодезических сетей пространственными векторными построениями [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2010. – № 8. – С. 4–8.

10 Дударев, В. И. Оценка влияния изменения гравитационного поля Земли на движение спутника [Текст] / В. И. Дударев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 2. – С. 8–13.

11 Дударев, В. И. Оценка параметров состояния нелинейных динамических систем в спутниковой геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4/С. – С. 8–13.

12 Дударев, В. И. Уравнения поправок для определения геодезических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4/С. – С. 13–18.

13 Дударев, В. И. Постановка задачи оценивания состояния динамической системы [Текст] / В. И. Дударев // Математическая обработка результатов геодезических наблюдений: сб. науч. тр. – Новосибирск: НИИГАиК, 1993. – Т. 51(91). – С. 19–30.

14 Дударев, В. И. Математические модели радиодальномерных траекторных измерений ИСЗ [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 1998. – Вып. 3. – С. 46–48.

15 Дударев, В. И. Вопросы наблюдаемости в космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 1998. – Вып. 3. – С. 33–39.

16 Дударев, В. И. Условия наблюдаемости в задаче определения параметров вращения Земли по спутниковым данным [Текст] / В. И. Дударев // Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): сб. ст. – Новосибирск: СГГА, 1999. – С. 18–24.

17 Дударев, В. И. Математические модели доплеровских методов спутниковой радионавигации [Текст] / В. И. Дударев // Судовождение: управляемость, управление, навигация, обучение: сб. науч. тр. – Новосибирск: НГАВТ, 1999. – С. 21–26.

18 Дударев, В. И. Определение некоторых геодезических и геодинамических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев // Междунар. научно-техн. конф., посвящ. 220-летию со дня основания Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК): сб. ст. – М.: МГУГиК, 2000. – С. 3–9.

19 Дударев, В. И. Методика учета влияния атмосферной рефракции в радиотехнических траекторных измерениях спутников [Текст] / В. И. Дударев // Междунар. научно-техн. конф., посвящ. 220-летию со дня основания Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК): сб. ст. – М.: МГУГиК, 2000. – С. 9–17.

20 Дударев, В. И. Планирование задач оценивания элементов ориентирования геодезических систем координат [Текст] / В. И. Дударев // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000): сб. ст. – Новосибирск: СГГА, 2001. – С. 3–11.

21 Дударев, В. И. Матрица изохронных производных в регулярных элементах [Текст] / В. И. Дударев // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000): сб. ст. – Новосибирск: СГГА, 2001. – С. 12–15.

22 Дударев, В. И. Влияние ошибок расчета матрицы коэффициентов и вектора правой части на решение СЛАУ в некоторых задачах космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2002. – Вып. 7. – С. 21–25.

23 Дударев, В. И. Математический алгоритм расчета переходной матрицы в задаче определения орбит космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2002. – Вып. 7. – С. 17–21.

24 Дударев, В. И. Опыт выполнения топографических съемок с применением спутниковых приемников [Текст] / В. И. Дударев // Сб. материалов ЛШ Междунар. научно-техн. конф. – Новосибирск: СГГА, 2003. – Ч. 3. – С. 265–267.

25 Дударев, В. И. Некоторые аспекты построения и уравнивания геодезических сетей сгущения с использованием GPS-технологий [Текст] / В. И. Дуда-

рев // Сб. материалов ЛIII Междунар. научно-техн. конф. – Новосибирск: СГГА, 2003. – Ч. 3. – С. 268–269.

26 Дударев, В. И. Определение местоположения недоступных объектов при проведении топографических съемок с помощью GPS-технологий [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2005. – Вып. 10. – С. 66–69.

27 Дударев, В. И. Выявление стабильных и мобильных пунктов Государственной геодезической сети в северных регионах [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2005. – Вып.10. – С. 70–72.

28 Дударев, В. И. Построение пространственной векторной засечки [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2006. Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 24–28 апреля 2006 г.). – Новосибирск: СГГА, 2006. Т. 1, ч. 1. – С. 119–120.

29 Дударев, В. И. Уравнивание пространственного векторного хода [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия, картография, кадастр в освоении природных ресурсов Байкальского региона: материалы 2-й региональной научно-произв. конф. – Иркутск: ИрГТУ, 2006. – С. 41–44.

30 Дударев, В. И. Создание геодезической сети сгущения на территории Самбургского газового месторождения с использованием GPS-технологий [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2007. III Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 25–27 апреля 2007 г.). – Новосибирск: СГГА, 2007. Т. 1, ч. 1. – С. 139–141.

31 Дударев, В. И. Классификация систем координат, применяемых в космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2010. VI Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2010 г.). – Новосибирск: СГГА, 2010. Т. 1, ч. 1. – С. 145–150.

32 Дударев, В. И. Преобразование основных систем координат, применяемых в космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2010. VI Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2010 г.). – Новосибирск: СГГА, 2010. Т. 1, ч. 1. – С. 135–144.

33 Дударев, В. И. Сингулярный анализ решения некоторых задач спутниковой геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2010. – Вып. 1 (12). – С. 35–43.

34 Дударев, В. И. Уравнивание геодезических сетей по результатам относительных GPS-измерений [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2011. VII Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2011 г.). – Новосибирск: СГГА, 2011. Т. 1, ч. 1. – С. 108–116.

35 Дударев, В. И. Оценка относительной ошибки матрицы изохронных производных [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2011. – Вып. 1 (14). – С. 7–16.

36 Дударев, В. И. Поправка за кривизну траектории радиосигнала в тропосфере [Текст] / В. И. Дударев // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2012. VIII Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Экономическое развитие Сибири и Дальнего Востока. Экономика природопользования, землеустройство, лесоустройство, управление недвижимостью» : сб. материалов в 4 т. (Новосибирск, 10–20 апреля 2012 г.). – Новосибирск: СГГА, 2012. Т. 4. – С. 187–191.