


Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

На правах рукописи

Дударев Владимир Иванович 

Развитие теории и методов определения
пространственных координат наземных пунктов по результатам
траекторных измерений спутников

25.00.32 – Геодезия

Диссертация на соискание учёной степени доктора
технических наук

Научный консультант –
доктор технических наук,
профессор
Карпик Александр Петрович

Новосибирск – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 ТЕОРИЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	14
1.1 Постановка задачи оценивания состояния нелинейных динамических систем в спутниковой геодезии.....	14
1.2 Системы координат и шкалы времени.....	29
1.3 Преобразования координат.....	35
1.4 Общие положения и математическая постановка задачи определения геодезических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников.....	47
1.5 Выбор системы элементов орбиты спутника и фундаментальной матрицы...64	
1.6 Оценка влияния изменения гравитационного поля Земли на движение космического аппарата.....	73
2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И УРАВНЕНИЯ ПОПРАВКИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ.....	84
2.1 Краткая характеристика современных методов и математических моделей радиотехнических измерений.....	84
2.2 Влияние рефракции земной атмосферы на траекторию радиосигнала.....	90
2.3 Принцип доплеровских методов определения местоположения.....	98
2.4 Математические модели доплеровских траекторных измерений.....	107
2.5 Математические модели радиодальномерных траекторных измерений....	129
2.6 Методика учёта влияния атмосферной рефракции в радиотехнических траекторных измерениях спутников.....	134
2.7 Уравнения поправок для определения геодезических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников.....	147
3 ВОПРОСЫ НАБЛЮДАЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ	

НИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ $\partial X/\partial Y$	248
ПРИЛОЖЕНИЕ Г (справочное) ВЫВОД АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕ- НИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦАНТА.....	253
ПРИЛОЖЕНИЕ Д (рекомендуемое) ОЦЕНКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОШИБКИ МАТРИЦАНТА.....	262
ПРИЛОЖЕНИЕ Е (рекомендуемое) ВИД И АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ РАДИО- ТЕХНИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.....	272
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж (обязательное) ИНТЕГРАЛ КВАДРАТА СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ДЛИНЫ ФАЗОВОГО ПУТИ ЭМВ.....	281
ПРИЛОЖЕНИЕ И (рекомендуемое) ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИОНО- СФЕРНОЙ И ТРОПОСФЕРНОЙ ПОПРАВOK.....	283
ПРИЛОЖЕНИЕ К (обязательное) ВИД НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УРАВНЕНИЯХ ПОПРАВOK.....	285
ПРИЛОЖЕНИЕ Л (обязательное) ОШИБКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭВО.....	289
ПРИЛОЖЕНИЕ М (обязательное) ОШИБКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТ НАЗЕМНЫХ ПУНКTOB.....	291
ПРИЛОЖЕНИЕ Н (рекомендуемое) ПРОТОКОЛ УТИЛИТЫ "Baselines".....	293
ПРИЛОЖЕНИЕ П (рекомендуемое) ПРИМЕР ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕ- МЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОПРАВOK.....	294

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Растущий интерес человечества к вопросам детального изучения физической поверхности Земли, геодинамических процессов, совершенствование аэрокосмических методов и средств морской, воздушной и наземной навигации, а также необходимость решения целого ряда научных и практических задач потребовали создания новых технологий выполнения геодезических работ и методов оперативной математической обработки результатов измерений, полученных с помощью навигационных спутников и их систем. Высокая точность решения задач космической геодезии возможна только при развитии теории и методов математической обработки больших массивов результатов траекторных измерений спутников для определения необходимых орбитальных и геодезических параметров. В данном исследовании особое внимание уделяется: параметрам движения спутника, параметрам вращения Земли (координатам истинных полюсов Земли и поправке к неравномерной шкале Всемирного времени UT1), элементам взаимного ориентирования (ЭВО) геодезических систем координат, пространственным координатам наземных пунктов (НП), под которыми понимаются точки различного назначения, расположенные как на земной и водной поверхности, так и в воздушном пространстве.

Современная спутниковая радиотехническая аппаратура позволяет измерять длину траектории распространения электромагнитного колебания от космического аппарата (КА) до НП с точностью до 0,01 длины волны. Это дает возможность гарантированно определять орбитальные и геодезические параметры по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников с высокой точностью при различной геометрии относительного расположения КА и НП. Чтобы решать с такой высокой точностью поставленную задачу, требуются адекватные этим измерениям математические модели и соответствующие им уравнения поправок. Для этого требуется развивать теорию и методы, связанные с учетом влияния на результаты измерений атмосферы Земли, особенностей

работы приемной и передающей радиотехнической спутниковой аппаратуры и других физических эффектов; разработкой оптимальных математических алгоритмов формирования матриц коэффициентов и вектора правой части уравнений поправок; оценкой влияния изменения гравитационного поля Земли на движение КА.

Существующие математические методы уравнивания плановых и высотных геодезических сетей, созданных посредством выполненных относительных ГНСС-измерений, используют не все потенциальные возможности геодезических навигационных спутниковых систем типа ГЛОНАСС, НАВСТАР и др. Поэтому развитие теории и методов определения координат одного или нескольких НП при использовании различных пространственных геодезических построений на основе относительных ГНСС-измерений имеет важное научное значение.

Степень разработанности темы. За предыдущие годы накоплен достаточно большой опыт и объем знаний в области определения орбитальных и геодезических параметров по результатам траекторных измерений спутников. Весомый вклад в развитие этого направления внесен научными сотрудниками Центрального научно-исследовательского института геодезии, аэрофотосъемки и картографии (ЦНИИГАиК); Научно-исследовательского института Военно-топографической службы (НИИ ВТС); Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК); Акционерного общества «Информационные спутниковые системы» им. Академика М. Ф. Решетнева»; Сибирского государственного университета геосистем и технологий (СГУГиТ), Института астрономии РАН (Астрономический Совет АН СССР); Государственного астрономического института им. П. К. Штенберга и целого ряда других организаций. Значительный вклад в решение научных и практических задач космической геодезии привнесли советские, российские и зарубежные ученые, в том числе: Бартенев В. А., Бурша М., Вейс Г., Головенкин Е. Н., Гречкосеев А. К., Дубошин Г. Н., Жданюк Б. Ф., Изотов А. А., Каула У., Тестоедов Н. А., Толстиков А. С., Урмаев М. С., Эльясберг П. Е. и др.

Для обработки результатов наблюдений спутников отечественными и

зарубежными исследователями разработан ряд математических моделей радиотехнических траекторных измерений. При анализе этих моделей было выявлено их несоответствие возросшему за последние годы уровню точности измерений, выполняемых современной спутниковой аппаратурой. По этой причине возникла потребность в создании более совершенных математических моделей, учитывающих влияние на результаты измерений как внешних, так и внутренних факторов, обусловленных атмосферой Земли, спецификой работы приемной и передающей спутниковой радиотехнической аппаратуры, особенностями движения КА по орбите и др. Разработка более точных моделей траекторных измерений обусловила и разработку соответствующих им уравнений поправок, которые должны обеспечивать надежную оценку определяемых параметров.

Теоретическим разработкам в области математической постановки решения задачи оценивания посвящены работы Брандина В. Н., Бровара Б. В., Жданюка Б. Ф., Разоренова Г. Н., Кафтана В. И., Онькова И. В., Эльясберга П. Е. и ряда других авторов. Повышение точности и увеличение видов траекторных измерений спутников, рост количества определяемых параметров требует постоянного совершенствования математических алгоритмов обработки результатов измерений, что вызывает необходимость в дальнейшем развитии и совершенствовании математической постановки решения задачи оценивания.

В вопросах развития и уравнивания геодезических сетей с использованием ГНСС-технологий накоплен значительный опыт. Решению таких задач посвящены работы российских ученых: Антоновича К. М., Бойко Е. Г., Герасимова А. П., Годжаманова М. Г., Шанурова Г. А. и др. Особого внимания заслуживает работа Маркузе Ю. И. и Welsh W. M., в которой представлена система линейных уравнений поправок для уравнивания геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений. Для обработки ГНСС-измерений используются программные комплексы, например: “GPSurvey”, “Trimble Geomatics Office”, “Ski” и др. Однако, в руководствах по их применению не приводится описание математических алгоритмов обработки этих измерений, что

существенно усложняет осмысление получаемых с их помощью результатов. Кроме этого, подобные зарубежные программные продукты не позволяют активно влиять на ход вычислительного процесса. Универсальный и оптимальный математический алгоритм решения рассматриваемой задачи, по-видимому, создать невозможно, так как он будет слабо учитывать особенности отдельно поставленной задачи. Поэтому существует потребность в разработке математических алгоритмов, позволяющих эффективно решать конкретные задачи с учетом их специфики. К ним относятся задачи по определению координат как одного или двух, так и нескольких наземных пунктов в системе координат исходных геодезических пунктов, элементов взаимного ориентирования, по созданию геодезических сетей – сплошных, протяженных, высотных и других.

Цели и задачи исследования. Целью исследования является развитие теории и методов гарантированного определения по результатам современных беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников пространственных координат наземных пунктов и орбитальных параметров с точностью, соответствующей точности современных спутниковых радиотехнических систем (РТС).

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие основные задачи:

- систематизировать и развить теоретическое обоснование регулярной постановки задачи оценивания геодезических параметров по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений КА;

- разработать теорию формирования нелинейных математических моделей беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников, отвечающих современному уровню точности;

- разработать уравнения поправок для обработки результатов беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников;

- развить теорию и методику учета влияния атмосферной рефракции на результаты радиотехнических траекторных измерений спутников;

– разработать теорию оценки влияния изменения гравитационного поля Земли (ГПЗ) на движение спутника по орбите;

– развить теоретические положения и выполнить экспериментальные исследования для выявления такой геометрии взаимного расположения КА и НП, при которой по выполненным радиотехническим траекторным измерениям определяются не все оцениваемые параметры;

– развить теорию уравнивания и методы построения различных геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений.

Научная новизна:

– разработанные нелинейные математические модели и уравнения поправок для обработки результатов беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников позволяют получать оценки заданного набора определяемых орбитальных, геодезических и геодинамических параметров при различной геометрии взаимного расположения КА и НП с точностью, соответствующей точности выполняемых измерений;

– определены качественные и количественные условия наблюдаемости в измерительной задаче, что повышает надежность и точность определения заданного набора оцениваемых параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников;

– предложенные методы построения и уравнивания различных геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений уменьшают время и производственные затраты на выполнение топографо-геодезических работ.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные в диссертации теоретические и методические положения позволяют оптимизировать решение измерительной задачи, связанной с определением орбитальных параметров и пространственных координат геодезических пунктов.

Полученные аналитические выражения доведены до практического использования и предназначены для решения фундаментальных и прикладных задач геодезии, космической геодезии, геодинамики и точной навигации.

Результаты исследований предлагается использовать для координатно-временного обеспечения целого ряда задач народно-хозяйственного и оборонного назначения. К ним относятся: изучение топографии земной поверхности и геодинамических процессов, поиск и освоение полезных ископаемых, геодезическое обеспечение строительства различных инженерных сооружений, определение параметров движения КА. Результаты исследований позволяют повысить эффективность проведения производственных работ и существенно снизить затраты на их выполнение.

Методология и методы исследования основаны на системном анализе, теории и математических методах изучения поведения нелинейных динамических систем, теоретических исследованиях в области космической геодезии и баллистики, небесной механики и астродинамики, астрометрии, теории фигуры и физики атмосферы Земли. Решение поставленных задач базировалось на использовании математического моделирования, анализа и синтеза, сравнения, обобщений и оценок с привлечением методов интегрального и дифференциального исчисления, численных методов линейной алгебры, теории математической обработки и интерпретации результатов геодезических измерений.

Положения, выносимые на защиту:

– результаты теоретических разработок в области формирования нелинейных и линеаризованных математических моделей радиотехнических траекторных измерений спутников, отвечающих уровню точности современных РТС, повышают степень состоятельности оценок определяемых параметров;

– теория расчета различия между длиной траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли и прямой наклонной дальностью до спутника повышает степень адекватности математических моделей радиотехнических траекторных измерений спутников;

– теория учета влияния изменения гравитационного поля Земли на движение спутника по орбите обеспечивает существенное преимущество перед численным методом по эффективности, быстрдействию машинных алгоритмов

и надежности получаемых результатов;

– теоретические и экспериментальные исследования условий наблюдаемости орбитальных и геодезических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутника повышают степень регулярной постановки измерительной задачи и способствуют созданию оптимальных алгоритмов ее решения;

– теоретические разработки методов уравнивания и развития различных геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений, существенно повышают эффективность использования ГНСС-измерений и понижают производственные затраты при проведении геодезических работ.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались, обсуждались и получили одобрение на: Всесоюзном научно-организационном совещании ИТА АН СССР (г. Ленинград, 1990 г.); IX Съезде ВАГО (г. Новосибирск, 1990 г.); 42 и 43 научно-технических конференциях преподавателей НИИГАиК (г. Новосибирск, 1993, 1994 г.г.); 44 научно-технической конференции с международным участием (г. Новосибирск, 1994 г.); 45 – 48 научно-технических конференциях преподавателей СГГА (г. Новосибирск, 1995 – 1998 гг.); Третьем Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98) (г. Новосибирск, 1998 г.); Международной научно-технической конференции, посвященной 220-летию МИИГАиК (г. Москва, 1999 г.); 50 научно-технической конференции преподавателей СГГА (г. Новосибирск, 2000 г.); Четвертом Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000) (г. Новосибирск, 2000 г.); 51 научно-технической конференции преподавателей СГГА, посвященной памяти академика В. В. Бузука (г. Новосибирск, 2001 г.); 53 Международной научно-технической конференции, посвященной 70-летию СГГА (г. Новосибирск, 2003 г.); 54 научно-технической конференции, посвященной 225-летию геодезического образования в России (г. Новосибирск, 2004 г.); Международной научно-технической конференции, посвященной 225-летию МИИГАиК

(г. Москва, 2004 г.); 2-й Региональной научно-практической конференции (г. Иркутск, 2006 г.); Международных научных конгрессах “ГЕО-СИБИРЬ” (г. Новосибирск, 2006 – 2008 гг., 2010 – 2012 гг.).

Работа выполнялась в рамках: госбюджетной научно-исследовательской работы (НИР) “Анализ и разработка алгоритмов оценивания геодезических и геодинамических параметров по результатам траекторных наблюдений ИСЗ” (1992 г. – 1996 г.), фундаментальной НИР № ГР 0186.0036274 “Разработка методов изучения динамики гравитационного поля и фигуры Земли планетарного, регионального и локального характера” (1995 г.) по комплексной научно-технической программе “Человек и окружающая среда”, фундаментальной НИР № ГР 0196.0005075 Грант Госкомвуза РФ “Исследование динамической составляющей гравитационного потенциала Земли и его характеристик, построение их математических моделей” (1996 г.), хоздоговорной НИР № 4.30.392 “Обследование приаэродромной территории, определение координат и высот препятствий” (2001 г.), госбюджетной НИР № 6.30.194 “Развитие локальных и региональных геодезических сетей с использованием результатов спутниковых траекторных измерений” (2002 г. – 2006 г.), фундаментальной НИР № ГР 012008.03158 “Разработка теории и методов определения геодезических и геодинамических параметров по результатам спутниковых радиотехнических траекторных измерений” (2008 г. – 2010 г.) по аналитической ведомственной целевой программе “Развитие вузовского потенциала высшей школы России на 2009 – 2012 гг.”, фундаментальной НИР № ГР 01201151296 “Исследование и разработка теории и методов оценки состояния нелинейных динамических систем по результатам траекторных измерений космических аппаратов” (2011 г.) по аналитической ведомственной целевой программе “Развитие вузовского потенциала высшей школы России на 2009 – 2012 гг.”, фундаментальной НИР № ГР 01201252771 государственного задания Министерства образования и науки РФ “Теория и методы обработки радиотехнических траекторных измерений космических аппаратов” (2012 г.).

Разработки автора нашли применение при выполнении производственных работ, связанных с развитием геодезических сетей и проведением топографических съемок участков земной поверхности с использованием ГНСС-технологий, в ряде регионов России.

Результаты выполненных исследований внедрены в экспедицию № 171 Ноябрьского филиала ФГУП “ЗапсибАГП”, в ФГУП Кузбасское топографо-маркшейдерское предприятие “КУЗБАССМАРКШЕЙДЕРИЯ”, в учебный процесс СГУГиТ.

1 ТЕОРИЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1 Постановка задачи оценивания состояния нелинейных динамических систем в спутниковой геодезии

Задачи спутниковой геодезии относятся к классу измерительных задач, в которых по результатам измерений требуется определить состояние конкретной динамической системы на заданном отрезке времени T . Такие задачи иначе называются обратными задачами или задачами оценивания [127, 143, 163].

Наличие больших массивов измерительной информации, а также желание решить обратную задачу в реальном режиме времени обуславливают необходимость создания оптимальных алгоритмов (в смысле их универсальности, регулярности и корректности, а также оперативности решения задачи) программного обеспечения систем автоматизированной математической обработки и интерпретации результатов измерений.

В спутниковой геодезии измерительная информация получается в ходе выполнения траекторных наблюдений КА с помощью специальной аппаратуры в течение одного или нескольких сеансов. Их продолжительность и промежутки времени между ними, а также распределение измерений внутри сеансов зависит от условий проведения измерений. В ряде случаев их повторить не удастся. Поэтому планирование проведения наблюдений и постановка решения задачи оценивания требуют к себе особого внимания и подхода.

Под постановкой решения измерительной задачи понимается выбор математической модели динамической системы (ДС), уравнений измерений, условий опыта, критерия качества и метода решения нелинейной системы уравнений [16, 90, 164]. Рассмотрим общие вопросы постановки задачи оценивания состояния нелинейной ДС, состоящей из нескольких КА и НП, по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников [40, 87, 135].

Под динамической системой понимается множество элементов, изменяющих свое поведение во времени и объединенных между собой в единое целое совокупностью некоторых соответствий и отношений [16, 17, 90]. Состояние реальной системы полностью описывается бесконечным числом параметров. В условиях обратной задачи имеется конечное число измерений, искаженных ошибками. Поэтому в большинстве случаев фактическое состояние этой системы определить не удастся. В связи с этим она заменяется некоторой математической моделью, зависящей от конечного числа параметров. Их совокупность в текущий момент времени $t \in T$ образует r -мерный вектор-столбец параметров состояния $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$:

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_r]^T. \quad (1.1)$$

Математические модели строятся для анализа поведения реальной динамической системы при решении научных и практических задач. Модели должны быть наиболее полными, чтобы однозначно и достаточно точно описывать поведение реальной системы, относительно простыми и удобными для вычислений. Задача оценивания подразумевает определение некоторой совокупности параметров \mathbf{q} ДС, характеризующих ее состояние в некоторый заданный момент времени $t \in T$. В спутниковой геодезии под ним понимается так называемый начальный момент времени $t_0 \in T$. Часто t_0 находится примерно посередине временного отрезка T .

Начальное состояние ДС в момент t_0 определяется вектором $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$ начальных условий (НУ). Для прогнозируемых моделей текущее состояние системы устанавливается либо соотношением

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{q}_0, t), \quad (1.2)$$

либо после интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0). \quad (1.3)$$

В общем случае вектор-функции \mathbf{F} и \mathbf{f} нелинейные. Зависимости (1.2) и (1.3) выражают основные закономерности процесса движения (динамики поведения системы) и называются моделями движения [16, 90]. Они подразделяются на кинематические и динамические. Кинематические модели дают чисто геометрическое описание движения, в динамических моделях для описания процесса движения учитываются сведения о массе и воздействующих силах [162].

Непосредственно измеряемую величину Z_i' (разность фаз, частота и т.д.) принято называть измеряемым параметром. Так как в один момент времени t могут выполняться несколько видов радиотехнических траекторных измерений КА (интегральные и дифференциальные доплеровские, радиодальномерные и другие наблюдения), то индекс i будет принимать значения $i = 1, 2, \dots, d$ (d – число одновременно измеряемых параметров). Поэтому эти параметры в момент t образует d -мерный вектор-столбец $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}'(t)$ измеряемых параметров:

$$\mathbf{Z}' = [Z_1' Z_2' \dots Z_d']^T. \quad (1.4)$$

В результатах измерений могут присутствовать систематические ошибки. Будем рассматривать такие систематические ошибки, значения которых меняются не только между сеансами измерений, но и в пределах одного отдельно взятого сеанса. Такого рода ошибки называются сингулярными [15, 17]. Их появление обусловлено воздействием на результаты измерений ряда медленно меняющихся со временем факторов. К ним относятся абберационные и релятивистские эффекты, рефракция атмосферы Земли, а также мешающие параметры. Эти параметры практически постоянны в пределах одного сеанса измерений и их появление обусловлено нестабильностью работы генераторов передающей и приемной радиотехнической аппаратуры, внутренними временными задержками

передатчика и приемника, нестабильностью состояния атмосферы Земли в течение одного сеанса радиотехнических измерений. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в разделе 2. Для компонент вектора мешающих параметров $\Gamma = \Gamma(t)$ [164] отсутствуют математические модели. В связи с вышесказанным под измеряемыми псевдопараметрами \mathbf{Z} будем понимать измеряемые параметры \mathbf{Z}' , искаженные сингулярными ошибками [76]. В случае рассматриваемых беззапросных радиотехнических траекторных измерений под измеряемыми псевдопараметрами будем понимать псевдодальность, разность псевдодальностей и псевдоскорость.

Функциональная зависимость

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \Gamma, t), \quad (1.5)$$

определяемая в общем случае нелинейной измеряемой d -мерной вектор-функцией $\boldsymbol{\varphi}$ на один текущий момент времени t , представляет собой матричную запись уравнений измерений и является математической моделью измерений по их видам (импульсные и фазовые радиодальномерные, дифференциальные и интегральные доплеровские и т. д.) [15 – 17, 90]

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \Gamma, t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{q}, \Gamma, t) \\ \varphi_2(\mathbf{q}, \Gamma, t) \\ \dots \\ \varphi_d(\mathbf{q}, \Gamma, t) \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

В ней параметр

$$\Gamma = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_k]^T \quad (1.7)$$

является k -мерным вектор-столбцом мешающих параметров для одного отдельно взятого сеанса измерений. Так как сеансы достаточно короткие, то будем считать

вектор Γ постоянным в течение одного сеанса, но изменяющимся случайным образом от сеанса к сеансу.

Результаты измерений \tilde{Z}_i ($i = 1, 2, \dots, d$; d – число одновременно выполненных видов измерений) на момент времени t , формируют d -мерный вектор-столбец

$$\tilde{\mathbf{Z}} = [\tilde{Z}_1 \ \tilde{Z}_2 \ \dots \ \tilde{Z}_d]^T \quad (1.8)$$

и содержат случайные ошибки измерений ξ_i ($i = 1, 2, \dots, d$), образующие случайный d -мерный вектор-столбец $\xi = \xi(t)$

$$\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_d]^T. \quad (1.9)$$

Вектор измерений $\tilde{\mathbf{Z}}$ функционально связан с d -мерным вектором-столбцом истинных значений измеряемых параметров $\hat{\mathbf{Z}} = [\hat{Z}_1 \ \hat{Z}_2 \ \dots \ \hat{Z}_d]^T$ и случайным вектором ошибок измерений ξ . Эта зависимость описывается нелинейной d -мерной вектор-функцией Φ

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \Phi(\hat{\mathbf{Z}}, \xi, t), \quad (1.10)$$

в которой

$$\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{q}}, t). \quad (1.11)$$

Здесь $\hat{\varphi}$ – нелинейная d -мерная вектор-функция от вектора истинных параметров состояния $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}(t)$, определяющего поведение реальной системы в текущий момент времени t . Способ комбинации ошибок измерений с измеряемыми параметрами и статистические свойства этих ошибок в математической статистике называются условиями опыта. Будем рассматривать способ

комбинации ошибок измерений с вектором \mathbf{Z} , при котором $\Phi(\hat{\mathbf{Z}}, \xi=0, t) = \hat{\mathbf{Z}}$.
Такому условию удовлетворяет аддитивный способ комбинации ошибок [16]

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{q}}, t) + \xi. \quad (1.12)$$

Совместно со случайными ошибками измерений на точность решения задачи оценивания оказывают влияние и ошибки модели измерений (1.5). Их появление обусловлено ограниченным числом принятых параметров состояния ДС. Эти ошибки в момент времени t образуют случайный d -мерный вектор-столбец $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$:

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_d]^T. \quad (1.13)$$

С учетом этих ошибок вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ в выражении (1.11) примет вид:

$$\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{q}}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \Gamma, t) + \boldsymbol{\eta}. \quad (1.14)$$

Тогда вектор-столбец $\tilde{\mathbf{Z}}$ результатов измерений в равенстве (1.12) можно определить как

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \Gamma, t) + \xi + \boldsymbol{\eta}. \quad (1.15)$$

То есть результаты измерений могут быть представлены соответствующими математическими моделями измерений, искаженных случайными ошибками измерений ξ и моделей измерений $\boldsymbol{\eta}$.

Для всех видов измерений, выполненных в одном сеансе в моменты времени $[t_1, t_2, \dots, t_h] \in T$ (h – число измерений в сеансе), совокупные векторы-столбцы $\bar{\mathbf{Z}}$ первичных измеряемых псевдопараметров и $\tilde{\mathbf{Z}}$ результатов измерений размерности dxh определим следующими зависимостями:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\varphi}(\bar{\mathbf{q}}, \Gamma), \quad (1.16)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \bar{\varphi}(\bar{\mathbf{q}}, \Gamma) + \bar{\xi} + \bar{\eta}. \quad (1.17)$$

В них

$$\bar{\varphi}(\bar{\mathbf{q}}, \Gamma) = \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{q}_1, \Gamma, t_1) \\ \varphi(\mathbf{q}_2, \Gamma, t_2) \\ \dots \\ \varphi(\mathbf{q}_h, \Gamma, t_h) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(t_1) \\ \mathbf{Z}(t_2) \\ \dots \\ \mathbf{Z}(t_h) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}(t_1) \\ \tilde{\mathbf{Z}}(t_2) \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{Z}}(t_h) \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_1) \\ \mathbf{q}(t_2) \\ \dots \\ \mathbf{q}(t_h) \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi(t_1) \\ \xi(t_2) \\ \dots \\ \xi(t_h) \end{bmatrix}, \quad \bar{\eta} = \begin{bmatrix} \eta(t_1) \\ \eta(t_2) \\ \dots \\ \eta(t_h) \end{bmatrix}.$$

Здесь вектор-столбец $\tilde{\mathbf{Z}}$ образует выборку результатов измерений одного сеанса.

Наиболее полно векторы $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ представляются многомерными законами распределения, которые практически невозможно записать. Поэтому на практике обычно задаются первыми двумя моментами многомерного распределения ошибок: математическими ожиданиями $\mathbf{M}(\bar{\xi})$, $\mathbf{M}(\bar{\eta})$ и ковариационными матрицами $\mathbf{D}(\bar{\xi})$, $\mathbf{D}(\bar{\eta})$. Для нормального закона распределения ошибок функция плотности распределения вероятностей полностью определяется этими характеристиками.

Как уже отмечалось выше, помимо случайных ошибок ξ и η на точность решения измерительной задачи оказывают влияние и сингулярные ошибки. Они функционально связаны с вектором мешающих параметров Γ , который обусловлен специфическими условиями выполнения радиотехнических траекторных измерений КА.

Разложив правую часть выражения (1.5) в ряд Тейлора, ограничившись

линейными членами, запишем

$$\mathbf{Z} = \varphi(\mathbf{q}, \Gamma = 0, t) + \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{q}, \Gamma, t)}{\partial \Gamma} \right|_{\Gamma=0} \cdot \Gamma. \quad (1.19)$$

Здесь частная производная

$$\mathbf{\Pi} = \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{q}, \Gamma, t)}{\partial \Gamma} \right|_{\Gamma=0} \quad (1.20)$$

есть прямоугольная $d \times k$ матрица частных производных от измеряемой вектор-функции вида (1.6) по компонентам вектора мешающих параметров, вычисленная при значении $\Gamma=0$. Выражение (1.19) представляет собой линеаризованные в окрестности векторов $\Gamma=0$ и \mathbf{q} уравнения измерений (1.5). В них сингулярные ошибки $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\delta}(t)$ по видам измерений, образующие d -мерный вектор-столбец

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_d]^T, \quad (1.21)$$

рассчитываются по формуле

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{\Pi} \cdot \Gamma. \quad (1.22)$$

На основании зависимостей (1.19) и (1.22) уравнения измерений (1.5) с аддитивным способом комбинации вектора-столбца $\mathbf{Z}' = \varphi(\mathbf{q}, \Gamma=0, t)$ первичных измеряемых параметров и сингулярных ошибок на момент времени t могут быть записаны как

$$\mathbf{Z} = \varphi(\mathbf{q}, \Gamma=0, t) + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{Z}' + \boldsymbol{\delta}. \quad (1.23)$$

Выражение (1.23) показывает связь вектора \mathbf{Z} измеряемых псевдопараметров и вектора \mathbf{Z}' измеряемых параметров.

Матрица $\mathbf{\Pi}$ в равенстве (1.20) зависит от времени. Следовательно, сингулярные ошибки также зависят от времени и изменяются не только между сеансами измерений, но и в пределах одного сеанса. Влияние этих ошибок на результаты измерений выборки, сформированной из одного сеанса, представим выражением

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \bar{\varphi}(\bar{\mathbf{q}}, \Gamma=0) + \bar{\boldsymbol{\delta}} + \bar{\boldsymbol{\xi}} + \bar{\boldsymbol{\eta}}, \quad (1.24)$$

в котором

$$\bar{\varphi}(\bar{\mathbf{q}}, \Gamma=0) = \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{q}_1, \Gamma=0, t_1) \\ \varphi(\mathbf{q}_2, \Gamma=0, t_2) \\ \dots \\ \varphi(\mathbf{q}_h, \Gamma=0, t_h) \end{bmatrix}.$$

В равенстве (1.24) сингулярные ошибки образуют совокупный вектор-столбец $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ размерности $d \cdot h$ вида

$$\bar{\boldsymbol{\delta}} = [\boldsymbol{\delta}^T(t_1) \boldsymbol{\delta}^T(t_2) \dots \boldsymbol{\delta}^T(t_h)]^T. \quad (1.25)$$

Вектор-столбец $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ для d -видов радиотехнических измерений в одном сеансе можно определить по формуле

$$\bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{\Gamma}, \quad (1.26)$$

в которой матрица $\bar{\mathbf{\Pi}}$ есть прямоугольная матрица размерности $(d \cdot h) \times k$ вида

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = [\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_2, \dots, \mathbf{\Pi}_h]^T. \quad (1.27)$$

В спутниковой геодезии под вектором \mathbf{Z} обычно понимают так называемые первичные измеряемые параметры – частоту колебаний принятого радионавигационного сигнала, разность фаз принятого и опорного колебаний, время распространения радиоимпульса от КА до НП и т.д. В большинстве случаев математическую обработку результатов измерений удобнее выполнять с вторичными измеряемыми параметрами [146]. Они имеют понятный геометрический и физический смысл – скорость относительного перемещения КА и НП, наклонная дальность от НП до КА и т.д. Под вторичными измеряемыми псевдопараметрами для радиотехнических траекторных измерений КА понимаются величины, имеющие понятный геометрический смысл: псевдоскорость относительного перемещения КА и НП, псевдодальность между НП и КА и т.д. Иначе говоря, за вторичные измеряемые псевдопараметры принимаются вторичные измеряемые параметры, искаженные сингулярными ошибками [76]. Вторичные измеряемые псевдопараметры в момент времени t также образуют d -мерный вектор-столбец вида

$$\mathbf{\Lambda} = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_d]^T. \quad (1.28)$$

Между первичными \mathbf{Z} и вторичными $\mathbf{\Lambda}$ измеряемыми псевдопараметрами существует функциональная зависимость

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}(\mathbf{\Lambda}, t), \quad (1.29)$$

в которой \mathbf{W} в общем случае является нелинейной первичной измеряемой d -мерной вектор-функцией, вид которой определяется типом измерений. В свою очередь, на момент времени t вектор $\mathbf{\Lambda}$ определяется нелинейной вторичной измеряемой d -мерной вектор-функцией $\mathbf{\Psi}$ от текущих значений вектора \mathbf{q} параметров состояния и вектора $\mathbf{\Gamma}$ мешающих параметров:

$$\Lambda = \Psi(\mathbf{q}, \Gamma, t). \quad (1.30)$$

Разложив вектор-функцию Ψ из равенства (1.30) в ряд Тейлора в окрестности векторов $\Gamma=0$ и \mathbf{q} , ограничившись при этом линейными членами разложения, запишем аналитическую зависимость между вторичными измеряемыми псевдопараметрами Λ и их сингулярными ошибками

$$\Lambda = \Psi(\mathbf{q}, \Gamma=0, t) + \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{q}, \Gamma, t)}{\partial \Gamma} \right|_{\Gamma=0} \cdot \Gamma. \quad (1.31)$$

Здесь частная производная

$$\mathbf{E} = \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{q}, \Gamma, t)}{\partial \Gamma} \right|_{\Gamma=0} \quad (1.32)$$

есть прямоугольная $d \times k$ матрица частных производных от вектор-функции Ψ по компонентам вектора мешающих параметров, вычисленная при значении $\Gamma=0$. В этом случае систему уравнений (1.29) можно записать в виде, в котором вторичные измеряемые параметры $\Lambda' = \Psi(\mathbf{q}, \Gamma=0, t)$ и их сингулярные ошибки Δ имеют аддитивный способ комбинации:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}(\Psi(\mathbf{q}, \Gamma=0, t) + \Delta) = \mathbf{W}(\Lambda' + \Delta). \quad (1.33)$$

В этой системе уравнений $(\Lambda' + \Delta)$ есть d -мерная матрица вторичных измеряемых псевдопараметров. Вектор-столбец сингулярных ошибок вторичных измеряемых параметров

$$\Delta = [\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_d]^T \quad (1.34)$$

рассчитывается по формуле

$$\Delta = \mathbf{E} \cdot \Gamma. \quad (1.35)$$

Матрица \mathbf{E} зависит от времени. Следовательно, сингулярные ошибки Δ также являются функциями времени и изменяются в пределах одного сеанса измерений.

Зависимость между результатами измерений, выполненных в течение одного сеанса, и их сингулярными ошибками имеет вид

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{q}}, \Gamma = 0, \bar{\Delta}) + \bar{\xi} + \bar{\eta}, \quad (1.36)$$

в которой

$$\bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{q}}, \Gamma = 0, \bar{\Delta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(\Psi(\mathbf{q}_1, \Gamma = 0, t_1) + \Delta_1) \\ \mathbf{W}(\Psi(\mathbf{q}_2, \Gamma = 0, t_2) + \Delta_2) \\ \dots \\ \mathbf{W}(\Psi(\mathbf{q}_h, \Gamma = 0, t_h) + \Delta_h) \end{bmatrix}, \quad \bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta(t_1) \\ \Delta(t_2) \\ \dots \\ \Delta(t_h) \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Совокупный вектор-столбец сингулярных ошибок $\bar{\Delta}$ размерности $d \cdot h$ определяется из произведения прямоугольной $(d \cdot h) \times k$ матрицы $\bar{\mathbf{E}}$

$$\bar{\mathbf{E}} = [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_h]^T \quad (1.38)$$

и k -мерного вектора-столбца мешающих параметров Γ :

$$\bar{\Delta} = \bar{\mathbf{E}} \cdot \Gamma \quad (1.39)$$

Для моделей измерений, представленных зависимостями (1.23) и (1.33), матрицы частных производных \mathbf{P} и \mathbf{E} могут быть найдены как

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \Gamma}, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \Gamma}. \quad (1.41)$$

При обработке измерений, полученных в течение нескольких сеансов, формируются уравнения измерений вида (1.24) и (1.36) по всем сеансам.

Целью измерительной задачи является получение несмещенных оценок определяемых параметров. Для выполнения условия несмещенности требуется, чтобы математические ожидания ошибок траекторных измерений, моделей измерений и сингулярных ошибок (по всем сеансам) равнялись нулю, то есть $\mathbf{M}(\bar{\xi}) = 0$, $\mathbf{M}(\bar{\eta}) = 0$, $\mathbf{M}(\bar{\delta}) = 0$ (либо $\mathbf{M}(\bar{\Delta}) = 0$). Так как

$$\mathbf{M}(\bar{\delta}) = \bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{M}(\Gamma), \quad \mathbf{M}(\bar{\Delta}) = \bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{M}(\Gamma), \quad (1.42)$$

то для выполнения требования $\mathbf{M}(\bar{\delta}) = 0$ (или $\mathbf{M}(\bar{\Delta}) = 0$) должно выполняться равенство

$$\mathbf{M}(\Gamma) = 0. \quad (1.43)$$

В общем случае математическое ожидание вектора мешающих параметров Γ не равняется нулю, поэтому его компоненты следует включать в состав вектора оцениваемых параметров [15, 17]. Это позволяет повысить точность найденных значений определяемых параметров не менее, чем на 10 % [121]. При этом не требуется каких-либо априорных сведений о вероятностных характеристиках вектора Γ [164].

Выбор критерия качества на этапе постановки решения задачи оценивания определяет оптимальность получаемых оценок \mathbf{q}' вектора параметров состояния нелинейной динамической системы. Это может быть метод наименьших квадратов, метод наименьших модулей и т. д. Метод статистической обработки

результатов измерений обычно получает свое название по наименованию используемого критерия качества [15 – 17, 90, 164].

Математическая постановка решения измерительной задачи должна обеспечивать единственное решение с требуемыми предельными свойствами по объему выборки измерений. Для этого необходимо, чтобы ее постановка была регулярной. Математическая постановка задачи будет регулярной, если выполняются условия адекватности, наблюдаемости и состоятельности оценок [15 – 17]. Под адекватностью понимается близость математической модели к поведению реальной ДС, под наблюдаемостью – наличие взаимно однозначного соответствия между параметрами состояния системы и ее измеряемым выходом. Состоятельность оценок подразумевает сходимость по вероятности P получаемых в процессе решения измерительной задачи оценок \mathbf{q}'_0 параметров состояния ДС к их истинным значениям $\hat{\mathbf{q}}_0$ при сколь угодно малой $\varepsilon > 0$ и числе измерений n , стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\mathbf{q}'_0 - \hat{\mathbf{q}}_0| < \varepsilon) = 1. \quad (1.44)$$

Нерегулярная постановка задачи оценивания приводит либо к множественности, либо к ошибочности ее решения.

Математическая постановка решения измерительной задачи должна быть также корректной и оптимальной. Постановка решения измерительной задачи корректная, если в процессе ее выполнения обеспечивается устойчивость решения относительно исходных данных [17, 143]. Постановка измерительной задачи будет оптимальной, если среди множества других возможных постановок ей соответствует наиболее простой и эффективный алгоритм решения. Оптимальность подразумевает также соблюдение условий регулярности и корректности.

С позиций системного подхода измерительная задача может быть представлена некоторой сложной решающей системой, у которой входом является выборка результатов измерений $\tilde{\mathbf{Z}}$, а выходом – оценки компонент вектора \mathbf{q}'_0 параметров

состояния на некоторый начальный момент времени $t_0 \in T$ [17]. Такая система имеет свои специфические свойства. К основным из них относятся: наблюдаемость, декомпозируемость, устойчивость, адекватность, состоятельность.

Системный подход к задаче оценивания заключается в выявлении ее характерных свойств. Затем система делится на части (подсистемы) таким образом, чтобы эти свойства сохранились для каждой ее части. После этого самостоятельному исследованию подвергается каждая подсистема в отдельности со своим входом и выходом. Информация, полученная после анализа каждой подсистемы, обобщается с целью накопления знаний о системе в целом. Кратко опишем основные свойства решающей системы, принимая во внимание тот факт, что свойства наблюдаемости, адекватности и состоятельности определяют понятие регулярности измерительной задачи, о чем было сказано выше.

Способность системы к делению на независимые части (подсистемы) называется декомпозируемостью. Вопросы декомпозиции достаточно подробно освещены в специальной литературе, в частности [16, 17].

Под устойчивостью понимается такое свойство системы, при котором малые изменения начальных условий приводят к малым изменениям измеряемого выхода [143, 144]. Следует иметь в виду, что свойство устойчивости соответствует понятию корректности постановки решения измерительной задачи.

Особо заметим, что все приведенные в данном подразделе положения, понятия и определения будут использованы при изложении последующего материала, посвященного обработке спутниковых радиотехнических траекторных измерений для определения некоторых геодезических и геодинамических параметров.

1.2 Системы координат и шкалы времени

При решении геодезических задач методами космической геодезии применяются разнообразные системы координат [1, 10, 77, 91, 137], в которых математический алгоритм решения поставленной задачи оценивания будет наиболее простым. Все системы координат можно различить между собой по виду, расположению начала отсчета, выбору основной координатной плоскости, ориентировке оси абсцисс, типу.

Согласно приведенной в приложении А классификации любая выбранная система координат для полного ее определения в своем названии будет содержать все классификационные признаки [77]. Например, система координат СК-42 будет называться так: средняя земная эллипсоидальная экваториальная квазигеоцентрическая система координат. Ниже рассмотрим только те системы координат и их преобразования, которые будут применяться в настоящей работе.

Пространственное положение НП удобнее всего определять в системах координат, жестко связанных с вращающейся Землей. Это так называемые земные системы координат. В ряде случаев в них бывает также удобно определять пространственные положения естественных и искусственных небесных тел. У этих систем ось аппликата совмещается с осью вращения Земли и направляется в сторону ее северного полюса. В качестве основной координатной плоскости принимается плоскость земного экватора, а за начальный меридиан – меридиан Гринвича. Наиболее часто используются прямоугольные экваториальные геоцентрические координаты, связанные с ОЗЭ и РЭ – это общеземная (гринвичская) и референцная (геодезическая) системы.

Начало средней земной (общеземной или гринвичской) системы координат $(OXYZ)_G$ расположено в центре масс Земли, ось аппликата Z_G направлена к среднему полюсу P Земли 1900 – 1905 гг. Ось абсцисс X_G направлена в точку пересечения среднего гринвичского меридиана со средним земным экватором 1900 – 1905 гг. [101, 138, 146]. За средний меридиан Гринвича принимается

плоскость, содержащая вектор силы тяжести в обсерватории Гринвича и параллельная средней оси вращения Земли. Плоскость среднего меридиана Гринвича не содержит среднюю ось вращения Земли.

Начало референцной системы координат $(OXYZ)_G$ совмещается с центром выбранного РЭ. Ось аппликат Z_G совпадает с осью вращения этого эллипсоида. За ось абсцисс X_G принимается линия пересечения плоскости экватора РЭ и плоскости начального гринвичского меридиана, заданного геодезическими датами в исходном пункте. Ось ординат Y_G дополняет систему до правой [91].

Наряду с отмеченными выше системами широко применяются прямоугольные горизонтные системы координат. Одна из них – это средняя прямоугольная геоцентрическая горизонтная система координат $(OXYZ)_H$. Ее начало расположено в центре масс Земли. Ось ординат Y_H совпадает с линией пересечения плоскости местного меридиана НП и плоскости, проходящей через центр масс Земли параллельно плоскости местного горизонта. Ось абсцисс X_H лежит в плоскости среднего экватора и дополняет систему до правой.

В описанных выше отсчетных системах положение точки остается неизменным относительно поверхности Земли и не изменяется с течением времени (если не принимать во внимание геодинамические явления).

Истинная ось вращения в теле Земли не сохраняет своего пространственного положения, а испытывает периодические колебания. Следовательно, оба полюса Земли, являющиеся точками пересечения оси вращения с физической поверхностью Земли, также меняют свое положение. Отсюда следует, что земные координаты являются функцией времени. Явление перемещения мгновенных полюсов Земли относительно ее физической поверхности называется движением полюсов. Амплитуда этих перемещений достигает до 13 метров [138]. Международная служба вращения Земли (МСВЗ, IERS) отслеживает эти движения и публикует координаты x_p , y_p истинного полюса относительно его среднего положения P , определенного за период 1900 – 1905 гг. В связи с этим различают истинную и среднюю земные системы координат.

Начало истинной земной системы координат $(OXYZ)'_G$ расположено в центре масс Земли. Ось аппликат Z'_G направлена к истинному полюсу P' Земли в некоторый текущий момент времени $t \in T$. Ось абсцисс X'_G направлена в точку пересечения истинного меридиана Гринвича с истинным экватором на эпоху t . За истинный (мгновенный) меридиан Гринвича принимается плоскость, содержащая истинную (мгновенную) ось вращения Земли и линию пересечения среднего экватора со средним меридианом Гринвича.

Обсерваториями России (Государственной системы определения параметров вращения Земли – ГС ПВЗ), Украины, Узбекистана, Польши, Болгарии и Чехии выполняются регулярные астрооптические и спутниковые наблюдения с целью определения ПВЗ: координат мгновенного полюса Земли x_p, y_p и Всемирного времени $UT1$. Окончательные данные о Всемирном времени и координатах полюса, вычисленные в Главном метрологическом центре Государственной службы времени и частоты (ГМЦ ГСВЧ), периодически публикуются в бюллетене “Всемирное время и координаты полюса” серии “Е”. Там же приводятся сведения об отличии этих данных от результатов, полученных МСВЗ. В бюллетене “Всемирное время и координаты полюса” серии “А” публикуются предварительные (срочные) значения ПВЗ и их прогноз на семь недель, а также окончательные значения ПВЗ на прошедшие даты.

Координаты x_p и y_p истинного полюса P' Земли определяются в касательной плоскости (координатной плоскости), проведенной к среднему полюсу P Земли. Начало координат совмещено со средним полюсом P . Ось абсцисс x_p совпадает с линией пересечения этой координатной плоскости с плоскостью среднего меридиана Гринвича. Ось ординат y_p дополняет систему до правой (направлена к западу относительно меридиана Гринвича).

Для описания пространственного движения КА и НП относительно центра масс Земли наиболее приемлемой является инерциальная система координат, не вращающаяся вместе с Землей. В инерциальной системе координат начало помещается в некоторой точке пространства, либо перемещается с постоянной ско-

ростью, направление осей в пространстве при этом сохраняется неизменным. В качестве таковой примем прямоугольную геоцентрическую экваториальную звездную систему координат $(oxyz)'$, начало которой совмещено с центром масс Земли [138, 142]. Ось аппликат z' совпадает с ее истинной осью вращения. Ось абсцисс x' направлена в истинную точку весеннего равноденствия, которая лежит в плоскости истинного экватора в эпоху t_0 . Обычно за эту эпоху принимается момент задания начальных условий движения спутника. Ось ординат y' дополняет систему до правой. В дальнейшем эту систему координат будем называть истинной звездной.

Для этой же цели широко применяется средняя звездная система координат $(oxyz)$, начало которой совмещено с центром масс Земли. Ось аппликат z совпадает с ее средней осью вращения. Ось абсцисс x направлена в среднюю точку весеннего равноденствия, которая лежит в плоскости среднего экватора в эпоху t_0 . Ось ординат y дополняет систему до правой. В дальнейшем эту систему координат будем называть средней звездной.

В общем случае звездные системы координат не являются инерциальными, так как ось вращения Земли постоянно меняет свою ориентировку в пространстве. Это сложное перемещение раскладывается на две составляющие: прецессию и нутацию. С прецессией связано пространственное перемещение так называемой средней оси вращения Земли (среднего полюса мира P_m), с нутацией – истинной (истинного полюса мира P_m'). Поэтому для соблюдения условия инерциальности задание пространственной ориентировки координатных осей на эпоху t_0 является обязательным требованием.

В качестве некоторых аналогов инерциальной системы координат, пригодных для описания пространственного движения КА, Г. Вейсом предложены небесная и орбитальная системы координат [138]. В данной работе будет применяться прямоугольная геоцентрическая орбитальная система координат $(O\xi\eta\zeta)$, начало которой совмещено с центром масс Земли. Ось аппликат ζ совпадает с вектором кинетического момента. Ось абсцисс ξ лежит в плоскости орбиты КА и образует с

радиус-вектором \mathbf{r} спутника угол ℓ , равный сумме трех углов: долготы восходящего узла, аргумента перигея и истинной аномалии. Ось ординат η дополняет систему до правой [141]. Авторами работы [195] используется аналогичная система координат, называемая ими прямой равноденственной. Эта система координат является инерциальной.

В качестве другой орбитальной системы координат широко используется прямоугольная геоцентрическая орбитальная система координат $(O\xi'\eta'\zeta')$, начало которой также совмещено с центром масс Земли. Ось аппликат ζ' совпадает с вектором кинетического момента. Ось абсцисс ξ' лежит в плоскости орбиты и направлена на спутник. Ось ординат η' находится в плоскости орбиты перпендикулярно к радиус-вектору КА и направлена в сторону его движения. Данная система координат не будет инерциальной, так как оси ξ' и η' не сохраняют своей пространственной ориентировки.

Наряду с описанными выше системами в космической геодезии широко используются прямоугольные топоцентрические истинная $(\bar{o} \bar{x} \bar{y} \bar{z})'$ и средняя $(\bar{o} \bar{x} \bar{y} \bar{z})$ системы координат, начала которых совпадают с точкой наблюдения \bar{o} . Координатные оси ориентируются в пространстве параллельно координатным осям соответствующих геоцентрических звездных систем.

Для описания пространственно-временных событий, связанных с определением звездного времени, фиксацией моментов наблюдений КА и т.п., используются различные системы времени. Одной из них является Всемирное время $UT1$. Оно получается исправлением Всемирного времени $UT0$, определенного из обработки астрономических наблюдений суточных движений звезд, поправкой $\Delta\lambda$ за движение истинного полюса Земли [1, 129 145]

$$t_{UT1} = t_{UT0} + \Delta\lambda, \quad (1.45)$$

$$\Delta\lambda = 1/15 \cdot (x_p \cdot \sin\lambda - y_p \cdot \cos\lambda) \cdot \operatorname{tg}\varphi, \quad (1.46)$$

где t_{UT1} и t_{UT0} – моменты времени в шкалах $UT1$ и $UT0$ соответственно;

φ и λ – широта и долгота пункта наблюдения.

Для построения траекторий движения НП, искусственных и естественных небесных тел, для изучения неравномерности вращения Земли требуется некоторая шкала RT равномерного времени. В качестве таковой может быть принята шкала Атомного времени, не связанная с вращением Земли. Эта шкала основана на применении высокостабильных атомных эталонов частоты с относительной нестабильностью частоты порядка $3 \cdot 10^{-16}$ (уход часов на 1 секунду происходит примерно за 70 миллионов лет) [29]. Такой цезиевый эталон времени создан в Национальном институте стандартов и технологии США. Поскольку Атомное время с высокой точностью воспроизводит шкалу RT , то его можно рассматривать как равномерное.

Существует несколько связанных между собой шкал Атомного времени, различающихся одна от другой выбором нуля-пункта [1, 137]:

$TA(SU)$ – шкала Атомного времени ГСВЧ (Россия);

TAS – ступенчатая шкала Атомного времени;

TAI – шкала Международного Атомного времени;

A.1– шкала Атомного времени, предложенная Морской обсерваторией США.

В качестве шкалы RT может также применяться шкала Всемирного координированного времени UTC , введенная с 1 января 1972 года для согласования систем Всемирного и Атомного времени. Поправка

$$DUT1=UT1-UTC \quad (1.47)$$

публикуется в бюллетене "Всемирное время и координаты полюса" серии E . Здесь же публикуются разности $(TAI-UTC)$, $(TAI-TA(SU))$ и $(TA(SU)-UTC)$, позволяющие осуществить переход из одной шкалы времени в другую.

Поскольку вариации вращения Земли не подчиняются какому-либо известному в настоящее время закону, то и не существует аналитической

зависимости между шкалой Всемирного времени $UT1$ и шкалой RT равномерного времени, необходимой для построения пространственных траекторий движения НП, естественных и искусственных небесных тел и т.д. Поэтому разность

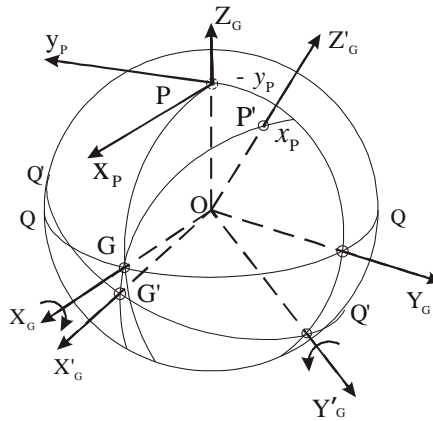
$$UT = UT1 - RT \quad (1.48)$$

определяется либо после обработки результатов траекторных измерений КА, либо из астрономических наблюдений и также периодически публикуется в бюллетенях.

1.3 Преобразования координат

В космической геодезии невозможно обойтись без разнообразных координатных преобразований [78]. Это обусловлено тем, что пространственные положения различных объектов и рассматриваемых явлений определены в различных системах координат, а задача оценивания должна выполняться в единой и удобной для работы системе координат. Ниже рассмотрим основные координатные преобразования, основой для которых служат матрицы простых вращений. Они применяются для преобразования векторов из одной прямоугольной системы координат в другую. Это матрицы: $\mathbf{R}_1(\alpha)$ – при вращении вокруг оси “ ox ”, $\mathbf{R}_2(\alpha)$ – при вращении вокруг оси “ oy ”, $\mathbf{R}_3(\alpha)$ – при вращении вокруг оси “ oz ”. Положительным углом вращения α считается такой угол, при котором вращение системы координат происходит против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения.

Преобразование средних земных координат $(OXYZ)_G$ в истинные земные $(OX'Y'Z')_G$ осуществляется двумя последовательными поворотами системы $(OXYZ)_G$: сначала относительно оси OX_G на угол u_P , затем относительно оси OY_G (уже совпадающей с осью OY) на угол x_P (рисунок 1.1). Здесь величины x_P и u_P являются координатами истинного (мгновенного) полюса P' Земли относительно среднего полюса P .



PG – средний меридиан Гринвича, $P'G'$ – истинный меридиан Гринвича,
 QQ – средний экватор, $Q'Q'$ – истинный экватор, OP – средняя ось вращения Земли,
 OP' – истинная ось вращения Земли, G – точка пересечения среднего меридиана
 Гринвича со средним экватором, G' – точка пересечения истинного меридиана
 Гринвича с истинным экватором

Рисунок 1.1 – Связь истинных и средних земных систем координат

Матричное преобразование средних земных координат в истинные может быть представлено в виде:

$$\mathbf{R}'_G = \mathbf{R}_2(+x_P) \cdot \mathbf{R}_1(+y_P) \cdot \mathbf{R}_G, \quad (1.49)$$

а истинных земных координат в средние –

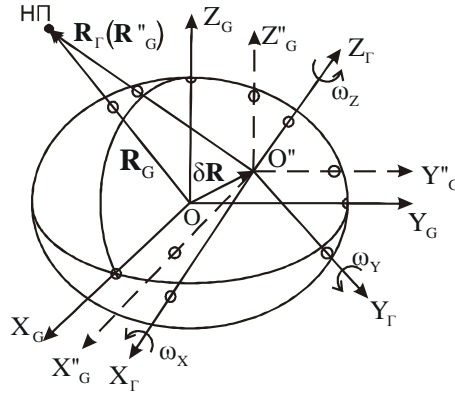
$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_1(-y_P) \cdot \mathbf{R}_2(-x_P) \cdot \mathbf{R}'_G, \quad (1.50)$$

где $\mathbf{R}_G = [XYZ]_G^T$ – геоцентрический радиус-вектор НП в общеземной системе координат;

$\mathbf{R}'_G = [X'Y'Z']_G^T$ – геоцентрический радиус-вектор НП в истинной земной системе координат.

Пусть положение НП определено в референционной системе координат $(O''XYZ)_Г$

радиус-вектором $\mathbf{R}_\Gamma = [XYZ]_\Gamma^T$, а в общеземной $(OXYZ)_G$ – радиус-вектором $\mathbf{R}_G = [XYZ]_G^T$ (рисунок 1.2).



$(OXYZ)''$ – промежуточная (квазигеоцентрическая) система с осями координат параллельными осям общеземной системы

Рисунок 1.2 – Связь геоцентрических и квазигеоцентрических прямоугольных земных систем координат

Тогда преобразование референчных координат НП в общеземные выполняется с помощью матричного выражения [10, 24, 91, 97]

$$\mathbf{R}_G = (1 + k) \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{R}_\Gamma + d\mathbf{R}, \quad (1.51)$$

где k – поправка к масштабу референчной системы координат $(O''XYZ)_\Gamma$;

$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ – трехмерный вектор-столбец малых углов поворота координатных осей системы координат $(O''XYZ)_\Gamma$ относительно осей системы $(OXYZ)_G$;

$d\mathbf{R} = [dX \ dY \ dZ]^T$ – трехмерный вектор-столбец смещения начала O'' системы координат $(O''XYZ)_\Gamma$ относительно начала O системы $(OXYZ)_G$.

Обратное преобразование имеет вид:

$$\mathbf{R}_\Gamma = (1 - k) \cdot \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{R}_G - d\mathbf{R}. \quad (1.52)$$

В формулах (1.51) и (1.52) матрица малых поворотов координатных осей референцной системы координат, являющаяся итогом последовательного перемножения трех матриц вращения, имеет вид [138]:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{R}_3(\omega_Z) \cdot \mathbf{R}_2(\omega_Y) \cdot \mathbf{R}_1(\omega_X) = \begin{bmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

Компоненты векторов $d\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\omega}$ и поправка k называются элементами взаимного ориентирования систем координат.

После выполнения простых матричных преобразований, выражения (1.51) и (1.52) могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} + (1+k) \cdot \mathbf{R}_\Gamma + d\mathbf{R}, \quad (1.54)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma = \mathbf{D}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} - (1-k) \cdot \mathbf{R}_G - d\mathbf{R}. \quad (1.55)$$

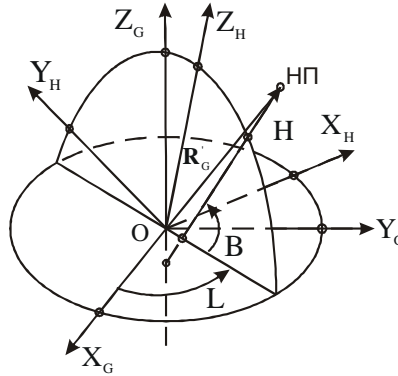
Здесь матрицы \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 имеют вид

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -Z_\Gamma & Y_\Gamma \\ Z_\Gamma & 0 & -X_\Gamma \\ -Y_\Gamma & X_\Gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & Z_G & -Y_G \\ -Z_G & 0 & X_G \\ Y_G & -X_G & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Если пространственное положение НП задано в общеземной системе координат $(OXYZ)_G$ радиус-вектором $\mathbf{R}_G = [XYZ]_G^T$, а в горизонтной $(OXYZ)_H$ задано радиус-вектором $\mathbf{R}_H = [XYZ]_H^T$ (рисунок 1.3), то преобразование этого вектора из общеземной системы в горизонтную осуществляется сначала поворотом системы $(OXYZ)_G$ относительно оси OZ_G на угол $(90^\circ + L)$, а затем относительно оси OX_G на

угол $(90^\circ - B)$:

$$\mathbf{R}_H = \mathbf{R}_1(90^\circ - B) \cdot \mathbf{R}_3(90^\circ + L) \cdot \mathbf{R}_G. \quad (1.57)$$



B, L, H – геодезические широта, долгота и высота НП

Рисунок 1.3 – Связь горизонтной и общеземной систем координат

После перемножения матриц поворота преобразование (1.57) будет иметь вид:

$$\mathbf{R}_H = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{R}_G. \quad (1.58)$$

В нем

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sin L & -\sin B \cdot \cos L & \cos B \cdot \cos L \\ \cos L & -\sin B \cdot \sin L & \cos B \cdot \sin L \\ 0 & \cos B & \sin B \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_H. \quad (1.60)$$

Элементы матрицы \mathbf{Q} являются функциями прямоугольных земных координат НП и рассчитываются по формулам:

$$\rho_G = \sqrt{X_G^2 + Y_G^2}, \quad \sin L = Y_G / \rho_G, \quad \cos L = X_G / \rho_G, \quad R_G = \sqrt{X_G^2 + Y_G^2 + Z_G^2},$$

$$\sin B = \{1 + e^2 \cdot (1 - Z_G^2 / R_G^2)\} \cdot Z_G / R_G, \quad \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B},$$

где B, L – геодезические широта и долгота НП соответственно;

e – эксцентриситет земного эллипсоида.

Преобразование вектора \mathbf{R}_G положения НП из общеземной системы координат в звездную описывается выражением

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \dot{\mathbf{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_G, \quad (1.61)$$

где \mathbf{R} и $\dot{\mathbf{R}}$ – геоцентрические радиус-вектор положения и вектор скорости НП в звездной системе координат;

\mathbf{P} и $\dot{\mathbf{P}}$ – матрицы преобразования.

Выражение (1.61) является кинематической моделью движения НП в пространстве.

Вид матриц \mathbf{P} и $\dot{\mathbf{P}}$ в выражении (1.61) определяется выбранной координатной системой, которая на интервале времени T анализа состояния нелинейной ДС будет удовлетворять требованиям инерциальной системы. Матричное преобразование (1.61) должно быть простым и, одновременно, обеспечивать точность, соответствующую современному уровню качества траекторных измерений КА.

Матрица \mathbf{P} представляет собой результат перемножения двенадцати ортогональных матриц вращения, учитывающих вращение Земли вокруг своей оси, колебания этой оси вращения, прецессию по прямому восхождению K , ω и склонению ν на отрезке времени $\Delta t = t - t_0$ (t_0 – начальный момент времени, t – текущий момент времени, соответствующий очередному измерению), а также нутацию по прямому восхождению $\Delta\mu_t$ и $\Delta\mu_{t_0}$, склонению $\Delta\nu_t$ и $\Delta\nu_{t_0}$, наклону

$\Delta\varepsilon_t$ и $\Delta\varepsilon_{t_0}$ в эпохи t и t_0 соответственно [142]:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & v' - x_p \cdot \cos S - y_p \cdot \sin S \\ \sin S & \cos S & \delta\varepsilon - x_p \cdot \sin S + y_p \cdot \cos S \\ -v' \cdot \cos S - \delta\varepsilon \cdot \sin S + x_p & v' \cdot \sin S - \delta\varepsilon \cdot \cos S - y_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.62)$$

Здесь обозначено

$$v' = v + \delta v.$$

Переменная S является модифицированным звездным временем и рассчитывается по формуле [142]

$$S = S_0 + \dot{S} \cdot (t - t_0)_{UT1}. \quad (1.63)$$

Звездное время S_0 определяется как

$$S_0 = 100^0.0755417 + 35999^0.48875625 \cdot \bar{t}_0 - 0^0.83333 \cdot 10^{-6} \cdot \bar{t}_0^2 + 15 \cdot t_0 + \mu + \delta\mu, \quad (1.64)$$

$$\dot{S} = (35999^0.48875625 - 0^0.83333 \cdot 10^{-6} \cdot \bar{t}_0) / 876600 + 15, \quad (1.65)$$

$$\bar{t}_0 = (JD(d) + t_0^h / 24^h - JD(d_0)) / 36525, \quad \mu = \omega + k, \quad (1.66)$$

$$\delta\mu = \Delta\mu_t - \Delta\mu_{t_0}, \quad \delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_t - \Delta\varepsilon_{t_0}, \quad \delta v = \Delta v_t - \Delta v_{t_0}, \quad (1.67)$$

где μ – общая прецессия по прямому восхождению истинной точки весеннего равноденствия за период $t_0 - t_b$ (t_b – начало Бесселева тропического года 1950.0) [137];

$JD(d)$ – юлианский день 0^h UT1 текущей даты d ;

$JD(d_0)$ – юлианский день 0^h UT1 даты d_0 задания НУ движения КА.

В формулах (1.63) – (1.67) моменты времени t и t_0 должны быть заданы в

шкале Всемирного времени $UT1$.

Величины v' , $\delta\varepsilon$, x_p , y_p и UT могут быть заранее аппроксимированы на отрезке времени $[t_0, t]$ степенным полиномом с аргументом $\Delta t = t - t_0$, который задается в равномерной шкале времени RT [138, 142]:

$$v' = \sum_{k=0}^L v_k \cdot \Delta t^k, \quad \delta\varepsilon = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k \cdot \Delta t^k, \quad (1.68)$$

$$x_p = \sum_{k=0}^{L1} x_k \cdot \Delta t^k, \quad y_p = \sum_{k=0}^{L1} y_k \cdot \Delta t^k, \quad (1.69)$$

$$UT = \sum_{k=0}^{L1} UT_k \cdot \Delta t^k, \quad (1.70)$$

где v_k , ε_k , x_k , y_k , UT_k – коэффициенты полиномов;

L и $L1$ – порядки полиномов.

Матрицу $\dot{\mathbf{P}}$ получаем дифференцированием матрицы \mathbf{P} по времени [51, 55]:

$$\dot{\mathbf{P}}^T = \dot{S} \cdot \begin{bmatrix} -\sin S & \cos S & (-\dot{S}^{-1} \cdot \dot{v}' - \delta\varepsilon) \cdot \cos S + (v' - \dot{S}^{-1} \cdot \delta\varepsilon) \cdot \sin S \\ -\cos S & -\sin S & (\dot{S}^{-1} \cdot \dot{v}' + \delta\varepsilon) \cdot \sin S + (v' - \dot{S}^{-1} \cdot \delta\varepsilon) \cdot \cos S \\ \dot{S}^{-1} \cdot \dot{v}' + x_p \cdot \sin S - y_p \cdot \cos S & \dot{S}^{-1} \cdot \delta\varepsilon - x_p \cdot \cos S - y_p \cdot \sin S & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.71)$$

где $\delta\dot{\varepsilon}$ – скорость изменения нутации по наклону на отрезке времени Δt .

В выражении (1.71) величина \dot{v}' определяется по формуле

$$\dot{v}' = \dot{v} + \delta\dot{v},$$

где \dot{v} и $\delta\dot{v}$ – скорости изменений прецессии и нутации по склонению на отрезке времени Δt .

Выражения для вычисления \dot{v}' и $\delta\dot{\varepsilon}$ получаем дифференцированием по времени полиномов, определяющих значения параметров v' и $\delta\varepsilon$:

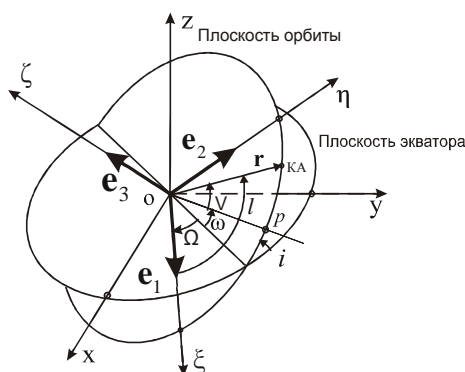
$$\dot{\mathbf{v}}' = \sum_{k=1}^L k \cdot \mathbf{v}_k \cdot \Delta t^{k-1}, \quad \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{k=1}^L k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \Delta t^{k-1}, \quad (1.72)$$

Выражения (1.69) и (1.70) представляют собой кинематические модели изменения ПВЗ, а величины $x_0, \dots, x_{L1}, y_0, \dots, y_{L1}, UT_0, \dots, UT_{L1}$ являются параметрами этих моделей.

Для расчета прямоугольных координат векторов положения и скорости спутника по его регулярным элементам (см. 1.5) удобнее использовать инерциальную прямоугольную орбитальную систему координат ($O\xi\eta\zeta$) (рисунок 1.4). Ее образует ортонормированный базис

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3], \quad (1.73)$$

начало которого совмещено с центром масс Земли. Компоненты базисных векторов в выражении (1.73) являются функциями регулярных элементов орбиты спутника и определяются по формулам (В.4) (приложение В).



i – наклонение орбиты, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перигея, ν – истинная аномалия, \mathbf{r} – геоцентрический радиус-вектор КА, p – перигей орбиты, ($охуз$) – звездная система координат

Рисунок 1.4 – Инерциальная орбитальная система координат ($O\xi\eta\zeta$)

В этой системе координат ось абсцисс ξ лежит в плоскости орбиты и образует с радиус-вектором \mathbf{r} спутника угол $l = \Omega + \omega + \nu$. Согласно правилам линейной алгеб-

ры матричное преобразование радиуса-вектора положения \mathbf{r} и скорости $\dot{\mathbf{r}}$ спутника из звездной системы координат ($oxyz$) в орбитальную ($O\xi\eta\zeta$) будет иметь вид [103]:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{r}, \quad (1.74)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_e = \mathbf{e}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.75)$$

где $\mathbf{r}_e = [\xi \eta \zeta]^T$ – радиус-вектор спутника в орбитальной системе координат;

$\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ – радиус-вектор спутника в звездной системе координат;

$\dot{\mathbf{r}}_e = [\dot{\xi} \ \dot{\eta} \ \dot{\zeta}]^T$ – вектор геоцентрической скорости спутника в орбитальной системе координат;

$\dot{\mathbf{r}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ – вектор геоцентрической скорости спутника в звездной системе координат.

Выполнив скалярное произведение векторов в выражении (1.74), получим проекции вектора \mathbf{r} на оси орбитальной системы координат [173]:

$$\mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{e}_2^T \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{e}_3^T \cdot \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos l \\ r \cdot \sin l \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.76)$$

Дифференцирование по времени правой и левой частей равенства (1.76) позволяет получить зависимости для определения проекций вектора скорости КА на оси орбитальной системы координат

$$\dot{\mathbf{r}}_e = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{e}_2^T \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{e}_3^T \cdot \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \cdot \cos l - r \cdot \sin l \cdot \dot{l} \\ \dot{r} \cdot \sin l + r \cdot \cos l \cdot \dot{l} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.77)$$

Для практического использования в плане расчета величин $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ следует

применять выражения (В.6) (приложение В). Значения геоцентрического расстояния r и скорости \dot{r} спутника в функциях от регулярных элементов орбиты определяются по формулам (1.138) и (В.5) (приложение В) соответственно.

Обратные к выражениям (1.74) и (1.75) матричные преобразования имеют вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_e, \quad (1.78)$$

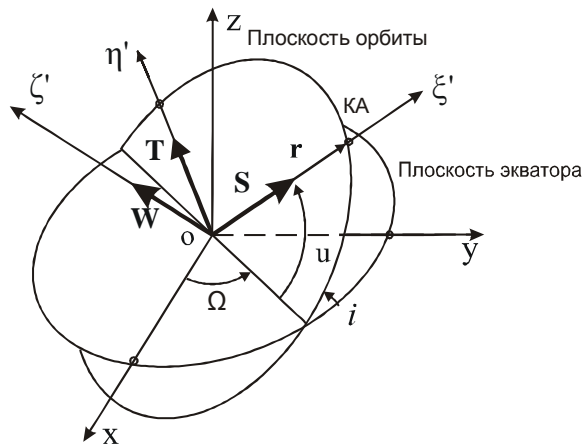
$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{r}}_e \quad (1.79)$$

или

$$\mathbf{r} = \xi \cdot \mathbf{e}_1 + \eta \cdot \mathbf{e}_2, \quad (1.80)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\xi} \cdot \mathbf{e}_1 + \dot{\eta} \cdot \mathbf{e}_2. \quad (1.81)$$

Наряду с описанной выше системой, в космической геодезии также активно используется и орбитальная система координат ($O\xi'\eta'\zeta'$) (рисунок 1.5).



u – аргумент широты КА, $(oxuz)$ – звездная система координат

Рисунок 1.5 – Орбитальная система координат ($O\xi'\eta'\zeta'$)

Она удобна для пересчета параметров движения КА (например, кеплеровых элементов) в прямоугольные координаты векторов положения и скорости спутника, для учета возмущающих ускорений, влияющих на движение спутника

по орбите и т.д. У нее ось абсцисс $O\xi'$ постоянно направлена на КА, ось $O\zeta'$ совпадает с вектором кинетического момента, ось $O\eta'$ лежит в плоскости орбиты и дополняет систему до правой. Эту систему координат образует ортонормированный базис **S**, **T** и **W**, задающий направление координатных осей ξ' , η' и ζ' . Начало этой системы совмещено с центром масс Земли.

Матричные преобразования векторов положения **r** и скорости $\dot{\mathbf{r}}$ спутника из орбитальной системы координат ($O\xi'\eta'\zeta'$) в звездную ($охуз$) имеют вид [146]

$$\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{S}, \quad (1.82)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = V_r \cdot \mathbf{S} + V_n \cdot \mathbf{T}, \quad (1.83)$$

где r – геоцентрическое расстояние до КА;

V_r – радиальная скорость КА;

V_n – трансверсальная скорость КА.

В выражениях (1.82) и (1.83) скорости V_r и V_n являются функциями кеплеровых элементов орбиты. Они вычисляются согласно выражениям [10, 146]:

$$V_r = \sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot e \cdot \sin v, \quad V_n = \sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot (1 + e \cdot \cos v), \quad (1.84)$$

где μ – гравитационный параметр Земли;

p – фокальный параметр;

e – эксцентриситет орбиты КА;

v – истинная аномалия.

Базисные векторы **S**, **T** и **W** также являются функциями кеплеровых элементов. Они определяются по формулам [91, 146, 147]:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ \cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \sin u \cdot \sin i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin u \cdot \cos \Omega - \cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ -\sin u \cdot \sin \Omega + \cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \cos u \cdot \sin i \end{bmatrix}, \quad (1.85)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sin \Omega \cdot \sin i \\ -\cos \Omega \cdot \sin i \\ \cos i \end{bmatrix},$$

где u – аргумент широты КА;

Ω – долгота восходящего узла орбиты;

i – наклонение орбиты КА.

1.4 Общие положения и математическая постановка задачи определения геодезических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников

Для оценивания состояния нелинейной динамической системы, состоящей из нескольких КА и сети НП, в космической геодезии используются несколько методов, в основном различающихся между собой набором компонент вектора оцениваемых параметров и применяемой теории построения спутниковых орбит. К таким методам относятся: динамический, полудинамический [10, 138, 146, 180], коротких дуг [21, 148, 168, 174], транслокации [114, 174, 184, 192], точечного позиционирования [168, 174, 184, 192]. К основным задачам, которые позволяют решать эти методы, относятся:

- уточнение параметров гравитационного поля Земли;
- определение пространственных положений НП в заданной геодезической системе координат и создание на поверхности Земли единой мировой опорной геодезической сети;
- определение ЭВО геодезических систем координат;
- определение ПВЗ с целью изучения движения земных полюсов и

неравномерности вращения Земли вокруг своей оси.

Использование отмеченных выше методов оценивания состояния динамической системы сводится к формированию и решению уравнений измерений, использующих различные виды траекторных измерений КА. К ним относятся: оптические (фотографические, лазерные), запросные и беззапросные радиотехнические (доплеровские, радиодальномерные). Все эти виды измерений различаются между собой по точности, оперативности, универсальности (в смысле их всепогодного и круглосуточного применения).

Применительно к орбитальному методу космической геодезии далее рассмотрим теорию формирования уравнений поправок для анализа поведения принятой нелинейной ДС на заданном отрезке времени T по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений КА [88, 135]. Заметим, что эти уравнения являются составной частью уравнений поправок динамического метода. В качестве вектора \mathbf{q} параметров состояния этой системы в текущий момент времени t примем вектор-столбец

$$\mathbf{q} = [\mathbf{Y}_1 \dots \mathbf{Y}_g \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{R}}_1 \dots \mathbf{R}_l \dot{\mathbf{R}}_l d\mathbf{R} \boldsymbol{\omega} k \Theta]^T, \quad (1.86)$$

где \mathbf{Y}_i – шестимерный вектор-столбец элементов орбиты i -го КА ($i = 1, 2, \dots, g$; g – число КА);

$\mathbf{R}_j, \dot{\mathbf{R}}_j$ – определяемые из выражения (1.61) трехмерные векторы-столбцы прямоугольных координат положения и скорости j -го НП в звездной системе координат ($j = 1, 2, \dots, l$; l – число НП, результаты измерений с которых приняты в обработку);

$d\mathbf{R}$ – трехмерный вектор-столбец смещения начала референцной системы координат относительно начала общеземной системы;

$\boldsymbol{\omega}$ – трехмерный вектор-столбец малых углов поворота координатных осей референцной системы координат относительно осей общеземной системы;

k – поправка к масштабу референцной системы координат;

Θ – трехмерный вектор-столбец ПВЗ вида $\Theta = [x_p \ y_p \ UT]^T$.

Будем считать, что в результатах измерений присутствуют сингулярные ошибки вида (1.26) и (1.38). Поэтому задачу оценивания сведем к отысканию компонент вектора \mathbf{q}_0 начального состояния системы в некоторый заданный момент времени t_0 и компонент вектора мешающих параметров Γ .

Уравнения измерений (1.5) являются нелинейными функциями векторов \mathbf{q} и Γ . Для упрощения решения задачи оценивания необходимо выполнить линеаризацию этих уравнений, разлагая функцию φ в ряд Тейлора в малой окрестности априорных значений векторов \mathbf{q} и Γ , удерживая при этом только линейные члены разложения. В результате можно записать

$$\varphi(\mathbf{q}, \Gamma, t) = \varphi(\mathbf{q}', \Gamma', t) + \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{q}, \Gamma, t)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}' \\ \Gamma=\Gamma'}} \cdot \Delta \mathbf{q} + \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{q}, \Gamma, t)}{\partial \Gamma} \right|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}' \\ \Gamma=\Gamma'}} \cdot \Delta \Gamma, \quad (1.87)$$

где \mathbf{q}' , Γ' – априорные значения векторов \mathbf{q} и Γ соответственно.

В уравнениях (1.87) разности $\Delta \mathbf{q}$ и $\Delta \Gamma$ определяются как

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}', \quad \Delta \Gamma = \Gamma - \Gamma'. \quad (1.88)$$

Рассматриваемая динамическая система является прогнозируемой, т.е. для нее выполняется равенство (1.2). Следовательно, справедливо дифференциальное соотношение

$$\Delta \mathbf{q} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}_0} \right|_{\mathbf{q}_0=\mathbf{q}'_0} \cdot \Delta \mathbf{q}_0, \quad (1.89)$$

в котором матрица частных производных рассчитывается для априорных значений вектора \mathbf{q}'_0 НУ, а вектор $\Delta \mathbf{q}_0$ находится как

$$\Delta \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}'_0. \quad (1.90)$$

С учетом выражений (1.20) и (1.89), равенство (1.87) примет вид:

$$\varphi(\mathbf{q}, \Gamma, t) = \varphi(\mathbf{q}', \Gamma', t) + \left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{q}, \Gamma, t)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}' \\ \Gamma=\Gamma'}} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}_0} \right|_{\mathbf{q}_0=\mathbf{q}'_0} \cdot \Delta \mathbf{q}_0 + \mathbf{П} \cdot \Delta \Gamma. \quad (1.91)$$

Здесь матрица $\mathbf{П}$ рассчитывается по формуле (1.20) с использованием априорно заданного вектора \mathbf{q}' параметров состояния анализируемой ДС.

Подставив равенство (1.91) в выражение (1.15), с учетом зависимости (1.5), в общем виде получим систему уравнений поправок на текущий момент времени t

$$\left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{q}, \Gamma, t)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}' \\ \Gamma=\Gamma'}} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}_0} \right|_{\mathbf{q}_0=\mathbf{q}'_0} \cdot \Delta \mathbf{q}_0 + \mathbf{П} \cdot \Delta \Gamma = \tilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z} + \mathbf{V}_z, \quad (1.92)$$

где $\Delta \mathbf{q}_0$ – r -мерный вектор-столбец поправок к вектору \mathbf{q}'_0 априорных значений вектора \mathbf{q}_0 параметров состояния ДС на начальный момент времени t_0 ;

$\tilde{\mathbf{Z}}$ – d -мерный вектор-столбец результатов измерений вида (1.8);

\mathbf{Z} – d -мерный вектор-столбец первичных измеряемых псевдопараметров вида (1.4), рассчитываемый на момент t по формулам (1.2), (1.5) и (1.23) с использованием векторов \mathbf{q}'_0 и Γ' ;

\mathbf{V}_z – d -мерный вектор-столбец поправок к вектору $\tilde{\mathbf{Z}}$.

В уравнениях (1.92) векторы \mathbf{Z} и \mathbf{V}_z определяются по формулам

$$\mathbf{Z} = \varphi(\mathbf{q}', \Gamma', t),$$

$$\mathbf{V}_z = \xi + \eta,$$

где ξ – случайный d -мерный вектор-столбец ошибок измерений;

$\boldsymbol{\eta}$ – случайный d -мерный вектор-столбец ошибок моделей измерений.

Так как рассматриваемая ДС на отрезке времени T является прогнозируемой, то задача оценивания сводится к отысканию компонент расширенного вектора \mathbf{Q}_0 начального состояния системы на некоторый начальный момент времени t_0 . Вектор \mathbf{Q}_0 сформирован на основе вектора \mathbf{q} из равенства (1.86), в котором согласно матричному выражению (1.61) вместо векторов \mathbf{R} и $\dot{\mathbf{R}}$ принят вектор \mathbf{R}_G положения НП в общеземной системе координат. В результате расширенный вектор оцениваемых параметров для одного сеанса измерений примет вид

$$\mathbf{Q}_0 = [\Gamma \ Y_{01} \dots Y_{0g} \ \mathbf{R}_{G1} \dots \mathbf{R}_{Gl} \ d\mathbf{R} \ \omega \ k \ \Theta_0]^T, \quad (1.93)$$

где Γ – вектор-столбец мешающих параметров в одном сеансе измерений;

Y_{0i} – шестимерный вектор-столбец НУ движения i -го КА ($i = 1, 2, \dots, g$; g - число КА);

\mathbf{R}_{Gj} – трехмерный вектор-столбец прямоугольных координат j -го НП ($j = 1, 2, \dots, l$; l – число определяемых НП) в общеземной системе;

Θ_0 – вектор-столбец параметров кинематических моделей изменения ПВЗ.

Вектор-столбец Θ_0 в равенстве (1.93) состоит из коэффициентов полиномов, представленных выражениями (1.69) и (1.70), и имеет вид

$$\Theta_0 = [x_0 \dots x_{L1} \ y_0 \dots y_{L1} \ UT_0 \dots UT_{L1}]^T. \quad (1.94)$$

Теперь система уравнений поправок (1.92) для совместного оценивания НУ движения КА, ПВЗ и координат НП, заданных в общеземной системе, примет вид

$$\mathbf{P} \cdot \Delta \Gamma + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} \cdot \Delta \mathbf{Y}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \mathbf{R}_G} \cdot \Delta \mathbf{R}_G +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta_0} \cdot \Delta \Theta_0 = \tilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z} + \mathbf{V}_Z, \quad (1.95)$$

где $\Delta \Gamma$, $\Delta \mathbf{Y}_0$, $\Delta \mathbf{R}_G$ и $\Delta \Theta_0$ – векторы-столбцы поправок к одноименным априорным (приближенным) значениям векторов-столбцов, заданных на начальный момент времени t_0 .

Если спутниковые измерения выполнены с НП, пространственные положения которых известны с достаточно высокой точностью в референцной системе координат $(OXYZ)_Г$, то присутствие вектора $\Delta \mathbf{R}_G$ в уравнениях (1.95) будет обусловлено несовпадением референцной и общеземной систем координат. Этот вектор легко получается из формулы (1.54) как разность

$$\Delta \mathbf{R}_G = \mathbf{R}_G - \mathbf{R}_Г = d\mathbf{R} + k \cdot \mathbf{R}_Г + \mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (1.96)$$

Подставив значение вектора $\Delta \mathbf{R}_G$ из равенства (1.96) в выражение (1.95), получим общий вид системы уравнений поправок для совместного оценивания по результатам измерений одного сеанса начальных условий движения КА, ПВЗ и ЭВО референцной системы координат относительно общеземной:

$$\begin{aligned} \mathbf{П} \cdot \Delta \Gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} \cdot \Delta \mathbf{Y}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \mathbf{R}_G} \cdot (d\mathbf{R} + k \cdot \mathbf{R}_Г + \mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}) + \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta_0} \cdot \Delta \Theta_0 = \tilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z} + \mathbf{V}_Z, \end{aligned} \quad (1.97)$$

Теперь получим общий вид системы уравнений поправок для вторичных измеряемых псевдопараметров при оценивании состояния изучаемой динамической системы по результатам измерений одного сеанса. Для этого воспользуемся зависимостью (1.29), в которой вектор-столбец вторичных измеряемых псевдопараметров Λ представлен формулами (1.30) и (1.31).

Очевидно, что тогда системы уравнений поправок, аналогичных по назначению уравнениям (1.95) и (1.97), имеют вид [35, 36]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \Lambda} \cdot (\mathbf{E} \cdot \Delta \Gamma + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} \cdot \Delta \mathbf{Y}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \mathbf{R}_G} \cdot \Delta \mathbf{R}_G + \\ + \frac{\partial \psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta_0} \cdot \Delta \Theta_0) = \tilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z} + \mathbf{V}_Z, \end{aligned} \quad (1.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \Lambda} \cdot (\mathbf{E} \cdot \Delta \Gamma + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} \cdot \Delta \mathbf{Y}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \mathbf{R}_G} \cdot (d\mathbf{R} + k \cdot \mathbf{R}_\Gamma + \mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}) + \\ + \frac{\partial \psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta_0} \cdot \Delta \Theta_0) = \tilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z} + \mathbf{V}_Z, \end{aligned} \quad (1.99)$$

где \mathbf{E} – матрица частных производных вида (1.32), являющаяся матрицей коэффициентов перед неизвестным вектором $\Delta \Gamma$, рассчитывается по априорным (приближенным) значениям вектора $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$.

Перемножив левые и правые части уравнений (1.98) и (1.99) на матрицу $\left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \Lambda} \right]^{-1}$, получим общий вид системы уравнений поправок для вторичных измеряемых псевдопараметров при совместном оценивании начальных условий движения КА, ПВЗ и координат НП

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \Delta \Gamma + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} \cdot \Delta \mathbf{Y}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \mathbf{R}_G} \cdot \Delta \mathbf{R}_G + \\ + \frac{\partial \psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta_0} \cdot \Delta \Theta_0 = \tilde{\Lambda} - \Lambda + \mathbf{V}_\Lambda, \end{aligned} \quad (1.100)$$

а также систему уравнений поправок для совместного оценивания НУ движения КА, ПВЗ и ЭВО

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \Delta \Gamma + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} \cdot \Delta \mathbf{Y}_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \mathbf{R}_G} \cdot (d\mathbf{R} + k \cdot \mathbf{R}_F + \mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}) + \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta_0} \cdot \Delta \Theta_0 = \tilde{\Lambda} - \Lambda + \mathbf{V}_\Lambda, \end{aligned} \quad (1.101)$$

где $\tilde{\Lambda}$ – d -мерный вектор-столбец результатов измерений вторичных измеряемых параметров;

Λ – d -мерный вектор-столбец вторичных измеряемых псевдопараметров;

\mathbf{V}_Λ – d -мерный вектор-столбец поправок к вектору $\tilde{\Lambda}$.

В уравнениях (1.100) и (1.101) векторы-столбцы $\tilde{\Lambda}$ и Λ определяются по формулам

$$\tilde{\Lambda} = \left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \Lambda} \right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}, \quad (1.102)$$

$$\Lambda = \left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \Lambda} \right]^{-1} \cdot \mathbf{Z}, \quad (1.103)$$

$$\mathbf{V}_\Lambda = \left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \Lambda} \right]^{-1} \cdot \mathbf{V}_Z. \quad (1.104)$$

Ниже рассмотрим широко используемый метод статистической обработки результатов траекторных измерений КА, в котором за критерий качества принят минимум суммы квадратов компонент вектора поправок. Такой метод статистической обработки измерений называется методом наименьших квадратов.

Пусть в течение нескольких сеансов на отрезке времени T в дискретные моменты t_1, t_2, \dots, t_m (m – общее число измерений, взятых в обработку) выполнены неравноточные траекторные измерения КА, которым соответствует модель измерений (1.5). Будем считать, что вектор $\bar{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}(t_1) \mathbf{q}(t_2) \dots \mathbf{q}(t_m)]^T$ параметров состояния принятой нелинейной ДС на эти моменты времени определяется по известным начальным условиям \mathbf{q}_0 равенства (1.3) с помощью моделей движения для КА – формулы (1.137), для НП – формулы (1.61), для ПВЗ – формулы (1.69) и

(1.70). В этом случае расширенный n -мерный вектор оцениваемых параметров, определяемый выражением (1.93), примет вид

$$\mathbf{Q}_0 = [\bar{\Gamma} \ Y_{01} \dots Y_{0g} \ \mathbf{R}_{G1} \dots \mathbf{R}_{Gl} \ d\mathbf{R} \ \omega \ k \ \Theta_0]^T. \quad (1.105)$$

Здесь совокупный вектор-столбец мешающих параметров $\bar{\Gamma}$ размерности $k \cdot p$ и размерность n вектора \mathbf{Q}_0 определяются как

$$\bar{\Gamma} = [\Gamma(t_1) \ \Gamma(t_2) \ \dots \ \Gamma(t_p)]^T, \quad (1.106)$$

$$n = k \cdot p + 6 \cdot g + 3 \cdot l + 7 + 3 \cdot (L1 + 1), \quad (1.107)$$

где k – размерность вектора Γ ;

p – число сеансов измерений;

g – число КА;

l – число определяемых НП;

$L1$ – порядок полиномов (1.69) и (1.70).

Будем также считать, что математическое ожидание совместного влияния случайных ошибок измерений $\bar{\xi} = [\xi(t_1) \ \xi(t_2) \ \dots \ \xi(t_m)]^T$ и модели измерений $\bar{\eta} = [\eta(t_1) \ \eta(t_2) \ \dots \ \eta(t_m)]^T$ равно нулю $\mathbf{M}(\bar{\xi} + \bar{\eta}) = 0$, а ковариационная матрица $\mathbf{D}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \mathbf{D}(\bar{\xi} + \bar{\eta})$ известна. Требуется найти такую оценку $\hat{\mathbf{Q}}_0$ вектора оцениваемых параметров \mathbf{Q}_0 , для которого квадратичная форма

$$S(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\Gamma}) = [\tilde{\Lambda} - \mathbf{U}(\hat{\mathbf{Q}}_0)]^T \cdot \mathbf{D}^{-1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot [\tilde{\Lambda} - \mathbf{U}(\hat{\mathbf{Q}}_0)] \quad (1.108)$$

достигает своего минимума. Здесь вектор-столбец вторичных измеряемых псевдопараметров $\mathbf{U}(\hat{\mathbf{Q}}_0)$, рассчитываемый по приближенным значениям вектора $\hat{\mathbf{Q}}_0$ оцениваемых параметров и результатам измерений вторичных измеряемых

параметров $\tilde{\Lambda}$, имеет вид

$$\mathbf{U}(\hat{\mathbf{Q}}_0) = \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{F}(\hat{\mathbf{q}}_0, t_1), \hat{\Gamma}_1) \\ \dots \\ \Psi(\mathbf{F}(\hat{\mathbf{q}}_0, t_m), \hat{\Gamma}_p) \end{bmatrix}, \quad (1.109)$$

$$\tilde{\Lambda} = [\tilde{\Lambda}(t_1) \tilde{\Lambda}(t_2) \dots \tilde{\Lambda}(t_m)]^T, \quad (1.110)$$

где p – общее число сеансов;

m – общее число измерений.

Для выполнения этого требования должно соблюдаться равенство

$$\frac{\partial S(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\Gamma})}{\partial \hat{\mathbf{Q}}_0} = 0, \quad (1.111)$$

где $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\Gamma}$ – оценки векторов $\bar{\mathbf{q}}$ и $\bar{\Gamma}$.

Согласно правилу дифференцирования векторных функций получим

$$\left[\frac{\partial \mathbf{U}(\hat{\mathbf{Q}}_0)}{\partial \hat{\mathbf{Q}}_0} \right]^T \cdot \mathbf{D}^{-1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot [\tilde{\Lambda} - \mathbf{U}(\hat{\mathbf{Q}}_0)] = 0, \quad (1.112)$$

Последнее выражение представляет собой систему нелинейных уравнений. В ней функциональная матрица

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}(\hat{\mathbf{Q}}_0)}{\partial \hat{\mathbf{Q}}_0}, \quad (1.113)$$

есть прямоугольная $m \times n$ матрица частных производных от измеряемых вектор-функций по компонентам вектора $\hat{\mathbf{Q}}_0$.

Система нелинейных уравнений (1.112) решается итерационными методами. Наибольшее распространение получил метод последовательных приближений Гаусса-Ньютона [89, 90, 146, 157]. Использование этого метода предусматривает линеаризацию измеряемых вектор-функций в окрестности априорных (приближенных) значений оцениваемых параметров. Применяв метод Гаусса-Ньютона для решения системы нелинейных уравнений (1.112), получим выражение

$$\widehat{\mathbf{Q}}_0^{(j+1)} = \widehat{\mathbf{Q}}_0^{(j)} + \Delta \mathbf{Q}_0^{(j)}. \quad (1.114)$$

В нем вектор-столбец поправок

$$\Delta \mathbf{Q}_0 = [\Delta \bar{\Gamma} \ \Delta \mathbf{Y}_{01} \ \dots \ \Delta \mathbf{Y}_{0h} \ \Delta \mathbf{R}_{G1} \ \dots \ \Delta \mathbf{R}_{G1} \ \Delta \boldsymbol{\Theta}_0]^T \quad (1.115)$$

к приближенным значениям вектора оцениваемых параметров $\widehat{\mathbf{Q}}_0^{(j)}$ равенства (1.105) определяется как

$$\Delta \mathbf{Q}_0^{(j)} = (\mathbf{A}_{(j)}^T \cdot \mathbf{D}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \cdot \mathbf{A}_{(j)})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{(j)}^T \cdot \mathbf{D}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \cdot [\tilde{\bar{\Lambda}} - \mathbf{U}(\widehat{\mathbf{Q}}_0^{(j)})]. \quad (1.116)$$

Выражение (1.114) позволяет найти уточненную оценку $\widehat{\mathbf{Q}}_0^{(j+1)}$ вектора оцениваемых параметров (индекс в круглых скобках означает номер приближения). Итерационный процесс заканчивается при выполнении критерия

$$\Delta \mathbf{Q}_0^{(j)} = \left| \widehat{\mathbf{Q}}_0^{(j+1)} - \widehat{\mathbf{Q}}_0^{(j)} \right| \leq \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.117)$$

где j – номер приближения;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор-столбец априорно заданных малых параметров, размерность которого соответствует размерности вектора оцениваемых параметров равенства (1.105).

После завершения итерационного процесса ковариационная матрица полученных оценок $\widehat{\mathbf{Q}}_0$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{D}(\widehat{\mathbf{Q}}_0) = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{D}^{-1}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}) \cdot \mathbf{A})^{-1}. \quad (1.118)$$

Используя общепринятые обозначения, систему уравнений поправок вида (1.101) для всех видов измерений, принятых в обработку, можно записать как

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{V}, \quad (1.119)$$

где \mathbf{X} – вектор-столбец неизвестных вида (1.115), состоящий из поправок к приближенному значению вектора оцениваемых параметров \mathbf{Q}_0 равенства (1.105);

\mathbf{F} – m -мерный вектор-столбец правой части;

\mathbf{V} – вектор-столбец поправок к вектору $\tilde{\bar{\Lambda}}$ результатов измерений.

Система уравнений (1.119) представляет собой несовместную СЛАУ. В ней вектор-столбец \mathbf{F} определяется по формуле

$$\mathbf{F} = \tilde{\bar{\Lambda}} - \bar{\Lambda} = \tilde{\bar{\Lambda}} - \mathbf{U}(\widehat{\mathbf{Q}}_0^{(j)}). \quad (1.120)$$

Здесь вектор-столбец $\bar{\Lambda}$ вторичных измеряемых псевдопараметров, рассчитываемый по приближенным значениям вектора оцениваемых параметров, имеет вид

$$\bar{\Lambda} = \Lambda(t_1) \Lambda(t_2) \dots \Lambda(t_m)^T. \quad (1.121)$$

Как уже отмечалось выше, решение нелинейной задачи МНК включает процедуру замены нелинейной задачи оценивания на линейную, т.е. переход от

нелинейных моделей измерений к линейным. В частности, решение системы нелинейных уравнений методом Гаусса-Ньютона предусматривает последовательное выполнение ряда линейных задач до достижения принятого критерия окончания итеративного процесса. Иными словами, неоднократно решается линейная задача наименьших квадратов, суть которой заключается в следующем [17, 104, 150]. Задана несовместная СЛАУ(1.119). Требуется найти такой действительный вектор $\hat{\mathbf{X}}$, для которого евклидова норма $\|\cdot\|_E$ вектора $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{F}$ будет минимальной:

$$\min \|\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{F}\|_E, \quad (1.122)$$

где $\hat{\mathbf{X}}$ – оценка вектора \mathbf{X} (или вектор решений).

По отношению к несовместной системе уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cong \mathbf{F} \quad (1.123)$$

\mathbf{V} будет вектором невязок [7], значение которого определяется равенством

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{F}. \quad (1.124)$$

Геометрически условие (1.122) означает, что необходимо найти такую точку с координатами $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}}$ в n системе m -мерных базисных векторов

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n], \quad (1.125)$$

которая ближе всего находится к вектору \mathbf{F} по евклидовой норме. Этому требованию удовлетворяет точка, для которой вектор невязок \mathbf{V} будет ортогонален каждому базисному вектору \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, n$), то есть

$$\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{F}) = 0. \quad (1.126)$$

Матричная запись (1.126) представляет собой совместную СЛАУ известную под названием линейной системы нормальных уравнений с квадратной $n \times n$ матрицей коэффициентов $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ и вектором правой части $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{F}$. Решением этой системы является вектор

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (1.127)$$

Обобщенным решением (псевдорешением) системы (1.123), в смысле наименьших квадратов, будет любой вектор $\hat{\mathbf{X}}$, для которого евклидова норма вектора невязок \mathbf{V} из (1.124) достигает наименьшего значения (1.122). Решение $\hat{\mathbf{X}}$, имеющее наименьшую евклидову норму $\min \|\hat{\mathbf{X}}\|_E$, будет нормальным обобщенным решением (нормальным псевдорешением) [117]. Обобщенные решения и только они удовлетворяют СЛАУ (1.126). Если матрица \mathbf{A} неполного ранга, то существует бесчисленное множество обобщенных решений. Среди них имеется нормальное псевдорешение, которое всегда существует и единственно. Как будет показано ниже, единственное решение СЛАУ (1.123) находится из выражения [89, 104, 117]

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{F}, \quad (1.128)$$

где \mathbf{A}^+ – псевдообратная (либо эффективная псевдообратная) матрица для матрицы \mathbf{A} .

На заключительном этапе линейной задачи МНК можно находить вектор $\hat{\mathbf{X}}$ из решения СЛАУ с квадратной (равенство (1.127)) либо прямоугольной (равенство (1.128)) матрицей коэффициентов. Зачастую такие матрицы определены с ошибками. Кроме того, элементы этих матриц в оперативной памяти

компьютера представляются также с ошибками. Вполне возможно, что матрица коэффициентов будет неполного ранга (факт нерегулярной постановки измерительной задачи) или близка к этому (факт некорректной постановки измерительной задачи). А это приводит либо к неопределенности решения, либо к повышению чувствительности решения СЛАУ к ошибкам входных данных. В связи с перечисленными выше положениями, на этапе постановки задачи оценивания необходимо выбрать оптимальную стратегию ее решения и правильно интерпретировать полученные результаты. Поэтому необходимо применять современные методы вычислительной алгебры, чтобы обеспечить регулярную и корректную постановку задачи оценивания расширенного вектора параметров состояния конкретной нелинейной ДС [53, 82].

Заключительный этап выполнения линейной задачи МНК – решение СЛАУ (1.119) представим в виде решающей подсистемы и рассмотрим методику исследования ее устойчивости. У этой системы входом служат матрица коэффициентов и вектор правой части, а выходом – векторы $\hat{\mathbf{X}}$ и \mathbf{V} .

По определению А. Н. Тихонова и В. Я. Арсенина решение СЛАУ будет устойчивым, если малым изменениям входных данных соответствуют малые изменения вектора решения [143]. Решение неустойчиво, если малые изменения входных данных могут привести к большим изменениям вектора решения. Линейные системы, чувствительные к изменению входных данных, называются плохо обусловленными или неустойчивыми [25, 117]. Такие СЛАУ содержат плохо обусловленные матрицы коэффициентов [154].

При наличии возмущений $\Delta\mathbf{A}$ и $\Delta\mathbf{F}$ матрицы коэффициентов и вектора правой части фактически решается система уравнений

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) \cdot \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}, \quad (1.129)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}$ – n -мерный вектор-столбец решения этой возмущенной системы.

Верхний предел его относительной ошибки

$$\varepsilon_X = \|\widehat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|_E / \|\mathbf{X}\|_E \quad (1.130)$$

согласно [24, 104] определяется неравенством

$$\varepsilon_X \leq \mu(\mathbf{A}) \cdot [(1 + \mu(\mathbf{A}) \cdot \alpha) \cdot \varepsilon_A + \gamma \cdot \varepsilon_F] / (1 - \mu(\mathbf{A}) \cdot \varepsilon_A) \quad (1.131)$$

с параметрами

$$\varepsilon_A = \|\Delta \mathbf{A}\|_E / \|\mathbf{A}\|_E, \quad \varepsilon_F = \|\Delta \mathbf{F}\|_E / \|\mathbf{F}\|_E, \quad (1.132)$$

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{V}\|_E}{\|\mathbf{A}\|_E \cdot \|\mathbf{X}\|_E} \leq \frac{\|\mathbf{V}\|_E}{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}\|_E}, \quad \gamma = \frac{\|\mathbf{F}\|_E}{\|\mathbf{A}\|_E \cdot \|\mathbf{X}\|_E} \leq \frac{\|\mathbf{F}\|_E}{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}\|_E}, \quad \mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_E \cdot \|\mathbf{A}^+\|_E, \quad (1.133)$$

где $\mu(\mathbf{A})$ – число обусловленности матрицы \mathbf{A} .

Из неравенства (1.131) следует, что устойчивость решения СЛАУ к изменению входных данных существенно зависит от числа обусловленности $\mu(\mathbf{A})$. Оно выступает в роли коэффициента увеличения совместного влияния относительных ошибок матрицы коэффициентов ε_A и вектора правой части ε_F на результат: с увеличением числа обусловленности, соответственно, увеличивается и относительная ошибка решения ε_X . Если число обусловленности мало (близко к единице), то матрица \mathbf{A} будет хорошо обусловленной. Если число обусловленности велико, то данная матрица будет плохо обусловленной [117, 150, 154].

Из анализа выражений (1.131) и (1.132) следует, что на число итераций существенное влияние оказывают ошибки задания матрицы коэффициентов \mathbf{A} и вектора \mathbf{F} . Ошибка расчета вектора \mathbf{F} зависит от точности взятых в обработку измерений и точности математических моделей этих измерений. Если матрица \mathbf{A} плохо обусловлена ($\mu(\mathbf{A}) \gg 1$), то необходимо принять меры к повышению точности расчета этой матрицы и вектора правой части так, чтобы выполнялось условие $\mu(\mathbf{A}) \cdot \varepsilon_A < 1$. В этом случае соблюдается неравенство $\varepsilon_X < 1$ и итеративный

процесс решения системы нелинейных уравнений будет сходящимся. Кроме того, зная ошибку ε_A до решения СЛАУ и применяя процедуру сингулярного разложения (см. приложение Б), можно определить эффективный ранг матрицы коэффициентов. Последнее позволяет уверенно найти нормальное обобщенное решение заданной системы уравнений.

Переходя к методам решения линейных систем, отметим, что выражение (1.128) здесь и в целом ряде работ используется только для краткости записи. Обычно при решении СЛАУ псевдообратная (либо обратная) матрица не вычисляется, так как более эффективно находить решение с применением методов разложения матрицы коэффициентов на матрицы-сомножители (обычно на две или три). Для квадратных матриц чаще всего используются разложения Холецкого, Грама-Шмидта, Гаусса, а для прямоугольных – Хаусхолдера, SVD (сингулярное разложение, см. приложение Б). Достоинство этих методов разложения состоит в том, что они позволяют путем ортогональных преобразований привести исходную матрицу к более простому виду: треугольному, диагональному и т.д. При этом ортогональные преобразования не вносят дополнительных ошибок в вычисления. Упомянутые методы разложений достаточно хорошо описаны в специальной литературе, посвященной вычислительным аспектам линейной алгебры.

В заключение отметим, что при решении системы линейных уравнений поправок лучше применять метод SVD по двум основным причинам (см. приложение Б). Во-первых, здесь не требуется приводить матрицу коэффициентов к квадратному виду, что не увеличивает ее обусловленности. Во-вторых, этот метод позволяет определять количественные условия наблюдаемости и, не привлекая дополнительных средств анализа, учитывать их на этапе решения уравнений.

1.5 Выбор системы элементов орбиты спутника и фундаментальной матрицы

Другим актуальным вопросом для обеспечения регулярной постановки задачи оценивания является выбор оцениваемых параметров \mathbf{Y} орбиты спутника и формирование на их основе фундаментальной матрицы – составной части матрицы коэффициентов уравнений поправок.

Если в качестве компонент вектора \mathbf{Y} выбраны кеплеровы элементы, то для орбит с малыми эксцентриситетами ($e < 0.003$) матрица коэффициентов системы уравнений поправок становится плохо обусловленной [10]. Кроме того, дифференциальные уравнения движения вида (1.3) в кеплеровых элементах имеют особенности для круговых, полярных и экваториальных орбит. По этим причинам целесообразнее применять прямоугольные координаты векторов положения $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ и скорости $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ КА, канонические элементы орбиты, а также различные модификации кеплеровых элементов [10, 124, 146].

В ряде работ [173, 175, 195] предложена "несингулярная" система элементов орбиты, являющаяся функцией кеплеровых и не имеющая особенностей для круговых и полярных орбит:

$$\begin{aligned}
 a, & & p &= \operatorname{tg}^{\delta}(0.5 \cdot i) \cdot \sin \Omega, \\
 h &= e \cdot \sin \sigma, & g &= \operatorname{tg}^{\delta}(0.5 \cdot i) \cdot \cos \Omega, \\
 k &= e \cdot \cos \sigma, & \lambda &= M + \sigma, \\
 \sigma &= \omega + \Omega \cdot \delta, & \delta &= \operatorname{sign}(\cos i),
 \end{aligned}
 \tag{1.134}$$

где a, e – большая полуось и эксцентриситет орбиты;

i – наклонение орбиты;

Ω – долгота восходящего узла;

ω – аргумент перигея орбиты;

λ – средняя долгота спутника;

M – средняя аномалия.

Авторами работ [93, 140] была предложена аналогичная несингулярной системе (1.134) система регулярных элементов. Отличие заключается только в том, что у регулярных элементов вместо большой полуоси и средней аномалии используется фокальный параметр p и истинная аномалия v . Это позволило получить выигрыш по времени при интегрировании дифференциальных уравнений движения. По этой причине в данной работе за основную принята система регулярных элементов орбиты, образующих шестимерный вектор-столбец

$$\mathbf{Y}=[p \ g \ h \ f \ q \ l]^T . \quad (1.135)$$

Компоненты этого вектора рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} p &= a \cdot (1-e^2), & f &= \operatorname{tg}^\delta(0.5 \cdot i) \cdot \cos \Omega, \\ g &= e \cdot \cos \sigma, & q &= \operatorname{tg}^\delta(0.5 \cdot i) \cdot \sin \Omega, \\ h &= e \cdot \sin \sigma, & l &= v + \sigma, \\ \sigma &= \omega + \Omega \cdot \delta, & \delta &= \operatorname{sign}(\cos i). \end{aligned} \quad (1.136)$$

Система дифференциальных уравнений движения вида (1.3) для оскулирующих регулярных элементов (1.136) не имеет особенностей в случае круговых, полярных и экваториальных орбит [139, 142]. Эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= 2 \cdot r \cdot \tilde{T}, & \dot{f} &= \tilde{W} \cdot H \cdot \kappa \cdot \sin l, \\ \dot{g} &= -\tilde{S} \cdot \cos l + \tilde{T} \cdot [(1+H) \cdot \sin l + g \cdot H] + G \cdot h, & \dot{q} &= \tilde{W} \cdot H \cdot \kappa \cdot \delta \cdot \cos l, \\ \dot{h} &= -\tilde{S} \cdot \sin l + \tilde{T} \cdot [(1+H) \cdot \cos l + h \cdot H] - G \cdot g, & \dot{l} &= \sqrt{\mu \cdot p} / r^2 + G. \end{aligned} \quad (1.137)$$

В них

$$G = \tilde{W} \cdot H \cdot \delta \cdot (q \cdot \sin l - \delta \cdot f \cdot \cos l) , \quad \kappa = (1 + f^2 + q^2) / 2 , \quad H = r / p ,$$

$$r = p \cdot (1 + g \cdot \sin l + h \cdot \cos l)^{-1} , \quad \tilde{S} = S \cdot \sqrt{p / \mu} , \quad \tilde{T} = T \cdot \sqrt{p / \mu} , \quad \tilde{W} = W \cdot \sqrt{p / \mu} , \quad (1.138)$$

где r – геоцентрическое расстояние до КА [171];

S, T, W – компоненты вектора возмущающего ускорения в подвижной орбитальной системе координат (S, T, W) (см. рисунок 1.5);

μ – гравитационный параметр Земли.

Здесь и далее точка над переменной означает дифференцирование параметра по времени. Система дифференциальных уравнений движения для несингулярных элементов орбиты (1.134) приведена в работе [175].

Одной из трудоемких операций при формировании матрицы коэффициентов в уравнениях поправок является вычисление матрицы частных производных от измеряемых вектор-функций по начальным условиям, являющейся матрицей коэффициентов перед вектором поправок $\Delta \mathbf{Y}_0$ к регулярным элементам орбиты (1.135) в уравнениях (1.95), (1.97), (1.100) и (1.101). Она может быть представлена в виде произведения двух матриц:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Y}_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Y}_0} . \quad (1.139)$$

Здесь

$$\mathbf{X} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \quad (1.140)$$

есть шестимерный вектор-столбец, состоящий из прямоугольных координат векторов положения \mathbf{r} и скорости $\dot{\mathbf{r}}$ КА в текущий момент времени $t \in T$. Первая матрица-сомножитель (градиентная матрица первого рода [15, 90, 161]) в равенстве (1.139) является прямоугольной $m \times 6$ матрицей частных производных от

измеряемых вектор-функций Ψ зависимости (1.30) по текущим значениям компонент векторов \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ КА

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \end{bmatrix}. \quad (1.141)$$

Вторая матрица-сомножитель (фундаментальная матрица первого рода [90, 161]) в равенстве (1.139) является квадратной 6x6 матрицей частных производных от текущих значений компонент векторов \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ (1.140) по начальным условиям движения КА в регулярных элементах

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Y}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{Y}_0} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{Y}_0} \end{bmatrix}. \quad (1.142)$$

Градиентная матрица отражает специфические свойства каждого вида измерений. В частности, она показывает, как изменяются измеряемые параметры с изменением пространственного положения и скорости КА. Фундаментальная матрица является общей для всех видов траекторных измерений и определяет общие свойства решения системы линейных уравнений поправок.

Формирование аналитических выражений для расчета элементов фундаментальной матрицы является сложной самостоятельной задачей. Вид этой матрицы изменяется в зависимости от выбранной системы элементов орбиты. В работах [10, 100, 124] приводятся аналитические выражения для расчета фундаментальной матрицы в кеплеровых элементах, а в работе [17] – в прямоугольных координатах векторов \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$.

Фундаментальную матрицу $\Phi = \partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{Y}_0$ в выражении (1.142) можно представить в виде произведения двух матриц

$$\Phi = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Y}_0} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0}. \quad (1.143)$$

Первым множителем в выражении (1.143) является квадратная 6x6 матрица частных производных от текущих значений прямоугольных координат \mathbf{X} вида (1.140) векторов положения и скорости КА по текущим значениям регулярных элементов \mathbf{Y} его орбиты

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(p, g, h, f, q, l)}. \quad (1.144)$$

Вторым множителем является квадратная 6x6 матрица частных производных от текущих значений регулярных элементов орбиты по их начальным значениям (матрица изохронных производных)

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} = \frac{\partial(p, g, h, f, q, l)}{\partial(p_0, g_0, h_0, f_0, q_0, l_0)}. \quad (1.145)$$

Вывод аналитических выражений для расчета элементов этих матриц представлен в приложении В и в приложении Г. Анализ точности вычисления матрицы изохронных производных приведен в приложении Д.

Общий вид фундаментальной матрицы Φ можно получить, перемножив матрицы в равенстве (1.143). При этом следует учитывать зависимости (В.1) (приложение В) для матрицы \mathbf{C} и (Г.14) (приложение Г) для матрицы изохронных производных \mathbf{C}_0 . В связи с этим можно записать

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{Y} \\ \partial \dot{\mathbf{r}} / \partial \mathbf{Y} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{Y}_0 \\ \partial \dot{\mathbf{r}} / \partial \mathbf{Y}_0 \end{bmatrix} \quad (1.146)$$

или

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial p_0} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial g_0} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial h_0} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial f_0} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_0} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial l_0} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial p} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial p_0} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial g} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial g_0} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial h} + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial h_0} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial f_0} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_0} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial l_0} \end{bmatrix}. \quad (1.147)$$

Для нахождения аналитических выражений элементов матрицы Φ воспользуемся формулами (В.12), (В.13) (приложение В) и (Г.41) (приложение Г) расчета элементов матриц \mathbf{C} и \mathbf{C}_0 . Фундаментальную матрицу получим с допущением $p = p_0$.

Для элементов первого и шестого столбцов можно записать

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_0} = \frac{\mathbf{r}}{p} + \frac{r^2}{\sqrt{\mu \cdot p}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \cdot (-1.5 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \cdot \frac{(t-t_0)}{r^2}) = p_0^{-1} \cdot (\mathbf{r} - 1.5 \cdot \dot{\mathbf{r}} \cdot (t-t_0)), \quad (1.148)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial p_0} = -\frac{\dot{\mathbf{r}}}{2 \cdot p} - \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (-1.5 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \cdot \frac{(t-t_0)}{r^2}) = -0.5 \cdot p_0^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{r}} - 3 \cdot \mu \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot (t-t_0)), \quad (1.149)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l_0} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{r_0^2}{r^2} = \frac{r_0^2}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.150)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial l_0} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{r_0^2}{r^2} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{r_0^2}{r^3} \cdot \mathbf{r}, \quad (1.151)$$

где t – текущий момент времени;

t_0 – начальный момент времени.

Для элементов четвертого и пятого столбцов фундаментальной матрицы справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial f_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial f}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial f_0} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial f}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_0} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q}. \quad (1.152)$$

Далее получим аналитические выражения для расчета элементов второго столбца фундаментальной матрицы. Можно записать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g_0} = & -\frac{\mathbf{r}}{p} \cdot \eta + \frac{r^2 \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{\mu \cdot p}} \cdot \frac{p_0}{r^2 \cdot \nu_0^2} \cdot \left(\frac{\sin E \cdot (r + p_0) - \sin E_0 \cdot (r_0 + p_0)}{\nu_0} \cdot \sin \sigma - \right. \\ & \left. - (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0) \cdot \cos \sigma - 3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0^{-1}} \cdot (t - t_0) \cdot g_0 \right). \end{aligned} \quad (1.153)$$

Так как фокальный параметр p зависит от большой полуоси a и эксцентриситета e орбиты

$$p = a \cdot (1 - e^2),$$

то с учетом зависимостей (1.136) и (Г.40) для величин g , h и ν имеем:

$$p = a \cdot (1 - g^2 - h^2).$$

Откуда

$$p = a \cdot \nu^2. \quad (1.154)$$

Продолжив вывод производной $\partial \mathbf{r} / \partial g_0$ из (1.153) с учетом равенства (1.154), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g_0} = & -\frac{\mathbf{r}}{p_0} \cdot \eta + \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nu_0^2}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) \cdot g_0 - (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0) \cdot g_0 \cdot p_0 \cdot e_0^{-1} + \\ & + ((r + p_0) \cdot \sin E - (r_0 + p_0) \cdot \sin E_0) \cdot h_0 \cdot \sqrt{p_0 \cdot a_0} \cdot e_0^{-1}) = \\ = & -\frac{\mathbf{r}}{p_0} \cdot \eta + \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nu_0^2}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot (g_0 (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0)) + \end{aligned}$$

$$+ (r + r_0) \cdot (r_0 \cdot \cos l_0 - r \cdot \cos l + h_0 \cdot (r_0 - r))$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial g_0} = & -\frac{\mathbf{r}}{p_0} \cdot \eta + \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nu_0^2}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot (g_0(-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0)) + \\ & + (r + r_0) \cdot (\xi_0 - \xi + h_0 \cdot (r_0 - r))) . \end{aligned} \quad (1.155)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial g_0} = & -\sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot \mathbf{e}_1 - \sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{p_0}{r^2 \cdot \nu_0^2} \cdot \left(\frac{\sin E \cdot (r + p_0) - \sin E_0 \cdot (r_0 + p_0)}{\nu_0} \cdot \sin \sigma - \right. \\ & \left. - (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0) \cdot \cos \sigma - 3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0^{-1}} \cdot (t - t_0) \cdot g_0 \right) = \\ = & -\sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r} \cdot \nu^{-2} \cdot r^{-3} \cdot (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) \cdot g_0 - (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0) \cdot g_0 \cdot p_0 \cdot e_0^{-1} + \\ & + ((r + p_0) \cdot \sin E - (r_0 + p_0) \cdot \sin E_0) \cdot h_0 \cdot \sqrt{p_0 \cdot a_0} \cdot e_0^{-1})) = \\ = & -\sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{r} \cdot \nu_0^{-2} \cdot r^{-3} \cdot (g_0(-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0)) + \\ & + (r + r_0) \cdot (r_0 \cdot \cos l_0 - r \cdot \cos l + h_0 \cdot (r_0 - r)))) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial g_0} = & -\sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot (\mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \nu_0^2}{r^3} \cdot (g_0(-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0)) + \\ & + (r + r_0) \cdot (\xi_0 - \xi + h_0 \cdot (r_0 - r)))) . \end{aligned} \quad (1.156)$$

Получим аналитические выражения для расчета элементов третьего столбца фундаментальной матрицы. Можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h_0} = & -\frac{\mathbf{r}}{p} \cdot \xi + \frac{r^2 \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{\mu \cdot p}} \cdot \frac{p_0}{r^2 \cdot \nu_0^2} \cdot \left(\frac{\sin E \cdot (r + p_0) - \sin E_0 \cdot (r_0 + p_0)}{\nu_0} \cdot \cos \sigma - \right. \\ & \left. - (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0) \cdot \cos \sigma - 3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0^{-1}} \cdot (t - t_0) \cdot g_0 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mathbf{r}}{p_0} \cdot \xi + \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nu_0^{-2}}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) \cdot h_0 - (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0) \cdot h_0 \cdot p_0 \cdot e_0^{-1} + \\
&\quad + ((r + p_0) \cdot \sin E - (r_0 + p_0) \cdot \sin E_0) \cdot g_0 \cdot \sqrt{p_0 \cdot a_0} \cdot e_0^{-1}). \\
\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial h_0} &= -\frac{\mathbf{r}}{p_0} \cdot \eta + \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nu_0^{-2}}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot (h_0 (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0)) - \\
&\quad - (r + r_0) \cdot (r_0 \cdot \sin l_0 - r \cdot \sin l + g_0 \cdot (r_0 - r)))
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial h_0} &= -\frac{\mathbf{r}}{p_0} \cdot \xi + \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nu_0^{-2}}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot (h_0 (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0)) - \\
&\quad - (r + r_0) \cdot (\eta_0 - \eta + g_0 \cdot (r_0 - r))). \tag{1.157} \\
\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial h_0} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \mathbf{e}_2 - \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{r}{r} \cdot \frac{p_0}{r^2 \cdot \nu_0^2} \cdot \left(\frac{\sin E \cdot (r + p_0) - \sin E_0 \cdot (r_0 + p_0)}{\nu_0} \cdot \cos \sigma - \right. \\
&\quad \left. - (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0) \cdot \cos \sigma - 3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0^{-1}} \cdot (t - t_0) \cdot g_0 \right) = \\
&= \sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{r} \cdot \nu_0^{-2} \cdot r^{-3} \cdot (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) \cdot h_0 - (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0) \cdot h_0 \cdot p_0 \cdot e_0^{-1} + \\
&\quad + ((r + p_0) \cdot \sin E - (r_0 + p_0) \cdot \sin E_0) \cdot g_0 \cdot \sqrt{p_0 \cdot a_0} \cdot e_0^{-1})) = \\
&= \sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{r} \cdot \nu_0^{-2} \cdot r^{-3} \cdot (h_0 (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0)) + \\
&\quad + (r + r_0) \cdot (r_0 \cdot \cos l_0 - r \cdot \cos l + g_0 \cdot (r_0 - r))))
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial h_0} &= \sqrt{\mu \cdot p^{-1}} \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{r} \cdot \nu_0^{-2} \cdot r^{-3} \cdot (h_0 (-3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0)) + \\
&\quad + (r + r_0) \cdot (\eta_0 - \eta + g_0 \cdot (r_0 - r))))). \tag{1.158}
\end{aligned}$$

Полученные производные для расчета элементов фундаментальной матрицы Φ согласно [38, 4] можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{Y}_0} \right] = & [(\mathbf{r} - 1.5 \cdot (t - t_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}) / p_0 \quad -\eta \cdot \mathbf{r} / p_0 + K \cdot \dot{\mathbf{r}} / \sqrt{\mu \cdot p_0} \\ & -\xi \cdot \mathbf{r} / p_0 + L \cdot \dot{\mathbf{r}} / \sqrt{\mu \cdot p_0} \quad (-f \cdot \mathbf{r} + \mathbf{S}_1) / \kappa \quad (-q \cdot \mathbf{r} + \mathbf{S}_2) / \kappa \quad r_0^2 \cdot \dot{\mathbf{r}} / \sqrt{\mu \cdot p_0}], \quad (1.159) \\ \Phi_2 = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{Y}_0} \right] = & [(3 \cdot \mu \cdot (t - t_0) \cdot \mathbf{r}) / r^3 - \dot{\mathbf{r}}] \cdot 0.5 / p_0 \quad -\sqrt{\mu / p_0} \cdot (\mathbf{e}_1 + K \cdot \mathbf{r} / r^3) \\ & \sqrt{\mu / p_0} \cdot (\mathbf{e}_2 - L \cdot \mathbf{r} / r^3) \quad (-f \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{S}_3) / \kappa \quad (-q \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{S}_4) / \kappa \quad -\sqrt{\mu / p_0} \cdot r_0^2 \cdot \mathbf{r} / r^3]. \end{aligned}$$

Параметры K, L, H, κ и δ находятся из выражений

$$\begin{aligned} K &= (g_0 \cdot N + (r + r_0) \cdot (\xi_0 - \xi_5 + h_0 \cdot (r - r_0))) / \nu_0^2, \\ L &= (h_0 \cdot N - (r + r_0) \cdot (\eta_0 - \eta + g_0 \cdot (r - r_0))) / \nu_0^2, \\ N &= -3 \cdot \sqrt{\mu \cdot p_0} \cdot (t - t_0) + r \cdot r_0 \cdot \sin(l - l_0), \\ \kappa &= (1 + f^2 + q^2) / 2, \quad \delta = \text{sign}(\cos i), \end{aligned} \quad (1.160)$$

где r – геоцентрическое расстояние до КА в текущий момент времени t ;

r_0 – геоцентрическое расстояние до КА в начальный момент времени t_0 ;

μ – гравитационный параметр Земли.

1.6 Оценка влияния изменения гравитационного поля Земли на движение космического аппарата

На движение спутника по орбите помимо несферичности Земли, сопротивления атмосферы, лунно-солнечного притяжения, прямого светового давления от Солнца и диффузного отражения света от Земли, оказывают свое влияние целый ряд других возмущений. Некоторые из них рассмотрены, например, в работе [2]. Кроме этого, в работе [131] говорится о том, что влияние

крупных водохранилищ и изменение масс озер могут привести к изменению в коэффициентах низких гармоник модели геопотенциала уже в третьей значащей цифре. В связи с этим в данном подразделе рассматривается аналитическое решение задачи оценки влияния изменения параметров модели ГПЗ на движение КА в пределах неуправляемого участка его полета. Работа сделана с участием соискателя в рамках выполнения фундаментальной НИР “Исследование динамической составляющей гравитационного потенциала Земли и его характеристик, построение их математических моделей” [47, 94], которая стала продолжением исследований в рамках фундаментальной НИР “Разработка методов изучения динамики гравитационного поля и фигуры Земли планетарного, регионального и локального характера” [18 – 20, 132, 133].

С позиций системного подхода задачу оценивания изменения ГПЗ на движение КА можно разделить на две подзадачи: первая – определение изменения ГПЗ, обусловленного геодинамическими, техногенными и другими процессами, а также ошибочностью определения этого поля [47].; вторая – оценка влияния этих изменений на движение КА [85]. Первая подзадача сводится к определению изменения числовых значений коэффициентов сферических функций. Вторая подзадача – к определению влияния изменения этих коэффициентов на движение КА в околоземном пространстве. Ниже представим математический алгоритм решения второй подзадачи.

Для ее решения воспользуемся системой дифференциальных уравнений движения Ньютона-Лагранжа [10, 91, 146, 158] для кеплеровых элементов $\mathcal{E} = [a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ M]^T$ орбиты КА

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 2 \cdot a^2 \cdot (e \cdot p^{-1} \cdot \sin v \cdot \tilde{S} + r^{-1} \cdot \tilde{T}), \\ \dot{e} &= \sin v \cdot \tilde{S} + (\cos v + (\cos v + e) \cdot r \cdot p^{-1}) \cdot \tilde{T}, \\ \dot{i} &= r \cdot p^{-1} \cdot \cos u \cdot \tilde{W}, \\ \dot{\Omega} &= r \cdot p^{-1} \cdot \sin u \cdot \sin^{-1} i \cdot \tilde{W}, \end{aligned} \tag{1.161}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -e^{-1} \cdot \cos v \cdot \tilde{S} + e^{-1} \cdot (1 + r \cdot p^{-1}) \cdot \sin v \cdot \tilde{T} - r \cdot p^{-1} \cdot \sin u \cdot \text{ctg} i \cdot \tilde{W}, \\ \dot{M} &= e^{-1} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot ((\cos v + 2 \cdot e \cdot r \cdot p^{-1}) \cdot \tilde{S} - (1 + r \cdot p^{-1}) \cdot \sin v \cdot \tilde{T}),\end{aligned}$$

где a – большая полуось орбиты спутника;

e – эксцентриситет орбиты;

p – фокальный параметр орбиты;

$\tilde{S}, \tilde{T}, \tilde{W}$ – нормированные значения возмущающего ускорения, разложенного в базисе \mathbf{S}, \mathbf{T} и \mathbf{W} орбитальной системы координат ($O\xi'\eta'\zeta'$) (см. 1.3).

i – наклонение орбиты;

u – аргумент широты спутника.

Нормированные значения возмущающего ускорения определяются по формуле [15]:

$$[\tilde{S} \ \tilde{T} \ \tilde{W}]^T = \sqrt{p \cdot \mu^{-1}} \cdot [S \ T \ W]^T, \quad (1.162)$$

где μ – гравитационный параметр Земли;

S, T, W – значения возмущающего ускорения, разложенного в ортонормированном базисе \mathbf{S}, \mathbf{T} и \mathbf{W} орбитальной системы координат ($O\xi'\eta'\zeta'$).

Обозначив нормированные значения возмущающего ускорения как вектор-столбец

$$\tilde{\mathbf{R}}_e = [\tilde{S} \ \tilde{T} \ \tilde{W}]^T, \quad (1.163)$$

а значения возмущающего ускорения – как вектор-столбец

$$\mathbf{R}_e = [S \ T \ W]^T, \quad (1.164)$$

равенство (1.162) можно представить в виде:

$$\tilde{\mathbf{R}}_e = \sqrt{p \cdot \mu^{-1}} \cdot \mathbf{R}_e. \quad (1.165)$$

Правые части уравнений (1.161), являющиеся производными кеплеровых элементов по времени, представим в виде вектора-столбца $\mathbf{A} = [\dot{a} \ \dot{e} \ \dot{i} \ \dot{\Omega} \ \dot{\omega} \ \dot{M}]^T$. Будем считать, что на движение КА оказывает свое влияние только ГПЗ. Тогда, разложив правые части этих уравнений в ряд и ограничившись при этом только линейными членами разложения, можно записать:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} \cdot \partial (C_{nm}, S_{nm}) + \dots = \mathbf{A}_0 + \mathbf{B} + \dots, \quad (1.166)$$

где C, S – коэффициенты разложения ГПЗ в ряд по сферическим функциям;

n и m – порядок и степень разложения ГПЗ в ряд.

Первое слагаемое \mathbf{A}_0 в разложении (1.166) – это вектор-столбец правой части системы уравнений Ньютона-Лагранжа, полученных в стационарном ГПЗ, второе слагаемое \mathbf{B} – вектор-столбец изменений правых частей уравнений движения (1.161), обусловленных изменением ГПЗ (или ошибками его представления).

Под вектором возмущающего ускорения \mathbf{R} будем понимать градиент от возмущающего гравитационного потенциала V Земли

$$\mathbf{R} = m_s^{-1} \cdot \text{grad } V, \quad (1.167)$$

где m_s – масса спутника.

Возмущающий гравитационный потенциал сфероидальной Земли определяется как [2, 23, 91, 137]

$$V = m_s \cdot \mu \cdot r^{-1} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (R_s \cdot r^{-1})^n \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \cdot (C_{nm} \cdot \cos m \cdot \lambda + S_{nm} \cdot \sin m \cdot \lambda), \quad (1.168)$$

где $R_э$ – средний экваториальный радиус Земли;

$P_{nm}(\sin\varphi)$ – функции Лежандра;

φ – геоцентрическая широта КА;

λ – геоцентрическая долгота КА.

Разложение вектора возмущающего ускорения \mathbf{R} в средней звездной системе координат ($oxyz$) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{R} = [R_x \ R_y \ R_z]^T = m_s^{-1} \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x} \ \frac{\partial V}{\partial y} \ \frac{\partial V}{\partial z} \right]^T = m_s^{-1} \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial(r, \varphi, \lambda)} \ \frac{\partial(r, \varphi, \lambda)}{\partial(x, y, z)_G} \ \frac{\partial(x, y, z)_G}{\partial(x, y, z)} \right]^T, \quad (1.169)$$

где x, y, z – прямоугольные координаты КА в средней звездной системе

r – геоцентрическое расстояние до КА;

φ, λ – геоцентрические широта и долгота КА;

x_G, y_G, z_G – прямоугольные координаты КА в общеземной системе.

Введя обозначения

$$\mathbf{N} = \frac{\partial V}{\partial(r, \varphi, \lambda)}, \quad \mathbf{O} = \frac{\partial(r, \varphi, \lambda)}{\partial(x, y, z)_G}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial(x, y, z)_G}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial \mathbf{r}_G}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.170)$$

выражение (1.169) можно записать как

$$\mathbf{R} = m_s^{-1} \cdot [\mathbf{N} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{P}]^T = m_s^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{N}^T. \quad (1.171)$$

Чтобы получить разложение вектора \mathbf{R} в орбитальной системе координат ($O\xi'\eta'\zeta'$), необходимо выполнить следующее матричное преобразование

$$\mathbf{R}_e = [\mathbf{S} \ \mathbf{T} \ \mathbf{W}]^T \cdot \mathbf{R}. \quad (1.172)$$

Теперь частную производную $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial(c_{nm}, s_{nm})}$ в выражении (1.166) можно

представить в виде произведения частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tilde{\mathbf{R}}_e} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_e}{\partial \mathbf{R}_e} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_e}{\partial \mathbf{R}} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial (\text{grad} V)} \cdot \frac{\partial (\text{grad} V)}{\partial \mathbf{N}} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial (C_{nm}, S_{nm})}. \quad (1.173)$$

Для удобства дальнейших аналитических выкладок, систему уравнений (1.161) представим в матричном виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_e. \quad (1.174)$$

Здесь матрица \mathbf{D} является функцией кеплеровых элементов орбиты КА. Она имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \cdot a^2 \cdot e \cdot p^{-1} \cdot \sin v & 2 \cdot a^2 \cdot r^{-1} & 0 \\ \sin v & \cos v + (\cos v + e) \cdot r \cdot p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r \cdot p^{-1} \cdot \cos u \\ 0 & 0 & r \cdot p^{-1} \cdot \sin u \cdot \sin^{-1} i \\ -e^{-1} \cdot \cos v & e^{-1} \cdot \sin v \cdot (1 + r \cdot p^{-1}) & -r \cdot p^{-1} \cdot \sin u \cdot \text{ctg} i \\ e^{-1} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (\cos v + 2 \cdot e \cdot r \cdot p^{-1}) & -e^{-1} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (1 + r \cdot p^{-1}) \cdot \sin v & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.175)$$

Первые четыре производных в зависимости (1.173) найдем, воспользовавшись равенствами (1.165), (1.167), (1.172) и (1.174):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tilde{\mathbf{R}}_e} = \mathbf{D}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}_e}{\partial \mathbf{R}_e} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.176)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_e}{\partial \mathbf{R}} = [\mathbf{S} \ \mathbf{T} \ \mathbf{W}]^T, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial (\text{grad} V)} = \frac{1}{m_s} \cdot \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} – единичная 3x3 матрица.

Обозначив третью производную в матричном преобразовании (1.174) как $\mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{R}_e}{\partial \mathbf{R}}$ и приняв во внимание выражения (1.85) для расчета компонент базисных векторов \mathbf{S} , \mathbf{T} и \mathbf{W} , запишем

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i & \cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i & \sin u \cdot \sin i \\ -\sin u \cdot \cos \Omega - \cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i & -\sin u \cdot \sin \Omega + \cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i & \cos u \cdot \sin i \\ \sin \Omega \cdot \sin i & -\cos \Omega \cdot \sin i & \cos i \end{bmatrix}. \quad (1.177)$$

Матрица \mathbf{Q} является матрицей преобразования векторов из инерциальной системы координат $(oxyz)$ в орбитальную $(O\xi'\eta'\zeta')$ [147].

Выражение для определения пятой производной в равенстве (1.173) найдем, воспользовавшись зависимостью (1.171):

$$\frac{\partial(\text{grad}V)}{\partial \mathbf{N}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{O}^T. \quad (1.178)$$

Преобразование геоцентрического радиус-вектора \mathbf{r} КА, заданного в звездной системе координат $(oxyz)$, в геоцентрический радиус-вектор \mathbf{r}_G , заданного в земной системе координат $(oxyz)_G$, представляет следующий вид:

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{R}_3(S) \cdot \mathbf{r}, \quad (1.179)$$

где $\mathbf{R}_3(S)$ – матрица вращения на угол S , являющимся звездным временем.

В этом случае матрица \mathbf{P} размерности 3×3 в равенстве (1.170) примет вид

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{R}_3(-S). \quad (1.180)$$

Для определения элементов матрицы \mathbf{O} размерности 3×3 в равенстве (1.170) воспользуемся следующими формулами:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{z_G}{\sqrt{x_G^2 + y_G^2}}\right), \quad \lambda = \arctg\frac{y_G}{x_G}, \quad r^2 = x_G^2 + y_G^2 + z_G^2. \quad (1.181)$$

Выполнив их дифференцирование, получим согласно [147]:

$$\mathbf{O}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_G} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_G} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_G} \\ \frac{\partial r}{\partial y_G} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_G} & \frac{\partial \lambda}{\partial y_G} \\ \frac{\partial r}{\partial z_G} & \frac{\partial \varphi}{\partial z_G} & \frac{\partial \lambda}{\partial z_G} \end{bmatrix} = r^{-1} \begin{bmatrix} x_G & -r^{-1} \cdot x_G \cdot \operatorname{tg} \varphi & -r^{-1} \cdot y_G \cdot \cos^{-2} \varphi \\ y_G & -r^{-1} \cdot y_G \cdot \operatorname{tg} \varphi & r^{-1} \cdot x_G \cdot \cos^{-2} \varphi \\ z_G & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.182)$$

Аналитические выражения для расчета элементов матрицы \mathbf{N} размерности 1×3 в равенстве (1.170)

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3] = \left[\frac{\partial V}{\partial r} \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right] \quad (1.183)$$

можно найти, например, в работе [23]. Они выглядят следующим образом:

$$\mathbf{N}^T = \frac{m_s \cdot \mu}{r^2} \cdot \begin{bmatrix} -\sum_{n=2}^{\infty} ((n+1) \cdot (R_3 \cdot r^{-1}) \cdot \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cdot \cos m \cdot \lambda + S_{nm} \cdot \sin m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\sin \varphi)) \\ \sum_{n=2}^{\infty} (R_3 \cdot r^{-1}) \cdot C_{n0} \cdot P_{n1}(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} ((R_3 \cdot r^{-1}) \cdot \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cdot \cos m \cdot \lambda + S_{nm} \cdot \sin m \cdot \lambda) \cdot \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi}) \\ \sum_{n=2}^{\infty} ((R_3 \cdot r^{-1}) \cdot \sum_{m=0}^n m \cdot (-C_{nm} \cdot \sin m \cdot \lambda + S_{nm} \cdot \cos m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\sin \varphi)) \end{bmatrix}. \quad (1.184)$$

В зависимостях (1.184) частные производные от функций Лежандра $P_{nm}(\sin \varphi)$ по геоцентрической широте спутника определяются следующим образом [23]:

$$\frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} = -m \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot P_{nm}(\sin \varphi) + k \cdot P_{nm+1}(\sin \varphi),$$

$$k=1, \quad \text{если } m \leq n-1, \quad (1.185)$$

$k=0$, если $m=n$.

Обозначив матрицу $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} = \mathbf{L}'$, можно записать

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial C_{nm}} & \frac{\partial N_1}{\partial S_{nm}} \\ \frac{\partial N_2}{\partial C_{nm}} & \frac{\partial N_2}{\partial S_{nm}} \\ \frac{\partial N_3}{\partial C_{nm}} & \frac{\partial N_3}{\partial S_{nm}} \end{bmatrix}. \quad (1.186)$$

Ее элементы получим, последовательно дифференцируя матрицу (1.184) по коэффициентам $C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{30}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, \dots, S_{20}, S_{21}, S_{22}, S_{30}, S_{31}, S_{32}, S_{33}, \dots$:

$$\mathbf{L}' = m_s \cdot \mu \cdot r^{-1} \cdot \mathbf{L}, \quad (1.187)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{(n+1)}{r} \cdot \left(\frac{R_\vartheta}{r}\right)^n \cdot \cos m \cdot \lambda \cdot P_{nm}(\sin \varphi) & -\frac{(n+1)}{r} \cdot \left(\frac{R_\vartheta}{r}\right)^n \cdot \sin m \cdot \lambda \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \\ \left(\frac{R_\vartheta}{r}\right)^n \cdot \cos m \cdot \lambda \cdot \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} & \left(\frac{R_\vartheta}{r}\right)^n \cdot \sin m \cdot \lambda \cdot \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} \\ -\left(\frac{R_\vartheta}{r}\right)^n \cdot m \cdot \sin m \cdot \lambda \cdot P_{nm}(\sin \varphi) & \left(\frac{R_\vartheta}{r}\right)^n \cdot m \cdot \cos m \cdot \lambda \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \end{bmatrix}. \quad (1.188)$$

Матрица \mathbf{L} всегда имеет 3 строки, а число ее столбцов определяется размером матрицы $\Delta \mathbf{G}$. С вычислительной точки зрения иногда удобно представлять ее в виде

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \\ \frac{r \cdot m}{(n+1)} \cdot L_{12} & -\frac{r \cdot m}{(n+1)} \cdot L_{11} \end{bmatrix}. \quad (1.189)$$

Теперь матрицу \mathbf{B} в выражении (1.166) можно представить в виде:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} \cdot \partial (C_{nm}, S_{nm}) = \frac{\sqrt{p \cdot \mu}}{r} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{G}. \quad (1.190)$$

В нем матрица $\Delta \mathbf{G}$ состоит из изменения коэффициентов модели ГПЗ и имеет вид

$$\Delta \mathbf{G} = [\Delta C_{00} \Delta S_{00} \dots \Delta C_{nm} \Delta S_{nm}]^T. \quad (1.191)$$

Оскулирующие элементы \mathcal{E} орбиты спутника на текущий момент времени t можно определить выражением

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A} \cdot dt \quad (1.192)$$

или, с учетом равенства (1.166), как

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}_0 \cdot dt + \int_{t_0}^t \mathbf{B} \cdot dt, \quad (1.193)$$

где \mathcal{E}_0 – вектор начальных условий движения КА на начальный момент времени t_0 .

В выражении (1.193) второе слагаемое есть возмущения элементов орбиты спутника, обусловленные влиянием стационарного ГПЗ, третье – возмущения элементов орбиты спутника, вызванные изменением ГПЗ (либо ошибками его представления).

Рассмотренный метод оценивания влияния изменения ГПЗ на движение КА предпочтительнее численного, так как для решения поставленной выше задачи требуется высокая точность интегрирования дифференциальных уравнений

движения. Представленный метод характеризуется своей простотой и быстроедействием. Для расчета третьего слагаемого в выражении (1.193) можно применять простые численные методы интегрирования (вплоть до аналитического по невозмущенной орбите). Это обусловлено тем, что вычисления выполняются с числами, имеющими всего от двух до трех значащих цифр. Кроме того, этот метод легко и быстро позволяет оценивать влияние на орбиту одного или нескольких коэффициентов ГПЗ.

2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И УРАВНЕНИЯ ПОПРАВКИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

2.1 Краткая характеристика современных методов и математических моделей радиотехнических измерений

Радиотехнические методы траекторных измерений КА нашли большое применение в геодезической практике. Они с высокой точностью позволяют определять пространственные положения НП, ПВЗ, ЭВО геодезических систем координат, а также решать целый ряд других задач. Эти методы всепогодны, доступны для использования в любой точке на земной поверхности и в околоземном пространстве, имеют высокую точность, оперативность и дальность действия. Процесс измерений и их последующей обработки практически автоматизирован. Наземная приемная радиотехническая аппаратура компактна, имеет сравнительно небольшой вес и малую энергоемкость. По этим причинам радиотехнические методы траекторных измерений КА активно используются при выполнении различных научных и практических работ.

Радиотехнические методы измерений основаны на предположении о постоянстве скорости ЭМВ в свободном пространстве и прямолинейности их траекторий распространения, а также на использовании свойств изменения характеристик радиосигнала, обусловленных изменением взаимного положения НП и КА. В настоящее время применяются три принципа формирования сигналов, несущих полезную информацию о вторичных измеряемых параметрах, к которым относятся: дальность и разность дальностей по линии НП-КА, а также скорость относительного перемещения КА и НП.

Первый принцип заключается в использовании отражения радиоволн от спутника, излучаемых передатчиком НП. Достоинством такого принципа является простота конструкции КА и как следствие – его высокая надежность. К недостаткам следует отнести малую интенсивность отраженного радиосигнала и

возникновение взаимных помех при одновременном облучении спутника с нескольких передатчиков. Все это ограничивает возможности получения измерительной информации в подобных РТС.

Второй принцип основан на ретрансляции (переизлучении) бортовой аппаратурой КА радиосигнала, излученного передатчиком НП. РТС, реализующие данный принцип измерения, называются запросными. К их достоинствам следует отнести большую дальность действия, к недостаткам – малую пропускную способность.

Третий принцип основан на формировании и излучении радиосигнала передатчиком КА. РТС, реализующие такой принцип измерения, называются беззапросными. К их достоинствам относятся большая дальность действия, неограниченная пропускная способность, возможность проведения синхронных измерений с нескольких НП. К недостаткам следует отнести сложность радиоэлектронной аппаратуры спутника.

Наиболее простым в смысле технической реализации и последующей математической обработки измерений, выполненных для решения геодезических задач, является запросный метод. Техническая же реализация беззапросного метода сложнее, и на этапе математической обработки результатов его измерений приходится учитывать ряд физических эффектов, не свойственных запросному методу. К ним относятся нестабильность опорных генераторов передатчика и приемника, релятивистские эффекты и др. Эти эффекты вносят в измерения значительные погрешности систематического характера, которые в той или иной степени можно учесть.

К измеряемым характеристикам радиосигнала, так называемым первичным измеряемым параметрам, относятся время распространения, частота, фаза, и амплитуда радиосигнала. В связи с этим различают импульсные, частотные, фазовые и амплитудные методы радиотехнических траекторных измерений КА.

Импульсные методы используются для определения расстояний между НП и КА. Принцип действия основан на измерении времени распространения

радиоимпульса между фазовыми центрами антенн передающей (установленной на борту КА) и приемной (используемой потребителем) аппаратуры.

В беззапросных импульсных дальномерных РТС аппаратурой НП вырабатывается опорный импульс в момент генерации такого же радиоимпульса передатчиком спутника. Этот радиоимпульс, пройдя расстояние КА-НП, поступает в регистрирующее устройство наземного приемника. Здесь непосредственно измеряется промежуток времени $(\tau - t)$ между моментом τ приема радиоимпульса (в шкале времени НП) и моментом t генерации (в шкале времени КА) опорного импульса. В общем случае расстояние S по линии КА-НП находится по формуле

$$S = C \cdot (\tau - t),$$

где C – скорость света в вакууме.

Частотные методы получили распространение при определении радиальной (лучевой) скорости V перемещения КА относительно НП, а также для определения разности дальностей δr по линии КА-НП. Эти методы основаны на измерении доплеровского сдвига частоты, поэтому они называются доплеровскими методами траекторных измерений спутников.

Прямое определение доплеровского сдвига частоты заключается в наложении колебаний частоты f_R принятого со спутника электромагнитного сигнала на имитирующие их колебания частоты f_G , созданные генератором наземного приемника. В итоге получается результирующая частота $f_G - f_R$, равная разности частот этих двух сигналов. Такая частота называется разностной частотой (частотой биений). Приемником измеряется число колебаний (циклов) этой частоты биений. Если бы опорная частота f_G совпадала с частотой f_s генератора передатчика, то частота биений равнялась бы доплеровскому сдвигу частоты переданного сигнала. При этом он может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Чтобы доплеровский сдвиг частоты всегда имел положительное значение, опорную частоту f_G делают несколько больше частоты

f_S излучаемых электромагнитных колебаний.

Существуют два вида доплеровских измерений – дифференциальный и интегральный. В первом случае приемником измеряется частота биений $f_G - f_R$, во втором случае приемником производится подсчет числа циклов $N_{i,i+1}$ разностной частоты по моментам τ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$; n – число принятых временных меток в текущем сеансе) приема временных меток на некотором интервале времени $T = [\tau_i, \tau_{i+1}]$ как интеграл [152]

$$N_{i,i+1} = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (f_G - f_R) \cdot dt .$$

Длительность интервала времени T с высокой точностью измеряется часами приемника в так называемой шкале времени приемника. Подсчет числа циклов частоты биений может также производиться и в шкале времени спутника на отрезке времени $T_S = [t_i, t_{i+1}]$ по моментам t_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$; n – число переданных временных меток в текущем сеансе) генерации временных меток передатчиком КА. В этом случае продолжительность временного интервала T_S определяется длительностью передачи аппаратурой КА строки либо группы строк служебной информации навигационного кадра. В дифференциальных доплеровских измерениях лучевая скорость определяется по известной формуле

$$V = (f_G - f_R) \cdot C / f_S .$$

В случае интегральных доплеровских измерений разность дальностей определяется по формуле

$$\delta\rho = N_{i,i+1} \cdot C / f_S .$$

Фазовые методы применяются для измерения расстояния от НП до КА и углов, определяющих направление на спутник. Здесь выполняется измерение

разности фаз между принятыми с КА и сформированными аппаратурой НП гармоническими колебаниями. Для определения углов требуется измерять разность фаз радиосигнала, передаваемого со спутника двумя разнесенными между собой приемными антеннами НП. При этом разность фаз будет пропорциональна разности наклонных дальностей между КА и НП.

В беззапросных фазовых дальномерных РТС непосредственно измеряемой величиной является выделенная в приемнике на момент времени τ разность фаз $\varphi_G(\tau) - \varphi_S(t)$. Откуда расстояние S между КА и НП определяется по формуле

$$S = (\varphi_G(\tau) - \varphi_S(t)) \cdot C / f_S ,$$

где $\varphi_G(\tau)$ – фаза образованного генератором наземного приемника в момент времени τ радионавигационного сигнала частоты f_G ;

$\varphi_S(t)$ – фаза образованного генератором передатчика в момент времени t радионавигационного сигнала частоты f_S .

Амплитудные методы применяются для определения направлений на движущийся объект. Изменение амплитуды зависит от многих факторов (мощность бортового передатчика, затухание ЭМВ в атмосфере, коэффициент направленного действия антенн передатчика и приемника и т. п.), действие которых непрерывно меняется. В связи с этим данный метод измерений используется только в тех случаях, когда не требуется большой точности.

Для геодезических целей нашли применение частотный, фазовый и импульсный методы измерения расстояний, лучевой скорости, разности дальностей между НП и КА беззапросными РТС. В околоземном пространстве работают КА, большинство из которых оснащены радиотехнической аппаратурой для определения параметров их орбит. Кроме этого для оперативного и точного определения пространственных положений НП развернут ряд зарубежных и отечественных СРНС, представляющих совокупность взаимодействующих между собой ракетно-космических, радиотехнических и радиоэлектронных комплексов и устройств, где

основными объектами для использования являются космические аппараты.

Для обработки результатов наблюдений КА зарубежными и отечественными исследователями разработан ряд математических моделей радиотехнических траекторных измерений вида (1.5). В случае доплеровских наблюдений широко используются модели, описанные в работах [22, 181, 186, 191], в случае радиодальномерных – [159, 169, 187, 194]. В них учитываются влияния таких факторов, как тропосферная и ионосферная рефракции, релятивистские эффекты, нестабильность опорных генераторов передатчика и приемника, временные задержки приемной и передающей аппаратуры.

При детальном анализе этих моделей обнаружилось (см. приложение Е), что в них присутствуют существенные ошибки и не учитываются проявления некоторых эффектов (абберация, нестабильность опорных генераторов и т.д.). По этим причинам величина ошибок моделей в случае радиодальномерных измерений находится на уровне 3 м, в случае интегральных доплеровских измерений – нескольких циклов, в случае дифференциальных доплеровских измерений – нескольких герц. Точность моделей измерений, представленных в предыдущих работах автора [41, 45, 49], составляет следующие величины: для радиодальномерных и интегральных доплеровских измерений – на уровне 10 см, для дифференциальных доплеровских измерений – $3,3 \cdot 10^{-2}$ Гц.

Дальнейшее совершенствование математических моделей беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников в направлении повышения их точности обусловлено двумя основными причинами: первая – точность моделей должна соответствовать точности современной измерительной информации; вторая – обеспечение регулярного и корректного решения задачи оценивания при плохой геометрии наблюдений, что на этапе решения СЛАУ требует соблюдения условия (1.131). К разрабатываемым моделям предъявлялись следующие требования: они должны достаточно точно описывать физические процессы и закономерности, связанные с функционированием приемной и передающей радиотехнической аппаратуры, движением КА по своей орбите, а также

распространением ЭМВ в атмосфере Земли. Одновременно модели измерений должны быть простыми и удобными для их дальнейшего использования.

2.2 Влияние рефракции земной атмосферы на траекторию радиосигнала

Рассмотрим влияние атмосферы Земли на распространение ЭМВ, чтобы получить формулу общего вида для определения длины траектории (фазового пути) прохождения радиосигнала от ФЦА спутника до ФЦА приемника.

Известно, что атмосферная рефракция оказывает существенное влияние на характер распространения ЭМВ. Рефракция изменяет траекторию распространения ЭМВ в зависимости от электрических свойств неоднородных сред (в частности, атмосферы Земли и других планет). Искривление траектории ЭМВ в неоднородной атмосфере вызывает отклонение наблюдаемого положения источников излучения от их истинного положения, что приводит к изменению измеряемых до них расстояний. Помимо этого, атмосферная рефракция изменяет скорость распространения ЭМВ. В вакууме ее скорость равна скорости света. В атмосфере Земли скорость света и, следовательно, скорость распространения ЭМВ являются функциями показателя преломления среды, который возрастает при возрастании ее плотности. По этой причине скорость света и, соответственно, ЭМВ в атмосфере не постоянна. Примечательно, что развитие теории рефракции имеет большую историю. Связана она, в основном, с развитием морской навигации и наблюдательной астрономии. К первым исследователям астрономической рефракции можно смело отнести И. Коперника [185] и И. Кассини [172].

Условно атмосферу Земли можно разделить на два слоя, существенно отличающихся друг от друга по своим электрическим свойствам [99]. Нижний слой – тропосфера простирается до высоты ~ 60 км. В основном он состоит из азота и кислорода, а также водяного пара, количество которого в единице объема меняется в зависимости от высоты, географии расположения района, времени суток и времени года. Верхний слой – ионосфера простирается до высоты $\sim 20\ 000$ км. Он состоит из частично ионизированной плазмы, концентрация

заряженных частиц которой и их химический состав значительно меняются в зависимости от удаления от Земли, от времени суток, а также от солнечной активности. Поэтому различают и два вида рефракции: тропосферную и ионосферную. Как будет показано в 2.6, тропосферная рефракция удлиняет измеряемое расстояние, ионосферная – укорачивает его.

Фазовый путь \hat{S} ЭМВ между ФЦА спутника и ФЦА приемника является функцией показателя преломления n среды и определяется интегралом [5, 99]

$$\hat{S} = \int_s n \cdot dS.$$

Введя приведенный показатель преломления N (индекс рефракции) [99, 186]

$$N = (n - 1) \cdot 10^6,$$

получим, что

$$n = 1 + N \cdot 10^{-6}.$$

Откуда

$$\hat{S} = S + 10^{-6} \cdot \int_s N \cdot dS, \quad (2.1)$$

где S – криволинейное расстояние между ФЦА приемника и ФЦА передатчика.

Второе слагаемое в формуле (2.1) будет поправкой к криволинейному расстоянию, которая обусловлена изменением скорости распространения ЭМВ в двухслойной атмосфере Земли. В свою очередь расстояние S может быть представлено суммой прямой наклонной дальности ρ от ФЦА приемника до ФЦА передатчика и поправки $\delta\rho$ за кривизну траектории распространения

радиосигнала в тропосфере Земли [107]

$$S = \rho + \delta\rho. \quad (2.2)$$

Приняв в качестве рабочей двухслойную модель атмосферы Земли и заменив криволинейный путь интегрирования S на прямолинейный ρ , формулу (2.1) запишем в виде:

$$\widehat{S} = \rho + \delta\rho + 10^{-6} \cdot \int_0^{\rho_T} N_{TR} \cdot d\rho + 10^{-6} \cdot \int_{\rho_T}^{\rho_S} N_{IR} \cdot d\rho, \quad (2.3)$$

где N_{TR} – индекс рефракции тропосферы;

N_{IR} – индекс рефракции ионосферы;

ρ_T – наклонная дальность до верхней границы тропосферы;

ρ_S – наклонная дальность до спутника.

В формуле (2.3) третье и четвертое слагаемые описывают влияние атмосферы Земли на скорость распространения электромагнитной волны, а второе слагаемое – на траекторию ее распространения (искривление траектории).

В работе [107, с.171] говорится, что величина поправки $\delta\rho$ пренебрежимо мала и ее можно не учитывать. В других работах, связанных с получением математических моделей радиотехнических траекторных измерений КА, она также не учитывается. С этим стоит не согласиться. Оценим величину поправки за кривизну траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли.

Для определения величины поправки $\delta\rho$ в формуле (2.2) найдем выражение для расчета длины S траектории распространения радиосигнала в тропосфере [75]. Радиус кривизны ξ (см. рисунок 2.1) этой траектории можно оценить по формулам [107]

$$\xi = -n / [\sin Z \cdot (dn/dr)], \quad (2.4)$$

$$n = 1 + 0,776 \cdot 10^{-6} \cdot T^{-1} \cdot (P + 4810 \cdot e \cdot T^{-1}), \quad (2.5)$$

где n – показатель преломления среды;

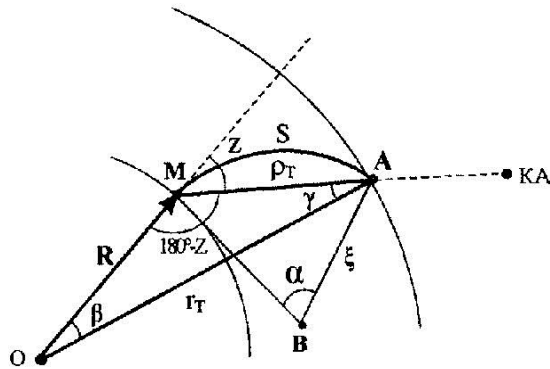
Z – зенитное расстояние КА;

T – абсолютная температура;

P – атмосферное давление;

e – парциальное давление водяных паров.

В формуле (2.4) градиент показателя преломления $dn/dr = -4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1}$, а в формуле (2.5) параметры тропосферы относятся к месту расположения НП.



M – положение НП на поверхности Земли; O – начало геоцентрической системы координат; \mathbf{R} – геоцентрический радиус-вектор НП; ρ_T – топоцентрическое расстояние до верхней точки тропосферы (точка A) в направлении КА; r_T – геоцентрическое расстояние до верхней точки тропосферы; α – центральный угол для дуги S окружности радиуса ξ ; Z – зенитное расстояние КА

Рисунок 2.1 – Геометрическая интерпретация определения поправки $\delta\rho$

Центральный угол α для дуги S можно определить как

$$\alpha = S / \xi . \quad (2.6)$$

Из треугольника BMA следует, что

$$0,5 \cdot \rho_T / \xi = \sin \alpha / 2. \quad (2.7)$$

Отсюда

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin(0,5 \cdot \rho_T / \xi) . \quad (2.8)$$

Приравняв правые части равенств (2.6) и (2.8), можно записать

$$S = 2 \cdot \xi \cdot \arcsin(0,5 \cdot \rho_T / \xi) . \quad (2.9)$$

Зенитное расстояние Z найдем, применив правило скалярного произведения к вектору $\mathbf{R}=[X \ Y \ Z]^T$ и топоцентрическому радиус-вектору $\boldsymbol{\rho} = [\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z}]^T$ КА, как

$$Z = \arccos(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\rho} / (R \cdot \rho)) = \arccos((X \cdot \bar{x} + Y \cdot \bar{y} + Z \cdot \bar{z}) / (R \cdot \rho)) , \quad (2.10)$$

где ρ – топоцентрическое расстояние до КА;

R – геоцентрическое расстояние до НП.

Применив теорему синусов для треугольника ОМА, запишем

$$r_T / \sin(180^\circ - Z) = R / \sin \gamma . \quad (2.11)$$

Откуда получим угол γ

$$\gamma = \arcsin(R / r_T \cdot \sin Z) . \quad (2.12)$$

Теперь можно найти значение угла β

$$\beta = Z - \gamma . \quad (2.13)$$

Снова применив теорему синусов для треугольника ОМА, получим топоцентрическое расстояние ρ_T до верхней точки тропосферы

$$\rho_T = r_T \cdot \sin \beta / \sin Z . \quad (2.14)$$

Значение поправки $\delta\rho$ за кривизну траектории распространения ЭМВ в тропосфере Земли определим как

$$\delta\rho = S - \rho_T . \quad (2.15)$$

Геоцентрическое расстояние r_T до верхней точки А тропосферы можно найти из равенства

$$r_T = N + 60000 \text{ м} , \quad (2.16)$$

где N – радиус кривизны первого вертикала в точке расположения НП.

Результаты определения значений $\delta\rho$ в зависимости от величины Z представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Значение поправки $\delta\rho$ в тропосфере

Зенитное расстояние Z	Радиус кривизны ξ траектории S (км)	Длина дуги траектории S (м)	Длина спрямленной траектории (хорды) ρ_T (м)	Значение поправки $\delta\rho$ (см)
90°	25000	877219,640	877174,638	4500,2
85°	25095	482010,902	482003,493	740,9
80°	25386	304740,135	304738,305	183,0
75°	25882	218140,733	218140,088	64,5
70°	26604	169394,754	169394,468	28,6
65°	27584	138832,531	138832,384	14,7
60°	28868	118176,717	118176,634	8,3
50°	32635	92581,520	92581,489	3,1
40°	38893	77940,021	77940,008	1,3
30°	50000	69059,884	69059,878	0,6
20°	73095	63705,103	63705,101	0,2
10°	143969	60815,279	60815,279	0,0
5°	286843	60126,672	60126,672	0,0

Значения поправки $\delta\rho$ в таблице 2.1 получены для НП, имеющего широту $B=55^\circ$ и геодезическую высоту $H_T = 100$ м относительно РЭ Красовского, и

параметров тропосферы $T = 293^{\circ}K$, $P = 1013$ мбар, $e = 11$ мбар. Из представленных в таблице 2.1 данных видно, что величина поправки $\delta\rho$ для зенитных расстояний больших 60° достаточно большая. Следовательно, эту поправку необходимо учитывать в математических моделях радиотехнических траекторных измерений спутников при решении задачи оценивания геодезических и орбитальных параметров.

Для вычисления радиуса кривизны первого вертикала N в точке расположения НП необходимо знать его геодезическую высоту. Проведенные автором экспериментальные исследования показывают, что численное значение этой высоты достаточно знать с точностью до нескольких десятков метров [86]. Отсюда следует, что нет необходимости определять аномалию высоты в месте нахождения НП. Вместо геодезической высоты можно использовать нормальную высоту.

В ионосфере значение $\delta\rho$ не превышает 0,8 см для зенитных расстояний $Z \leq 80^{\circ}$ (см. таблицу 2.2, которая составлена по данным, взятым из работы [182]). Поэтому значение $\delta\rho$ для ионосферы можно не учитывать, а для тропосферы следует учитывать.

Таблица 2.2 – Значение поправки $\delta\rho$ (метры) в ионосфере

Индекс рефракции	Зенитное расстояние Z			
	$Z = 70^{\circ}$	$Z = 80^{\circ}$	$Z = 85^{\circ}$	$Z = 90^{\circ}$
320	0,001	0,004	0,14	10
400	0,002	0,008	0,20	60

В формуле (2.3) интеграл

$$\delta\rho_{TR} = 10^{-6} \cdot \int_0^{\rho_T} N_{TR} \cdot d\rho \quad (2.17)$$

есть поправка $\delta\rho_{TR}$ за влияние тропосферной рефракции (тропосферная поправка) в измеряемое расстояние, а интеграл

$$\delta\rho_{IR} = 10^{-6} \cdot \int_{\rho_T}^{\rho_S} N_{IR} \cdot d\rho \quad (2.18)$$

есть поправка $\delta\rho_{IR}$ за влияние ионосферной рефракции (ионосферная поправка) [31]. Если КА находится за пределами ионосферы, то предел интегрирования ρ_S в формуле (2.18) заменяется значением наклонной дальности до верхней границы ионосферы. С учетом изложенного выше, фазовый путь ЭМВ определяется выражением

$$\hat{S} = \rho + \delta\rho + \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR}. \quad (2.19)$$

Для расчета поправки $\delta\rho_{TR}$ используются различные модели тропосферы, лучшие из них допускают погрешность при вычислении $\delta\rho_{TR}$ около 1% (2 см – 30 см) от значения поправки [92, 174, 186]. Кроме того, погрешность расчета тропосферной поправки возрастает до 15% при прохождении метеорологического фронта в радиусе 30 км от станции наблюдения [189]. По этим причинам необходимо вводить поправочный коэффициент K_T (масштабный множитель), который учитывает остаточные погрешности моделей тропосферы [22, 176]. Этот коэффициент включается в число мешающих параметров в уравнениях поправок, составленных для обработки траекторных измерений КА. С учетом сказанного, выражение (2.19) можно записать в таком виде:

$$\hat{S} = \rho + \delta\rho + (1+K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR}. \quad (2.20)$$

Влияние ионосферной рефракции на измеряемое расстояние исключается проведением измерений на двух и более частотах [5, 188]. Методика учета ионосферной рефракции в доплеровских и радиодальномерных траекторных измерениях КА будет подробно изложена в 2.6.

2.3 Принцип доплеровских методов определения местоположения

Использование доплеровских методов определения пространственного положения точек, расположенных как на физической поверхности Земли, так и в околоземном пространстве, явилось значительным технологическим прорывом в области проведения различных геодезических работ. Эти методы основаны на использовании специальных КА, наземной службы их навигационного обеспечения и радиотехнической приемной аппаратуры потребителя. Доплеровский метод успешно применяется при решении различных задач космической геодезии, при проведении специальных геодезических съемок отдельных участков поверхности и определении пространственных координат точек не только Земли, но и некоторых планет Солнечной системы.

Эффект Доплера проявляется при наличии относительной (лучевой) скорости перемещения источника сигнала и приемника. Величина возрастания или уменьшения частоты сигнала, обусловленная изменением лучевой скорости, известна в науке как доплеровский сдвиг частоты и описывается следующей формулой:

$$f_d = -f_s/C \cdot dp/dt, \quad (2.21)$$

где f_d – доплеровский сдвиг частоты;

f_s – частота излучаемого сигнала (частота опорного генератора передатчика);

C – скорость света в вакууме;

dp/dt – лучевая скорость перемещения КА и НП.

Удобный метод для прямого определения доплеровского сдвига частоты заключается в наложении колебаний принятого сигнала на имитирующие их колебания генератором приемной аппаратуры. В результате получается результирующая частота, равная разности частот двух сигналов. Такая частота называется разностной частотой или частотой биений.

Приемником непосредственно измеряется число колебаний (циклов) час-

тоты биений $f_G - f_R$, образованной смешением частоты f_R принятого сигнала и частоты f_G (опорной частоты) колебаний опорного генератора приемника (см. рисунок 2.2).

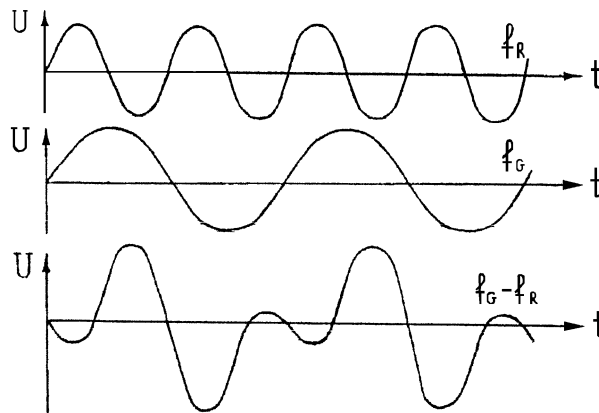


Рисунок 2.2 – Образование разностной частоты $f_G - f_R$

Если бы опорная частота совпадала с частотой f_s опорного генератора передатчика, то частота биений равнялась бы доплеровскому сдвигу частоты переданного сигнала. Биения проявляют себя в возрастании напряжения U , которое измеряется регистрирующей аппаратурой НП. Такой подход дает точный и удобный способ определения доплеровского сдвига частоты.

При прохождении спутником точки траверза (точки на орбите КА, находящейся на минимальном удалении от НП) происходит смена знака доплеровского сдвига частоты, что значительно усложняет обработку измерительной информации. Чтобы избежать этого явления, опорным генератором приемника вырабатываются колебания с частотой f_G несколько большей, чем частота f_s опорного генератора передатчика. Тогда частота подставки

$$\Phi = f_G - f_s \quad (2.22)$$

и доплеровский сдвиг частоты f_d будут всегда положительными. В этом случае разностная частота, поступающая в измерительное устройство приемника, будет также иметь положительное значение. Например, для СРНС TRANZIT частота

подставки равна 32000 Гц.

Принцип доплеровских траекторных измерений КА заключается в следующем. Спутник, двигаясь по орбите, непрерывно излучает два радионавигационных сигнала с когерентными несущими частотами f_s^I и f_s^{II} , модулированными по фазе временной, эфемеридной и другой служебной информацией. Вследствие взаимного перемещения передатчика и приемника в пространстве частоты f_R^I и f_R^{II} принятых колебаний будут отличаться от частот f_s^I и f_s^{II} на величину доплеровского сдвига (влияние атмосферной рефракции и прочих факторов здесь пока не учитывается). В режиме автокоррекции сигнал частоты f_R^I исправляется поправкой, учитывающей влияние ионосферной рефракции (см. 2.6) [50, 56]. Затем исправленный сигнал с частотой f_R смешивается с колебаниями опорной частоты f_G приемника.

Существуют два вида доплеровских измерений – дифференциальный и интегральный. В первом случае приемником непосредственно измеряется доплеровский сдвиг частоты, во втором – число колебаний разностной частоты в течение некоторого определенного интервала времени. Общая схема дифференциальных доплеровских измерений приведена в начале этого подраздела. Поэтому рассмотрим принцип интегральных доплеровских измерений.

Для интегральных доплеровских измерений зависимость частоты f_R принятого сигнала от различных положений спутника на орбите показана на рисунке 2.3. Здесь пересечение кривых f_s и f_R соответствуют моменту, когда спутник проходит точку траверза. Здесь лучевая скорость равна нулю. В моменты $t_{Г1}, t_{Г2}, \dots, t_{Gi}$ генерации временной метки передатчиком КА ФЦА приемника и передатчика удалены друг от друга на расстояния $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_i$. Эти расстояния ЭМВ проходит соответственно за промежутки времени $\Delta t_1, \dots, \Delta t_i$, определяемые отношением

$$\Delta t_i = C^{-1} \cdot \hat{S}_i, \quad (2.23)$$

где C – скорость света в вакууме.

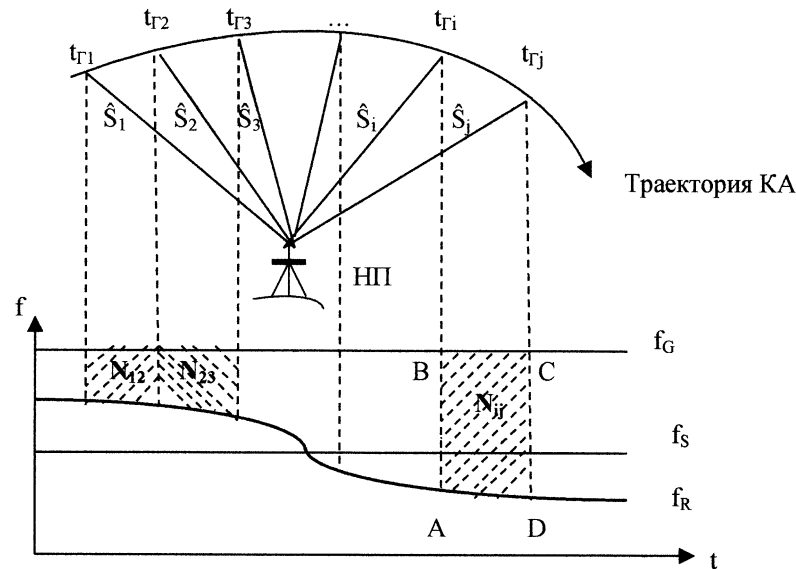


Рисунок 2.3 – Принцип интегральных доплеровских измерений

В интегральном методе доплеровских измерений современные геодезические приемники производят подсчет числа циклов N_{ij} разностной частоты по моментам $t_{\Gamma} + \delta t_S + \Delta t$ приема временных меток на интервале времени $T_G = [t_{\Gamma i} + \delta t_S + \Delta t_i, t_{\Gamma j} + \delta t_S + \Delta t_j]$ ($i = 1, 2, \dots, L-1; j = i + 1; L$ - число принятых временных меток в текущем сеансе) в так называемой шкале времени приемника (локальной системе времени - ЛСВ) как интеграл [26, 152, 186, 191]

$$N_{ij} = \int_{t_{\Gamma i} + \delta t_S + \Delta t_i}^{t_{\Gamma j} + \delta t_S + \Delta t_j} (f_G - f_R) \cdot dt. \quad (2.24)$$

Подсчет числа циклов частоты биений может также производиться и в шкале времени спутника (спутниковой системе времени – ССВ) на отрезке времени $T_S = [t_{\Gamma i}, t_{\Gamma j}]$ по моментам t_{Γ} . Продолжительность временного интервала T_S определяется длительностью передачи аппаратурой КА строки либо группы строк служебной информации навигационного кадра.

Накопленное в течение интервала времени $[t_{\Gamma i} + \Delta t_i, t_{\Gamma j} + \Delta t_j]$ число циклов N_{ij} , определяемое интегралом (2.24), соответствует площади криволинейной

трапеции ABCD (рисунок 2.3).

Более детально процесс доплеровских измерений выглядит следующим образом [79, 134]. Радионавигационный сигнал частоты f_s , модулированный по фазе временной меткой в момент t_Γ , претерпевает внутреннюю временную задержку δt_s передатчика и начинает распространяться от его ФЦА по криволинейному пути \hat{S} в момент $t_\Gamma + \delta t_s$ (рисунок 2.4, позиция 1) и достигает ФЦА приемника с временной задержкой Δt (2.23), имея уже частоту f_R (рисунок 2.4, позиция 2). После этого сигнал не подвергается влиянию доплеровского сдвига частоты.

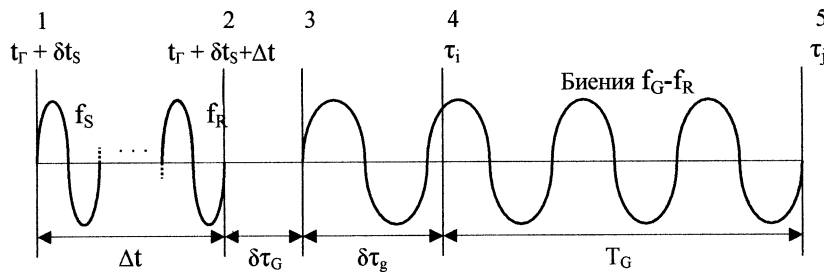


Рисунок 2.4 – Принципиальная схема временных событий процесса доплеровских измерений

От фазового центра приемной антенны сигнал по антенному кабелю и внутренним цепям распространяется до счетного устройства приемника за промежуток времени $\delta\tau_G$, после чего выполняется декодирование временной метки (рисунок 2.4, позиция 3). На декодирование в приемнике временной метки затрачивается промежуток времени $\delta\tau_g$ (рисунок 2.4, позиция 4). Поэтому декодирование этой метки заканчивается в момент $\tau_i = t_{\Gamma i} + \delta t_s + \Delta t_i + \delta\tau_G + \delta\tau_g$ (рисунок 2.4, позиция 4). С этого момента начинается подсчет числа циклов N_{ij} разностной частоты на интервале $T_G = [\tau_i, \tau_j]$, длительность которого с высокой точностью может быть измерена часами приемника. Современная доплеровская аппаратура позволяет на интервале интегрирования производить подсчет дробного числа циклов. Технология этого процесса достаточно подробно описана в обзоре [22].

Длительности интервалов $\delta\tau_G$ и $\delta\tau_g$ не измеряются, их средние значения могут быть определены при эталонировании прибора в лабораторных условиях. Временная задержка $\delta\tau_g$ изменяется в пределах 500 мкс - 1500 мкс [22, 115], а интервал $\delta\tau_G$ много меньше, чем $\delta\tau_g$.

Рассмотрим подробнее временные события, сопутствующие процессу измерений (рисунок 2.5). При этом будем считать, что центр масс спутника и ФЦА его передатчика совпадают.

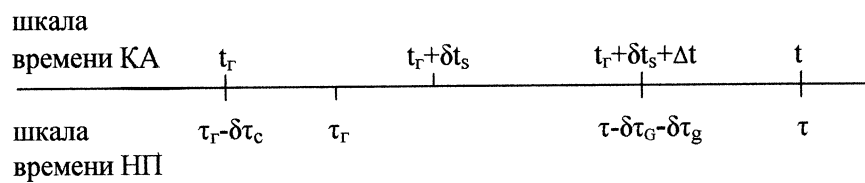


Рисунок 2.5 – Графическая иллюстрация временных событий процесса доплеровских измерений

После генерации (в ССВ – момент t_G , в ЛСВ – момент τ_G) метка времени претерпевает внутреннюю временную задержку δt_s передатчика и распространяется в пространстве между фазовыми центрами антенн передатчика и приемника в течение интервала времени Δt . Этот интервал содержит дополнительные временные задержки, обусловленные влиянием на распространение ЭМВ в пространстве ионосферной и тропосферной рефракций, а также релятивистскими и абберационными эффектами. Метка времени, достигаемая ФЦА приемника НП в момент времени $t_G + \delta t_s + \Delta t$, испытывает внутреннюю задержку $\delta\tau_G$ приемника и попадает в счетное устройство (рисунок 2.4, позиция 3). Подсчет колебаний разностной частоты начинается в момент t после декодирования временной метки (рисунок 2.4, позиция 4):

$$t = t_G + \delta t_s + \Delta t + \delta\tau_G + \delta\tau_g. \quad (2.25)$$

В шкале времени приемника этому событию соответствует момент τ , который точно фиксируется относительно шкалы Атомного времени.

Вследствие релятивистских эффектов время на движущемся спутнике изменяется медленнее, чем на Земле. Это вызвано, с одной стороны, относительным движением КА и НП, с другой – изменением течения времени под влиянием гравитационного поля Земли. Поэтому соотношение между интервалами времени $\tau - \tau_{\Gamma}$ и $t - t_{\Gamma}$, полученными путем разности моментов генерации τ_{Γ} , t_{Γ} и приема τ , t метки времени (в ЛСВ и ССВ соответственно), следующее

$$\tau - \tau_{\Gamma} = t - t_{\Gamma} + \delta t_p. \quad (2.26)$$

Величина релятивистской поправки δt_p определяется по формуле [107]

$$\delta t_p = (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1}))/C^2, \quad (2.27)$$

где $\dot{\rho}$ – топоцентрическая скорость спутника;

μ – гравитационный параметр Земли;

R и r – геоцентрические расстояния ФЦА приемника и передатчика соответственно в момент τ начала измерений;

C – скорость света в вакууме.

Прибавив к левой и правой частям равенства (2.26) разность $\tau_{\Gamma} - t_{\Gamma}$, с учетом формулы (2.25) получим выражение для промежутка времени, образованного разностью моментов начала измерений и генерации метки времени

$$\tau - t_{\Gamma} = \tau_{\Gamma} - t_{\Gamma} + \delta t_s + \Delta t + \delta \tau_G + \delta \tau_g + \delta t_p. \quad (2.28)$$

Если шкалы часов передатчика и приемника синхронизированы, то моменты времени τ_{Γ} и t_{Γ} в равенстве (2.28) совпадают, то есть $\tau_{\Gamma} - t_{\Gamma} = 0$. В противном случае появится дополнительная временная задержка $\delta \tau_c$, обусловленная

нестабильностью работы опорных генераторов приемника и передатчика

$$\delta\tau_c = \tau_r - t_r. \quad (2.29)$$

Подставив $\delta\tau_c$ в формулу (2.28), получим зависимость для вычисления промежутка времени $\tau - t_r$:

$$\tau - t_r = \Delta t + \delta\tau_c + \delta t_p + \delta t_s + \delta\tau_G + \delta\tau_g, \quad (2.30)$$

где Δt – время распространения ЭМВ от ФЦА передатчика до ФЦА приемника;

$\delta\tau_c$ – временная задержка сигнала, вызванная нестабильностью работы опорных генераторов передатчика и приемника;

δt_p – релятивистская поправка;

δt_s – внутренняя временная задержка сигнала в передатчике;

$\delta\tau_G$ – внутренняя временная задержка сигнала в приемнике;

$\delta\tau_g$ – промежуток времени декодирования временной метки в приемнике.

Временные задержки $\delta\tau_c$, δt_s , $\delta\tau_G$ и $\delta\tau_g$ не изменяют величины доплеровского сдвига частоты. Задержки $\delta\tau_G$ и $\delta\tau_g$ образуют общую временную задержку $\delta\tau$

$$\delta\tau = \delta\tau_G + \delta\tau_g. \quad (2.31)$$

Шкалы времени приемника и передатчика задаются путем деления частот высокостабильных опорных генераторов, поэтому эти генераторы выступают и в роли высокоточных хранителей времени. Нестабильность частоты опорных генераторов обуславливает неравномерное течение этого времени. Последнее обстоятельство сказывается на измеренной продолжительности распространения сигнала от ФЦА передатчика до ФЦА приемника.

Относительную нестабильность частот генераторов приемника K_G и передатчика K_S , определяется соотношениями [161]

$$K_G = (f_G^0 - f_G) / f_G, \quad K_S = (f_S^0 - f_S) / f_S, \quad (2.32)$$

где f_G^0 и f_S^0 – номинальные значения частот;

f_G и f_S – текущие значения частот.

В настоящее время в СРНС используются водородные стандарты частоты с относительной нестабильностью частоты за сутки от $5 \cdot 10^{-14}$ до $1 \cdot 10^{-14}$ [28].

Чтобы получить аналитическое выражение для расчета временной задержки $\delta\tau_C$, запишем следующее равенство на момент генерации временной метки в неравномерной шкале времени:

$$\tau_\Gamma + \int_{\tau_0}^{\tau} K_G \cdot d\tau = t_\Gamma + \int_{\tau_0}^{\tau} K_S \cdot d\tau, \quad (2.33)$$

где τ_0 – момент синхронизации часов приемника по первой временной метке в прохождении;

τ – текущее время в неравномерной шкале часов приемника.

Теперь с учетом выражений (2.29) и (2.33) можно записать

$$\delta\tau_C = \int_{\tau_0}^{\tau} (K_S - K_G) \cdot d\tau. \quad (2.34)$$

Текущие значения частот опорных генераторов f_G и f_S на некоторый момент времени τ в ЛСВ с достаточной точностью описываются моделями [115]

$$f_G = f_G^0 + \delta f_G + \dot{f}_G \cdot (\tau - \tau_0), \quad (2.35)$$

$$f_S = f_S^0 + \delta f_S + \dot{f}_S \cdot (\tau - \tau_0), \quad (2.36)$$

где f_G^0 и f_S^0 – номинальные значения частот;

δf_G и δf_S – уходы частот;

\dot{f}_G и \dot{f}_S – скорости ухода частот.

Принимая во внимание зависимости (2.32), (2.35) и (2.36), временную задержку τ_C в выражении (2.34) представим в виде [79, 134]

$$\delta\tau_C = (\delta f_G / f_G^0 - \delta f_S / f_S^0) \cdot (\tau - \tau_0) + (\dot{f}_G / f_G^0 - \dot{f}_S / f_S^0) \cdot (\tau - \tau_0)^2 / 2. \quad (2.37)$$

В некоторых радиотехнических системах частоты f_G^0 и f_S^0 совпадают [91]. Тогда задержка $\delta\tau_C$ может быть определена как

$$\delta\tau_C = (\tau - \tau_0) \cdot (\delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot (\tau - \tau_0) / 2) / f_G^0. \quad (2.38)$$

Уход частоты подставки $\delta\Phi$ и скорость ухода частоты подставки $\dot{\Phi}$ здесь определяются как

$$\delta\Phi = \delta f_G - \delta f_S, \quad \dot{\Phi} = \dot{f}_G - \dot{f}_S. \quad (2.39)$$

2.4 Математические модели доплеровских траекторных измерений

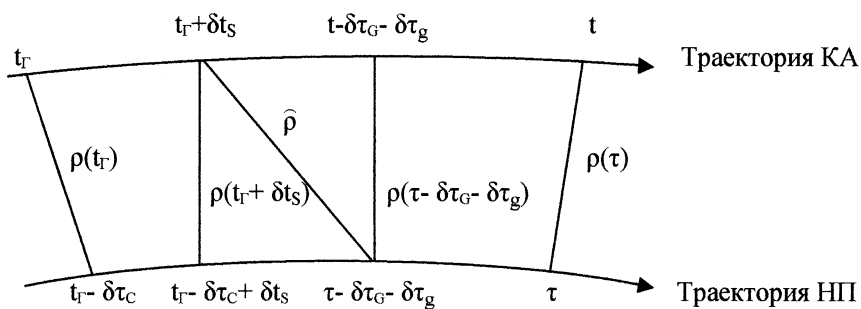
Число циклов N_{ij} в интегральном методе может быть отнесено к интервалу времени $T_S = [t_{\Gamma i}, t_{\Gamma j}]$ (в ССВ), либо к интервалу $T_G = [\tau_i, \tau_j]$ (в ЛСВ). Если точно известны моменты τ_i и τ_j , то обработку измерений следует проводить в локальной системе времени, если известны моменты $t_{\Gamma i}$ и $t_{\Gamma j}$ – то в спутниковой системе времени. Сначала получим математическую модель интегральных доплеровских траекторных измерений КА в шкале времени приемника, а затем в шкале времени спутника. Точность моделей определим в 0,01 колебания, так как современные геодезические доплеровские приемники осуществляют подсчет числа циклов

именно с такой ошибкой [22].

Длина фазового пути ЭМВ описывается выражением (2.20)

$$\hat{S} = \hat{\rho} + \delta\rho + (1 + K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR}. \quad (2.40)$$

В нем под $\hat{\rho}$ понимается прямая наклонная дальность между ФЦА передатчика в момент $t_T + \delta t_S$ и приемника в момент $\tau - \delta\tau_G - \delta\tau_g = \tau - \delta\tau$ (рисунок 2.6).



$\rho(t_T)$, $\rho(\tau - \delta\tau)$ и $\rho(\tau)$ – прямые наклонные дальности до спутника в моменты времени t_T , $\tau - \delta\tau$ и τ соответственно; $\delta\tau$ – общая внутренняя временная задержка формула (2.31) доплеровского приемника

Рисунок 2.6 – Геометрия корректировки дальности $\hat{\rho}$ КА-НП на один физический момент времени τ

Так как дальность $\hat{\rho}$ определяется между положениями КА и НП, находящимися в пространстве в разные моменты времени, а начало подсчета числа колебаний разностной частоты происходит в момент τ , то необходимо выполнить корректировку этой дальности на один физический момент времени. В качестве такого момента примем момент τ начала подсчета аппаратурой КА числа циклов разностной частоты (см. рисунок 2.6).

Расстояние $\rho(\tau - \delta\tau)$ отличается от $\hat{\rho}$ на величину, обусловленную абберационным эффектом, вызванным перемещением КА относительно “неподвижного” НП. Поэтому с точностью до членов первого порядка малости можно записать

$$\hat{\rho} = \rho(\tau - \delta\tau) - \dot{\gamma}(\tau - \delta\tau) \cdot [(\tau - \delta\tau) - (t_{\Gamma} + \delta t_S)]. \quad (2.41)$$

Сомножитель $\dot{\gamma}(\tau - \delta\tau)$ из формулы (2.41) разложим в ряд Тейлора

$$\dot{\gamma}(\tau - \delta\tau) = \dot{\gamma}(\tau) - \frac{\partial \dot{\gamma}(\tau)}{\partial \tau} \cdot \delta\tau - \dots \quad (2.42)$$

Отбросив члены второго порядка малости, примем $\dot{\gamma}(\tau - \delta\tau) = \dot{\gamma}(\tau)$. Переменная $\dot{\gamma}(\tau)$ является проекцией вектора $\dot{\mathbf{r}}(\tau)$ геоцентрической скорости КА на орт его топоцентрического радиус-вектора $\boldsymbol{\rho} = [\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{z}]^T$ в момент τ , то есть

$$\dot{\gamma}(\tau) = \boldsymbol{\rho}^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\tau). \quad (2.43)$$

Вектор $\boldsymbol{\rho}(\tau)$ в равенстве (2.43) определяется как разность геоцентрических радиус-векторов $\mathbf{r}(\tau)$ спутника и $\mathbf{R}(\tau)$ наблюдателя в момент τ приема сигнала

$$\boldsymbol{\rho}(\tau) = \mathbf{r}(\tau) - \mathbf{R}(\tau). \quad (2.44)$$

Принимая во внимание зависимость (2.30), можно записать

$$(t_{\Gamma} - \delta\tau) - (t_{\Gamma} + \delta t_S) = \Delta t + \delta\tau_C + \delta t_P. \quad (2.45)$$

Разложив $\rho(\tau - \delta\tau)$ равенства (2.41) в ряд Тейлора, ограничившись при этом первыми членами разложения, получим

$$\rho(\tau - \delta\tau) = \rho(\tau) - \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} \cdot \delta\tau. \quad (2.46)$$

В разложении (2.46) $V(\tau) = \partial\rho(\tau)/\partial\tau$ есть лучевая скорость КА в момент τ , которая рассчитывается по формуле

$$V(\tau) = \rho^{-1}(\tau) \cdot (\dot{\mathbf{r}}^T(\tau) - \dot{\mathbf{R}}^T(\tau)) \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau). \quad (2.47)$$

Здесь

$$\dot{\mathbf{R}}(\tau) = d\mathbf{R}(\tau)/d\tau \quad (2.48)$$

есть вектор геоцентрической скорости НП. Теперь равенство (2.41) с учетом зависимостей (2.45) - (2.47) можно записать так

$$\hat{\rho} = \rho(\tau) - V(\tau) \cdot \delta\tau - \dot{\gamma}(\tau) \cdot \Delta t - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p). \quad (2.49)$$

Прямая дальность до КА отличается от криволинейного расстояния незначительно (см. 2.2). Поэтому с ошибкой, не превышающей 10^{-10} секунды, время Δt распространения сигнала в формуле (2.23) можно определить так

$$\Delta t = C^{-1} \cdot \hat{\rho}. \quad (2.50)$$

Теперь, принимая

$$\hat{\rho} = C \cdot \Delta t, \quad (2.51)$$

выражение (2.49) можно представить как

$$C \cdot \Delta t = \rho(\tau) - V(\tau) \cdot \delta\tau - \dot{\gamma}(\tau) \cdot \Delta t - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p). \quad (2.52)$$

Отсюда получим время Δt распространения временной метки между ФЦА передатчика и приемника

$$\Delta t = (C + \dot{\gamma}(\tau))^{-1} \cdot [\rho(\tau) - V(\tau) \cdot \delta\tau - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p)]. \quad (2.53)$$

Подставив его значение в формулу (2.49), сделав при этом допущение $C = C + \dot{\gamma}(\tau)$, получим выражение для расстояния $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = m \cdot [\rho(\tau) - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p) - V(\tau) \cdot (\delta\tau)], \quad (2.54)$$

в котором масштабирующий коэффициент m рассчитывается по формуле

$$m = 1 - C^{-1} \cdot \dot{\gamma}(\tau). \quad (2.55)$$

Теперь выражение (2.40) в ЛСВ для фазового пути \hat{S} ЭМВ примет вид

$$\hat{S} = m \cdot [\rho(\tau) - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p) - V(\tau) \cdot \delta\tau] + \delta\rho + (1 + K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR}. \quad (2.56)$$

Измеренное приемником число циклов N_{ij}^G разностной частоты на интервале времени T_G есть разность интегралов

$$N_{ij}^G = \int_{\tau_l}^{\tau_j} f_G \cdot d\tau - \int_{\tau_l}^{\tau_j} f_R \cdot d\tau. \quad (2.57)$$

Чтобы раскрыть второй интеграл в равенстве (2.57), воспользуемся выражением, определяющим значение частоты f_R радионавигационного сигнала, принятого аппаратурой НП [115, 193]:

$$f_R = f_S \cdot (1 + \mu/C^2 \cdot (R^{-1} - r^{-1})) \cdot (1 - \dot{\rho}^2/C^2)^{1/2} \cdot (1 + C^{-1} \cdot d\hat{S}/d\tau)^{-1}, \quad (2.58)$$

где μ – гравитационный параметр Земли.

В формуле (2.58)

$$R = (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})^{1/2}, \quad (2.59)$$

$$r = (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r})^{1/2} \quad (2.60)$$

– геоцентрические расстояния ФЦА приемника и передатчика соответственно;

$$\dot{\rho} = [(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}})^T \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})]^{1/2} \quad (2.61)$$

– топоцентрическая скорость спутника.

Разложив второй и третий сомножители выражения (2.58) в ряд Тейлора, отбросив при этом члены второго порядка малости, получим

$$(1 - \dot{\rho}^2/C^2)^{1/2} = 1 - 0.5 \cdot \dot{\rho}^2 \cdot C^{-2}, \quad (2.62)$$

$$(1 + C^{-1} \cdot d\hat{S}/d\tau)^{-1} = 1 - C^{-1} \cdot d\hat{S}/d\tau. \quad (2.63)$$

Подставив эти равенства в формулу (2.58), отбросив члены второго порядка малости, получим следующее выражение для определения частоты принятого сигнала

$$f_R = f_S \cdot (1 - C^{-1} \cdot \dot{\hat{S}} - C^{-2} \cdot \dot{\rho}^2/2 + C^{-2} \cdot \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1}) + C^{-2} \cdot \dot{\hat{S}}^2). \quad (2.64)$$

Здесь обозначено

$$\dot{\hat{S}} = d\hat{S}/d\tau. \quad (2.65)$$

Подставив значение частоты f_R принятого сигнала из формулы (2.64) в выражение (2.57), с учетом равенства (2.22) для частоты подставки Φ , запишем

$$N_{ij}^G = \int_{\tau_i}^{\tau_j} (f_G - f_R) \cdot d\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_j} \Phi \cdot d\tau + C^{-1} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} f_S \cdot (\dot{\hat{S}} + C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) - C^{-1} \cdot \dot{\hat{S}}^2) \cdot d\tau. \quad (2.66)$$

На основании зависимостей (2.35) и (2.36) частоту подставки можно представить в виде

$$\Phi = \Phi^0 + \delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot (\tau - \tau_0). \quad (2.67)$$

Здесь обозначено

$$\Phi^0 = f_G^0 - f_S^0, \quad \delta\Phi = \delta f_G - \delta f_S, \quad \dot{\Phi} = \dot{f}_G - \dot{f}_S, \quad (2.68)$$

где Φ^0 – номинальное значение частоты подставки;

$\delta\Phi$ – уход частоты подставки;

$\dot{\Phi}$ – скорость ухода частоты подставки.

Теперь первое слагаемое в равенстве (2.66) примет вид

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} \Phi \cdot d\tau = T_G \cdot [\Phi^0 + \delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((\tau_i + \tau_j)/2 - \tau_0)], \quad (2.69)$$

где $T_G = \tau_j - \tau_i$ – интервал времени подсчета циклов разностной частоты в ЛСВ.

Далее получим аналитическое выражение для второго слагаемого в равенстве (2.66):

$$\begin{aligned}
& C^{-1} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} f_s \cdot (\dot{\hat{S}} + C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) - C^{-1} \cdot \dot{\hat{S}}^2) \cdot d\tau = \\
& = C^{-1} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} (\delta f_s^0 + \delta f_s) \cdot (\dot{\hat{S}} + C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) - C^{-1} \cdot \dot{\hat{S}}^2) \cdot d\tau = \\
& = C^{-1} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} f_s^0 \cdot (\dot{\hat{S}} + C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) - C^{-1} \cdot \dot{\hat{S}}^2) \cdot d\tau + \\
& + C^{-1} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} \delta f_s \cdot (\dot{\hat{S}} + C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) - C^{-1} \cdot \dot{\hat{S}}^2) \cdot d\tau. \quad (2.70)
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в выражении (2.70) не превышает 0,01 цикла, поэтому можно записать

$$\begin{aligned}
& C^{-1} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} f_s \cdot (\dot{\hat{S}} + C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) - C^{-1} \cdot \dot{\hat{S}}^2) \cdot d\tau = \\
& = C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot [(\hat{S}_j - \hat{S}_i) + C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) \cdot T_G] - C^{-2} \cdot f_s^0 \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} \dot{\hat{S}}^2 \cdot d\tau. \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\delta \rho_p = C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) \cdot T_G \quad (2.72)$$

поправка в разность дальностей за релятивистский эффект.

Тогда с учетом зависимостей (2.71), (2.72) и (Ж.7) (приложение Ж) имеем

$$C^{-1} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} f_s \cdot (\dot{\hat{S}} + C^{-1} \cdot (\dot{\rho}^2/2 - \mu \cdot (R^{-1} - r^{-1})) - C^{-1} \cdot \dot{\hat{S}}^2) \cdot d\tau =$$

$$= C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot [\widehat{S}_j - \widehat{S}_i + \delta\rho_P - C^{-1} \cdot T_G \cdot (\dot{\widehat{S}}_i \cdot \dot{\widehat{S}}_j + (\dot{\widehat{S}}_j - \dot{\widehat{S}}_i)^2/3)]. \quad (2.73)$$

В выражениях (2.72) и (2.73) переменные $\dot{\rho}$, R и r рассчитываются на средний момент интервала интегрирования T_G , то есть на момент $0.5 \cdot (\tau_i + \tau_j)$.

Подставив зависимости (2.69) и (2.73) в равенство (2.66) получим формулу для подсчета числа циклов N_{ij}^G разностной частоты в ЛСВ

$$N_{ij}^G = T_G \cdot [\Phi^0 + \delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((\tau_i + \tau_j)/2 - \tau_0)] + C^{-1} \cdot (\widehat{S}_j - \widehat{S}_i) \cdot (f_s^0 + \delta f_s) + \\ + C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot [\delta\rho_P - C^{-1} \cdot T_G \cdot (\dot{\widehat{S}}_i \cdot \dot{\widehat{S}}_j + (\dot{\widehat{S}}_j - \dot{\widehat{S}}_i)^2/3)], \quad (2.74)$$

При обработке доплеровских измерений в шкале времени приемника момент τ окончания декодирования очередной временной метки в прохождении известен с высокой точностью. Поэтому число циклов N_{ij}^G следует выразить в виде функции от наклонной дальности $\rho(\tau)$ между фазовыми центрами антенн передатчика и приемника, занимавшими свое пространственное положение в момент τ . Для этого в равенство (2.74) подставим значение расстояния \widehat{S} , определяемого зависимостью (2.56), в которой временная задержка $\delta\tau_C$ рассчитывается по формуле (2.37). В результате получим

$$N_{ij}^G = T_G \cdot [\Phi^0 + \delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((\tau_i + \tau_j)/2 - \tau_0)] + C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot [\delta\rho_G + \Delta\rho + (1 + K_T) \cdot TR + IR_G + \\ + \delta\rho_{AB}^G + \delta\rho_{АП} + \delta\rho_P - (m_j \cdot V(\tau_j) - m_i \cdot V(\tau_i)) \cdot \delta\tau - (m_j \cdot \dot{\gamma}(\tau_j) - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i)) \cdot (\delta t_{Pj} - \delta t_{Pi})] - \\ - C^{-1} \cdot (\delta\Phi - \Phi^0 \cdot \delta f_G / f_G^0) \cdot [m_j \cdot \dot{\gamma}(\tau_j) \cdot (\tau_j - \tau_0) - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0)] - \\ - C^{-1} \cdot 0.5 \cdot (\dot{\Phi} - \Phi^0 \cdot \dot{f}_G / f_G^0) \cdot [m_j \cdot \dot{\gamma}(\tau_j) \cdot (\tau_j - \tau_0)^2 - (m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0)^2)] + \\ + C^{-1} \cdot \delta f_s \cdot \delta\rho_G. \quad (2.75)$$

В выражении (2.75)

$$\Delta\rho = \delta\rho_j - \delta\rho_i \quad (2.76)$$

– разность поправок, учитывающих кривизну траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли и рассчитанных по формуле (2.15) на моменты времени τ_j и τ_i соответственно;

$$\delta\rho_G = \rho(\tau_j) - \rho(\tau_i) \quad (2.77)$$

– разность топоцентрических дальностей до спутника;

$$TR = \delta\rho_{TRj} - \delta\rho_{TRi}, \quad IR_G = \delta\rho_{IRj} - \delta\rho_{IRi} \quad (2.78)$$

– поправки, учитывающие влияние тропосферной и ионосферной рефракций;

$$\delta\rho_{AB}^G = -C^{-1} \cdot [\dot{\gamma}(\tau_j) \cdot \rho(\tau_j) - \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot \rho(\tau_i)] \quad (2.79)$$

– поправка за абберационный эффект, обусловленный перемещением КА относительно “неподвижного” НП;

$$\delta\rho_{АП} = -C^{-1} \cdot [V(\tau_i) \cdot V(\tau_j) + (V(\tau_j) - V(\tau_i))^2 / 3] \cdot T_G \quad (2.80)$$

– поправка за аппроксимацию;

$$\delta\tau = \delta\tau_G + \delta\tau_g \quad (2.81)$$

– общая внутренняя временная задержка приемника.

В выражении (2.75) отбросим те слагаемые, величина которых не превышает 0,01 колебания разностной частоты. В результате запишем аналитическую модель

интегральных доплеровских траекторных измерений в шкале времени приемника, ошибка которой не превышает 0,01 колебания разностной частоты для широкого класса спутниковых орбит (предполагается, что погрешность расчета тропосферной и ионосферной поправок такого же порядка) [71]:

$$\begin{aligned}
 N_{ij}^G = & T_G \cdot [\Phi^0 + \delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((\tau_i + \tau_j)/2 - \tau_0)] + C^{-1} \cdot f_S^0 \cdot [\delta\rho_G + \Delta\rho + (1 + K_T) \cdot TR + IR_G + \\
 & + \delta\rho_{AB}^G + \delta\rho_{АП} + \delta\rho_P - (m_j \cdot V(\tau_j) - m_i \cdot V(\tau_i)) \cdot \delta\tau] - C^{-1} \cdot (\delta\Phi - \Phi^0 \cdot \delta f_G / f_G^0) \times \\
 & \times [m_j \cdot \dot{\gamma}(\tau_j) \cdot (\tau_j - \tau_0) - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0)] + C^{-1} \cdot \delta f_S \cdot \delta\rho_G.
 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Если моменты τ известны не точно, то обработку результатов доплеровских траекторных измерений КА следует проводить в спутниковой системе времени. Как правило, моменты посылки меток времени с высокой точностью задаются в шкале атомного времени, хранителем которого служит бортовой опорный генератор. Например, в СРНС TRANZIT ошибка передачи временной метки составляет от 10 мкс до 20 мкс [128].

Ниже получим математическую модель интегральных доплеровских измерений в шкале времени спутника. Для этого текущие значения частот опорных генераторов представим в ССВ, то есть запишем

$$f_G = f_G^0 + \delta f_G + \dot{f}_G \cdot (t - t_0), \quad (2.83)$$

$$f_S = f_S^0 + \delta f_S + \dot{f}_S \cdot (t - t_0), \quad (2.84)$$

где t – текущее время в неравномерной шкале спутника;

t_0 – момент посылки с КА первой в прохождении метки времени, по которой производится синхронизация часов приемника.

Временную задержку $\delta\tau_C$, обусловленную нестабильностью опорных генераторов, определим как

$$\delta\tau_c = \int_{t_0}^t (K_s - K_G) \cdot dt = (\delta f_G / f_G^0 - \delta f_s / f_s^0) \cdot (t - t_0) + (\dot{f}_G / f_G^0 - \dot{f}_s / f_s^0) \cdot (t - t_0)^2 / 2. \quad (2.85)$$

Выполним редуцирование дальности $\hat{\rho}$ на момент t_Γ генерации временной метки (см. рисунок 2.6). Расстояние $\rho(t_\Gamma + \delta t_s)$ отличается от $\hat{\rho}$ на величину, обусловленную абберрационным эффектом, вызванным перемещением НП относительно “неподвижного” КА. Поэтому с точностью до членов первого порядка малости можно записать

$$\hat{\rho} = \rho(t_\Gamma + \delta t_s) - \dot{\beta}(t_\Gamma + \delta t_s) \cdot [(\tau - \delta\tau) - (t_\Gamma + \delta t_s)]. \quad (2.86)$$

Сомножитель $\dot{\beta}(t_\Gamma + \delta t_s)$ из формулы (2.86) разложим в ряд Тейлора

$$\dot{\beta}(t_\Gamma + \delta t_s) = \dot{\beta}(t_\Gamma) + \frac{\partial \dot{\beta}(t_\Gamma)}{\partial t_\Gamma} \cdot \delta t_s + \dots \quad (2.87)$$

Отбросив члены второго порядка малости, примем $\dot{\beta}(t_\Gamma + \delta t_s) = \dot{\beta}(t_\Gamma)$. Переменная $\dot{\beta}(t_\Gamma)$ является проекцией вектора $\dot{\mathbf{R}}(t_\Gamma)$ геоцентрической скорости НП на орт топоцентрического радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}(t_\Gamma)$ КА в момент t_Γ , то есть

$$\dot{\beta}(t_\Gamma) = \boldsymbol{\rho}^{-1}(t_\Gamma) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(t_\Gamma) \cdot \dot{\mathbf{R}}(t_\Gamma). \quad (2.88)$$

Радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}(t_\Gamma)$ в формуле (2.88) определяется как разность геоцентрических радиус-векторов $\mathbf{r}(t_\Gamma)$ спутника и $\mathbf{R}(t_\Gamma)$ наблюдателя в момент t_Γ генерации временной метки

$$\boldsymbol{\rho}(t_\Gamma) = \mathbf{r}(t_\Gamma) - \mathbf{R}(t_\Gamma). \quad (2.89)$$

Принимая во внимание зависимость (2.30), можно записать

$$(\tau - \delta\tau) - (t_{\Gamma} + \delta t_s) = \Delta t + \delta\tau_c + \delta t_p. \quad (2.90)$$

Разложив $\rho(t_{\Gamma} + \delta t_s)$ равенства (2.86) в ряд Тейлора, ограничившись при этом первыми членами разложения, получим

$$\rho(t_{\Gamma} + \delta t_s) = \rho(t_{\Gamma}) + \frac{\partial \rho(t_{\Gamma})}{\partial t_{\Gamma}} \cdot \delta t_s. \quad (2.91)$$

В разложении (2.91) $V(t_{\Gamma}) = \partial \rho(t_{\Gamma}) / \partial t_{\Gamma}$ есть лучевая скорость КА в момент t_{Γ} , которая рассчитывается по формуле

$$V(t_{\Gamma}) = \rho^{-1}(t_{\Gamma}) \cdot (\dot{\mathbf{r}}^T(t_{\Gamma}) - \dot{\mathbf{R}}^T(t_{\Gamma})) \cdot \boldsymbol{\rho}(t_{\Gamma}). \quad (2.92)$$

Теперь равенство (2.86) с учетом формул (2.90) – (2.92) можно записать так

$$\hat{\rho} = \rho(t_{\Gamma}) + V(t_{\Gamma}) \cdot \delta t_s - \dot{\beta}(t_{\Gamma}) \cdot \Delta t - \dot{\beta}(t_{\Gamma}) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p). \quad (2.93)$$

Подставив значение $\hat{\rho}$ из равенства (2.51) в левую часть выражения (2.93), можно записать

$$C \cdot \Delta t = \rho(t_{\Gamma}) + V(t_{\Gamma}) \cdot \delta t_s - \dot{\beta}(t_{\Gamma}) \cdot \Delta t - \dot{\beta}(t_{\Gamma}) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p). \quad (2.94)$$

Откуда получим время Δt распространения временной метки между ФЦА передатчика и приемника

$$\Delta t = (C + \dot{\beta}(t_{\Gamma}))^{-1} \cdot [\rho(t_{\Gamma}) + V(t_{\Gamma}) \cdot \delta t_s - \dot{\beta}(t_{\Gamma}) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p)]. \quad (2.95)$$

Подставив его значение в формулу (2.93), сделав при этом допущение $C = C + \dot{\beta}(\tau)$, получим выражение для расстояния $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = n \cdot [\rho(t_{\Gamma}) + V(t_{\Gamma}) \cdot \delta t_s - \dot{\beta}(t_{\Gamma}) \cdot (\delta \tau_c + \delta t_p)], \quad (2.96)$$

в котором масштабирующий коэффициент n рассчитывается по формуле

$$n = 1 - C^{-1} \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma}). \quad (2.97)$$

Теперь выражение (2.40) в ССВ для фазового пути \hat{S} ЭМВ примет вид

$$\hat{S} = n \cdot [\rho(t_{\Gamma}) + V(t_{\Gamma}) \cdot \delta t_s - \dot{\beta}(t_{\Gamma}) \cdot (\delta \tau_c + \delta t_p)] + \Delta \rho + (1 + K_T) \cdot \delta \rho_{TR} + \delta \rho_{IR}, \quad (2.98)$$

Число колебаний сигнала частоты f_R , поступившего в приемник за интервал времени T_G , равно числу колебаний сигнала частоты f_S , излученного КА за интервал времени T_S [91, 186], то есть

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} f_R \cdot d\tau = \int_{t_{\Gamma i}}^{t_{\Gamma j}} f_S \cdot dt. \quad (2.99)$$

Тогда выражение (2.57) может быть записано в таком виде:

$$N_{ij}^S = \int_{\tau_i}^{\tau_j} f_G \cdot d\tau - \int_{t_{\Gamma i}}^{t_{\Gamma j}} f_S \cdot dt. \quad (2.100)$$

Проинтегрировав зависимость (2.83) с учетом формул (2.23) и (2.30), получим значение первого интеграла в равенстве (2.100):

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} f_G \cdot d\tau = [T_S + (\Delta t_j - \Delta t_i) + (\delta\tau_{Cj} - \delta\tau_{Ci})] \cdot [f_G^0 + \delta f_G + \dot{f}_G \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)]. \quad (2.101)$$

Здесь

$$T_S = t_{\Gamma j} - t_{\Gamma i}. \quad (2.102)$$

При этом полагалось, что временные задержки, обусловленные аппаратурными влияниями и релятивистским эффектом, в течение малого промежутка времени T_S постоянны. Поэтому в выражении (2.101) принято, что

$$\delta t_{Pj} - \delta t_{Pi} = 0, \quad \delta t_{Sj} - \delta t_{Si} = 0, \quad \delta t_{Sj} - \delta t_{Si} = 0, \quad \delta \tau_{gj} - \delta \tau_{gi} = 0. \quad (2.103)$$

Интегрируя зависимость (2.84), получим значение второго интеграла в формуле (2.100):

$$\int_{t_{\Gamma i}}^{t_{\Gamma j}} f_S \cdot dt = T_S \cdot (f_S^0 + \delta f_S + \dot{f}_S \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)). \quad (2.104)$$

Далее, подставив формулы (2.101), (2.104) в (2.100) и с учетом равенств (2.68), можно записать

$$N_{ij}^S = T_S \cdot [\Phi^0 + \delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)] + C^{-1} \cdot (\widehat{S}_j - \widehat{S}_i) \cdot (f_G^0 + \delta f_G) + \\ + f_G^0 \cdot T_S \cdot [(\delta f_G / f_G^0 - \delta f_S / f_S^0) + (\dot{f}_G / f_G^0 - \dot{f}_S / f_S^0) \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)]. \quad (2.105)$$

При формировании выражения (2.105) были отброшены те слагаемые, численные значения которых не превышали 0,01 цикла. Так как

$f_G^0 = f_S^0 + (f_G^0 - f_S^0)$, то выражение (2.105) примет вид

$$N_{ij}^S = T_S \cdot [\Phi^0 + 2 \cdot \delta\Phi + 2 \cdot \dot{\Phi} \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)] + C^{-1} \cdot (\widehat{S}_j - \widehat{S}_i) \cdot (f_G^0 + \delta f_G) - \\ - T_S \cdot \Phi^0 / f_S^0 \cdot [\delta f_S + \dot{f}_S \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)]. \quad (2.106)$$

Подставим расстояние \widehat{S} из зависимости (2.98) в равенство (2.106). В результате получим формулу для расчета N_{ij}^S на интервале времени T_S :

$$N_{ij}^S = T_S \cdot [\Phi^0 + 2 \cdot \delta\Phi + 2 \cdot \dot{\Phi} \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)] + C^{-1} \cdot f_G^0 \cdot [\delta\rho_S + \Delta\rho + (1 + K_T) \cdot TR + IR_S + \\ + \delta\rho_{AB}^S + (n_j \cdot V(t_{\Gamma j}) - n_i \cdot V(t_{\Gamma i})) \cdot \delta t_S - (n_j \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma j}) - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i})) \cdot (\delta t_{Pj} - \delta t_{Pi})] - \\ - C^{-1} \cdot (\delta\Phi - \Phi^0 \cdot \delta f_S / f_S^0) \cdot (n_j \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma j}) \cdot (t_{\Gamma j} - t_0) - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i}) \cdot (t_{\Gamma i} - t_0)) - \\ - 0.5 \cdot C^{-1} \cdot (\dot{\Phi} - \Phi^0 \cdot \dot{f}_S / f_S^0) \cdot [n_j \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma j}) \cdot (t_{\Gamma j} - t_0)^2 - (n_i \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i}) \cdot (t_{\Gamma i} - t_0)^2)] + \\ + C^{-1} \cdot \delta f_G \cdot \delta\rho_S - T_S \cdot \Phi^0 / f_S^0 \cdot (\delta f_S + \dot{f}_S \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)). \quad (2.107)$$

В формуле (2.107)

$$\delta\rho_S = \rho(t_{\Gamma j}) - \rho(t_{\Gamma i}) \quad (2.108)$$

– разность топоцентрических дальностей до спутника;

$$IR_S = \delta\rho_{IRj} - \delta\rho_{IRi} \quad (2.109)$$

– ионосферная поправка в разность топоцентрических дальностей;

$$\delta\rho_{AB}^S = - C^{-1} \cdot [\dot{\beta}(t_{\Gamma j}) \cdot \delta(t_j) - \dot{\beta}(t_{\Gamma i}) \cdot \delta(t_i)] \quad (2.110)$$

– поправка за абберационный эффект, обусловленный вращением Земли.

В модели измерений (2.107) поправка $\Delta\rho$ рассчитывается по формуле (2.76), в которой поправки $\delta\rho$ за кривизну траектории распространения ЭМВ в тропосфере Земли определяются на моменты времени $t_{\Gamma i}$ и $t_{\Gamma j}$ соответственно.

В выражении (2.107) отбросим слагаемые, величина которых не превышает 0,01 колебания разностной частоты. В результате запишем аналитическую модель интегральных доплеровских траекторных измерений в ССВ, ошибка которой не превышает 0,01 колебания разностной частоты для широкого класса спутниковых орбит (предполагается, что погрешность расчета тропосферной и ионосферной поправок такого же порядка) [71]:

$$N_{ij}^S = T_S \cdot [\Phi^0 + 2 \cdot \delta\Phi + 2 \cdot \dot{\Phi} \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma j})/2 - t_0)] + C^{-1} \cdot f_G^0 \cdot [\delta\rho_S + \Delta\rho + (1 + K_T) \cdot TR + \\ + IR_S + \delta\rho_{AB}^S + (n_j \cdot V(t_{\Gamma j}) - n_i \cdot V(t_{\Gamma i})) \cdot \delta t_S] - C^{-1} \cdot (\delta\Phi - \Phi^0 \cdot \delta f_S / f_S^0) \times \\ \times [n_j \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma j}) \cdot (t_{\Gamma j} - t_0) - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i}) \cdot (t_{\Gamma i} - t_0)] + C^{-1} \cdot \delta f_G \cdot \delta\rho_S - T_S \cdot \Phi^0 \cdot \delta f_S / f_S^0. \quad (2.111)$$

Ниже рассмотрим формирование математической модели дифференциальных доплеровских измерений. В дифференциальном методе доплеровских наблюдений приемником измеряется доплеровский сдвиг частоты, обусловленный взаимным перемещением приемника и передатчика. Непосредственно измеряемой величиной является разностная частота.

Дифференциальные доплеровские приемники производят подсчет числа циклов N_{ij} биений на интервале интегрирования T_G небольшой продолжительности: от 0,5 до 3 с. Разностная частота определяется отношением накопленных циклов к длительности этого интервала

$$f_G - f_R = N_{ij} \cdot T_G^{-1}. \quad (2.112)$$

Перед выводом математической модели дифференциальных доплеровских

измерений обоснуем точность, с которой ее нужно получить. Абсолютная ошибка $\delta\dot{S}$ измерения скорости \dot{S} может быть рассчитана по формуле

$$\delta\dot{S} = C \cdot f_s^{-1} \cdot \delta(f_G - f_R), \quad (2.113)$$

где $\delta(f_G - f_R)$ – абсолютная ошибка измерения разностной частоты.

Эту ошибку определим, воспользовавшись соотношением (2.112):

$$\delta(f_G - f_R) = T_G^{-1} \cdot \delta N, \quad (2.114)$$

где δN – абсолютная ошибка отсчитывания колебаний разностной частоты.

Модель измерений получим с ошибкой, соответствующей ошибке рассмотренных выше моделей интегральных доплеровских измерений. Так как точность отсчитывания составляет $\delta N = 0,01$ цикла, то для $T_G = 3$ с и $f_s = 4 \cdot 10^8$ Гц (для спутников СРНС TRANZIT), получим $\delta(f_G - f_R) = 3,3 \cdot 10^{-3}$ Гц и $\delta\dot{S} = 2,5$ мм/с. Для спутников СРНС NAVSTAR $f_s = 15 \cdot 10^8$ Гц. Следовательно, абсолютная ошибка $\delta\dot{S}$ измерения скорости составит $\delta\dot{S} = 0,7$ мм/с.

Из формулы (2.64) следует, что частота принятого радионавигационного сигнала зависит от скорости \dot{S} . Так как измерения выполняется в ЛСВ, то для определения этой скорости продифференцируем по времени τ выражение (2.56):

$$\begin{aligned} \dot{S} = & -C^{-1} \cdot \ddot{\gamma}(\tau) \cdot [\rho(\tau) - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta\tau_p) - V(\tau) \cdot \delta\tau] + \\ & + m \cdot [V(\tau) - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta\tau_p) - \dot{\gamma}(\tau) \cdot \delta\tau_c - \dot{V}(\tau) \cdot \delta\tau] + \Delta V + (1 + K_T) \cdot \delta V_{TR} + \delta V_{IR}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

где ΔV – поправка к лучевой скорости, обусловленная кривизной траектории распространения ЭМВ;

δV_{TR} – поправка к лучевой скорости, обусловленная влиянием тропосферной

рефракции (см. 2.6);

δV_{IR} – поправка к лучевой скорости, обусловленная влиянием ионосферной рефракции (см. 2.6).

Ускорение $\ddot{\gamma}(\tau)$, обусловленное абберационным эффектом движения КА относительно НП, скорость изменения временной задержки $\delta\tau_c$ и поправка к лучевой скорости ΔV , обусловленная кривизной траектории распространения ЭМВ, определяются по формулам:

$$\ddot{\gamma}(\tau) = d\dot{\gamma}(\tau)/d\tau, \quad (2.116)$$

$$\delta\dot{\tau}_c = \partial(\tau_c + \delta t_p)/\partial\tau = (\delta f_G / f_G^0 - \delta f_S / f_S^0) + (\dot{f}_G / f_G^0 - \dot{f}_S / f_S^0) \cdot (\tau - \tau_0), \quad (2.117)$$

$$\Delta V = \Delta\rho / T_G. \quad (2.118)$$

Выполнив некоторые преобразования равенства (2.115), получим

$$\begin{aligned} \dot{\hat{S}} = & m \cdot V(\tau) + \Delta V + (1 + K_T) \cdot \delta V_{TR} + \delta V_{IR} - C^{-1} \cdot \ddot{\gamma}(\tau) \cdot \rho(\tau) - (2 \cdot m - 1) \cdot \ddot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p + \delta\tau) - \\ & - m \cdot \dot{\gamma}(\tau) \cdot ((\delta f_G / f_G^0 - \delta f_S / f_S^0) + (\dot{f}_G / f_G^0 - \dot{f}_S / f_S^0) \cdot (\tau - \tau_0)), \end{aligned} \quad (2.119)$$

Ускорение $\ddot{\gamma}(\tau) = d\dot{\gamma}(\tau)/d\tau$ найдем путем дифференцирования по времени зависимости (2.43):

$$\ddot{\gamma}(\tau) = \rho^{-1}(\tau) \cdot (-V(\tau) \cdot \dot{\gamma}(\tau) + \ddot{\mathbf{r}}^T(\tau) \cdot \rho(\tau) + \dot{\mathbf{r}}^T(\tau) \cdot \dot{\rho}(\tau)). \quad (2.120)$$

Здесь

$$\ddot{\mathbf{r}}(\tau) = d^2\mathbf{r}(\tau)/d\tau^2, \quad (2.121)$$

где $\ddot{\mathbf{r}}(\tau)$ – геоцентрический вектор ускорения КА в момент τ ;

$\dot{\rho}(\tau)$ – вектор топоцентрической скорости спутника.

Применив формулу (2.64) для частоты f_R принятого сигнала, получим выражение для определения значения разностной частоты

$$f_G - f_R = \Phi + C^{-1} \cdot f_S^0 \cdot (\hat{S} + \delta V_P - C^{-1} \cdot \hat{S}^2) + C^{-1} \cdot \delta f_S \cdot \hat{S}, \quad (2.122)$$

в котором

$$\delta V_P = (\dot{\rho}^2(\tau)/2 - \mu \cdot (R^{-1}(\tau) - r^{-1}(\tau)))/C \quad (2.123)$$

– релятивистская поправка в лучевую скорость КА.

В равенстве (2.122) слагаемые

$$C^{-1} \cdot \delta f_S \cdot (\delta V_P - C^{-1} \cdot \hat{S}^2) = 9 \cdot 10^{-8} \text{ Гц},$$

$$C^{-1} \cdot \dot{f}_S \cdot (\tau - \tau_0) \cdot (\hat{S} + \delta V_P - C^{-1} \cdot \hat{S}^2) = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ Гц}$$

не учтены, так как их численные значения много меньше $3.3 \cdot 10^{-3}$ Гц.

В формулу (2.122) вместо скорости \hat{S} подставим его выражение (2.119). Отбросив слагаемые, вклад которых не превышает $3.3 \cdot 10^{-3}$ Гц, запишем аналитическую модель дифференциальных доплеровских измерений [71]:

$$f_G - f_R = \Phi^0 + \delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot (\tau - \tau_0) + C^{-1} \cdot f_S^0 \cdot (V(\tau) + \Delta V + (1 + K_T) \cdot \delta V_{TR} + \delta V_{IR} + \delta V_{AB} + \delta V_{АП} + \\ + \delta V_P - \ddot{\gamma}(\tau) \cdot \delta\tau) + C^{-1} \cdot \delta f_S \cdot V(\tau) - C^{-1} \cdot \delta\Phi \cdot (\dot{\gamma}(\tau) + \ddot{\gamma}(\tau) \cdot (\tau - \tau_0)), \quad (2.124)$$

где $\delta\tau$ – общая внутренняя временная задержка приемника, определяемая по формуле (2.81);

$$\delta V_{AB} = -C^{-1} \cdot (\ddot{\gamma}(\tau) \cdot \rho(\tau) + \dot{\gamma}(\tau)V(\tau)) \quad (2.125)$$

– поправка в лучевую скорость за абберационный эффект;

$$\delta V_{АП} = -C^{-1} \cdot V^2(\tau) \quad (2.126)$$

– поправка за аппроксимацию.

В зависимостях (2.119) – (2.121), (2.124) – (2.126) за момент τ принимается середина интервала времени T_G , т.е.

$$\tau = (\tau_i + \tau_j)/2. \quad (2.127)$$

Рассмотренные аналитические модели интегральных и дифференциальных методов доплеровских траекторных измерений КА по точности соответствуют инструментальным возможностям современной доплеровской аппаратуры. В этих моделях учитываются уход и скорость ухода частот опорных генераторов приемника и передатчика, абберационный и релятивистский эффекты, внутренние аппаратурные временные задержки, влияние ионосферной и тропосферной рефракций. Введен также и масштабный множитель, учитывающий погрешность расчета тропосферной поправки в разность дальностей и лучевую скорость.

Абсолютная ошибка моделей интегральных доплеровских измерений не превышает 0,01 цикла, дифференциальных измерений $3,3 \cdot 10^{-3}$ Гц (погрешность расчета поправок за влияние атмосферной рефракции и релятивистского эффекта здесь не учитываются).

Модели измерений (2.82), (2.111) и (2.124) запишем в виде функциональной зависимости (1.33) [49, 71, 134]. В этом случае

$$N_{ij}^G = T_G \cdot \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot (\delta \rho_G + \Delta_G), \quad (2.128)$$

$$N_{ij}^S = T_S \cdot \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_G^0 \cdot (\delta\rho_S + \Delta_S), \quad (2.129)$$

$$f_G - f_R = \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_S^0 \cdot (V(\tau) + \Delta_V). \quad (2.130)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_G = & (\delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((\tau_i + \tau_j) / 2 - \tau_0)) \cdot T_G \cdot C / f_S^0 + \Delta\rho + (1 + K_T) \cdot TR + IR_G + \delta\rho_{AB}^G + \delta\rho_{АП} + \delta\rho_p - \\ & - (m_j \cdot V(\tau_j) - m_i \cdot V(\tau_i)) \cdot \delta\tau - (\delta\Phi - \Phi^0 \cdot \delta f_G / f_G^0) \cdot (m_j \cdot \dot{\gamma}(\tau_j) \cdot (\tau_j - \tau_0) - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0)) / f_S^0 + \\ & + \delta f_S / f_S^0 \cdot \delta\rho_G, \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} \Delta_S = & 2 \cdot (\delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot ((t_{ij} + t_{ri}) / 2 - t_0)) \cdot T_S \cdot C / f_G^0 + \Delta\rho + (1 + K_T) \cdot TR + IR_S + \delta\rho_{AB}^S + \\ & + (n_j \cdot V(t_{ij}) - n_i \cdot V(t_{ri})) \cdot \delta t_S - (\delta\Phi - \Phi^0 \cdot \delta f_S / f_S^0) \cdot (n_j \cdot \dot{\beta}(t_{ij}) \cdot (t_{ij} - t_0) - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{ri}) \cdot (t_{ri} - t_0)) / f_G^0 + \\ & + \delta\rho_S \cdot \delta f_G / f_G^0 - C / f_G^0 \cdot \delta f_S / f_S^0 \cdot \Phi^0 \cdot T_S, \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \Delta_V = & (\delta\Phi + \dot{\Phi} \cdot (\tau - \tau_0)) \cdot C / f_S^0 + \Delta V + (1 + K_T) \cdot \delta V_{TR} + \delta V_{IR} + \delta V_{AB} + \delta V_{АП} + \delta V_p - \\ & - \ddot{\gamma}(\tau) \cdot \delta\tau + V(\tau) \cdot \delta f_S / f_S^0 - (\dot{\gamma}(\tau) + \ddot{\gamma}(\tau) \cdot (\tau - \tau_0)) \cdot \delta\Phi / f_S^0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Величины Δ_G , Δ_S , Δ_V являются сингулярными ошибками вида (1.35) измеренных значений разностей дальностей и лучевой скорости соответственно. В подтверждение сказанному в подразделе 1.1 заметим, что эти ошибки зависят от времени и обусловлены следующими факторами: нестабильностью частот опорных генераторов аппаратуры НП и КА, изменением условий прохождения ЭМВ в атмосфере Земли, абберационным и релятивистским эффектами, а также внутренними временными задержками приемника и передатчика. Значения $(\delta\rho_G + \Delta_G)$, $(\delta\rho_S + \Delta_S)$ будем называть измеряемыми разностями псевдодальностей, а $(V(\tau) + \Delta_V)$ – измеряемой лучевой псевдоскоростью (см. 1.1).

В заключение отметим, что представленные модели записаны для широкого класса спутниковой и наземной доплеровской аппаратуры с различными

точностными характеристиками. Поэтому они могут в различной степени упрощаться в зависимости от решения конкретной поставленной задачи. Важно отметить, что представленные модели получены при условии совпадения фазового центра передающей антенны и центра массы спутника.

2.5 Математические модели радиодальномерных траекторных измерений

Радиотехническую дальность до спутника можно определить, измеряя амплитуду либо фазовый сдвиг принятого аппаратурой НП радионавигационного сигнала, а также время распространения радиоимпульса по линии НП-КА. Наибольшее применение в космической геодезии нашли фазовый и импульсный методы измерения расстояний [159].

Как уже было сказано в 2.1, в настоящее время возможны два принципа измерений – запросный и беззапросный. Наиболее простым в смысле технической реализации и последующей математической обработки измерений, выполненных для решения геодезических задач, является запросный метод. Техническая реализация беззапросного метода сложнее и на этапе математической обработки результатов его измерений приходится учитывать ряд физических эффектов, не свойственных запросному методу (нестабильность опорных генераторов, релятивистские эффекты и др.). Они вносят в измерения значительные погрешности систематического характера.

По причине своей сложности специального рассмотрения требуют вопросы формирования математических моделей беззапросных импульсного и фазового методов измерения дальности до спутника. Соответствующие модели для запросных РТС весьма просты и хорошо проработаны.

В беззапросных импульсных дальномерных РТС аппаратурой НП вырабатывается опорный импульс в момент генерации радиоимпульса передатчиком спутника. Этот радиоимпульс, пройдя расстояние КА-НП, поступает в регистрирующее устройство наземного приемника. Здесь непосредственно измеряется промежуток времени $\tau - t_{\Gamma}$ между моментом τ

приема (в ЛСВ) радиоимпульса и моментом t_{Γ} генерации (в ССВ) опорного импульса (см. рисунок 2.5). Такова общая схема процесса измерений. При формировании математических моделей радиодальномерных измерений будем считать, что центр масс КА и ФЦА его передатчика совпадают. Заметим, что все временные события и задержки, свойственные процессу доплеровских измерений (за исключением задержки $\delta\tau_G$), присущи и для радиодальномерных измерений.

В современных радиодальномерных приборах разность фаз измеряется с ошибкой до 2° [136], что соответствует 0,006 длины волны радиосигнала. Математические модели радиодальномерных измерений получим с точностью до 0,01 фазы. При этом, например, для несущей частоты 1,5 ГГц сигнала спутников ГНСС NAVSTAR и ГЛОНАСС ошибка измерения псевдодальности составит величину около 2 мм (без учета погрешностей моделей, учитывающих влияние релятивистского эффекта и атмосферной рефракции), а для СРНС TRANZIT и ЦИКАДА (частота сигнала 400 МГц) соответственно около 8 мм.

На основании зависимостей (2.30), (2.51) и (2.56), в которых примем $\delta\tau_g = 0$, запишем выражение для расчета промежутка времени $\tau - t_{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \tau - t_{\Gamma} = C^{-1} \cdot [m \cdot (\rho(\tau) - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_C + \delta t_P) - V(\tau) \cdot \delta\tau_G) + \delta\rho + \\ + (1 + K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR}] + \delta\tau_C + \delta t_S + \delta\tau_G + \delta t_P. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Формулы для расчета поправки $\delta\rho$ за кривизну траектории распространения ЭМВ в тропосфере Земли представлены в 2.2.

Выполнив некоторые преобразования, получим математическую модель беззапросных импульсных радиодальномерных измерений [73]

$$\begin{aligned} \tau - t_{\Gamma} = C^{-1} \cdot [m \cdot \rho(\tau) + \delta\rho + (1 + K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR} - m \cdot V(\tau) \cdot \delta\tau_G + \\ + C^{-1} \cdot \dot{\gamma}^2(\tau) \cdot \delta\tau_C + C \cdot (m \cdot \delta\tau_C + \delta\tau + \delta t_P)], \end{aligned} \quad (2.135)$$

где $\delta\tau$ – общая внутренняя временная задержка аппаратуры КА и НП.

В модели (2.135) временная задержка $\delta\tau$ определяется по формуле

$$\delta\tau = \delta t_s + \delta\tau_G. \quad (2.136)$$

В беззапросных фазовых дальномерных РТС непосредственно измеряемой величиной является выделенная в момент времени τ в приемнике НП разность фаз $\Delta\varphi_s(\tau_G)$ между фазами $\varphi_s(t_G)$ и $\varphi_G(\tau)$ [169, 187]

$$\Delta\varphi(\tau) = \varphi_s(t_G) - \varphi_G(\tau), \quad (2.137)$$

где $\varphi_s(t_G)$ – фаза образованных в момент времени t_G колебаний частоты f_s^M , модулирующих несущий радионавигационный сигнал частоты f_s опорного генератора КА;

$\varphi_G(\tau)$ – фаза в момент времени τ колебаний, модулирующих опорный сигнал частоты f_G (сигнал частоты f_G генерируется опорным генератором наземного приемника).

Выразив из формулы (2.30) момент времени t_G и подставив его в равенство (2.137), получим

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\tau) &= \varphi_s(\tau - \Delta t - \delta\tau_c - \delta\tau - \delta t_p) - \varphi_G(\tau) = \\ &= \varphi_s(\tau) - d\varphi_s(\tau)/d\tau \cdot (\delta\tau_c + \delta\tau + \Delta t + \delta t_p) - \varphi_G(\tau), \end{aligned} \quad (2.138)$$

где $\delta\tau$ – общая внутренняя временная задержка аппаратуры КА и НП, определяемая по формуле (2.136).

Так как задержка $\delta\tau_c$ уже учтена во времени распространения сигнала, то $\varphi_s(\tau) = \varphi_G(\tau)$. Принимая во внимание зависимость (2.51) и соотношение между частотой f_s^M и фазой $\varphi_s(\tau)$ модулирующего колебания [187]

$$f_s^M = d\varphi_s(\tau)/d\tau, \quad (2.139)$$

запишем

$$\Delta\varphi(\tau) = -f_s^M \cdot \widehat{S} \cdot C^{-1} - f_s^M \cdot (\delta\tau_c + \delta\tau + \delta t_p). \quad (2.140)$$

Частоту f_s^M выразим через частоту f_s несущего колебания опорного генератора КА

$$f_s^M = K \cdot f_s, \quad (2.141)$$

где K – коэффициент пропорциональности.

Тогда с учетом формулы (2.56), в которой $\delta\tau_g = 0$, и формулы (2.141), выражение (2.140) для разности фаз примет вид

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\tau) = & -K \cdot f_s \cdot C^{-1} \cdot [m \cdot (\rho(\tau) - \dot{\gamma}(\tau) \cdot (\delta\tau_c + \delta t_p)) - V(\tau) \cdot \delta\tau_g] + \delta\rho + \\ & + (1 + K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR} + C \cdot (\delta\tau_c + \delta\tau + \delta t_p)]. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Подставим частоту f_s из равенства (2.36) в равенство (2.142) и выполним некоторые преобразования. После этих преобразований отбросим те слагаемые, численные значения которых не превышают 0,01 фазы. В итоге запишем математическую модель беззапросных фазовых радиодальномерных траекторных измерений [73, 134]

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\tau) = & -K \cdot f_s^0 \cdot C^{-1} \cdot [m \cdot \rho(\tau) + \delta\rho + (1 + K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR} - m \cdot V(\tau) \cdot \delta\tau_g + \\ & + C^{-1} \cdot \dot{\gamma}^2(\tau) \cdot \delta\tau_g + C \cdot (m \cdot \delta\tau_c + \delta\tau + \delta t_p) + \rho(\tau) \cdot \delta f_s / f_s^0]. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Модели измерений (2.135) и (2.143) могут быть представлены в виде функциональной зависимости (1.33) [73, 134]:

$$\tau - t_T = C^{-1} \cdot (\rho_\tau(\tau) + \Delta_\tau), \quad (2.144)$$

$$\Delta\varphi(\tau) = -K \cdot f_s^0 \cdot C^{-1} \cdot (\rho_\varphi(\tau) + \Delta_\varphi). \quad (2.145)$$

Здесь величины Δ_τ и Δ_φ определяются как

$$\begin{aligned} \Delta_\tau = & -\rho_\tau(\tau) \cdot C^{-1} \cdot \dot{\gamma}(\tau) + \delta\rho + (1 + K_T) \cdot \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR} + C \cdot (m \cdot \delta\tau_C + \delta\tau + \delta t_p) - \\ & - V(\tau) \cdot m \cdot \delta\tau_G + C^{-1} \cdot \dot{\gamma}^2(\tau) \cdot \delta\tau_C, \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$\Delta_\varphi = \Delta_\tau + \rho_\varphi(\tau) \cdot \delta f_s / f_s^0. \quad (2.147)$$

При использовании выражения (2.147) в формуле (2.146) под параметром $\rho_\tau(\tau)$ подразумевается параметр $\rho_\varphi(\tau)$.

Величины Δ_τ и Δ_φ представляют собой сингулярные ошибки вида (1.35) измеренных значений дальностей до КА. Эти ошибки зависят от времени и обусловлены следующими факторами: нестабильностью частот опорных генераторов передатчика и приемника, изменением условий прохождения ЭМВ в атмосфере Земли, абберационным и релятивистским эффектами, внутренними задержками аппаратуры НП и КА. Суммы $(\rho_\tau(\tau) + \Delta_\tau)$, $(\rho_\varphi(\tau) + \Delta_\varphi)$ будем называть измеряемыми псевдодальностями (см. 1.1).

В заключение отметим, что приведенные модели измерений могут в различной степени упрощаться в зависимости от требуемой точности решения задачи оценивания. Модель фазовых измерений (2.143) можно применять и при выполнении измерений только на несущей частоте f_s радиосигнала. При этом коэффициент пропорциональности $K=1$. Влияние ионосферной рефракции первого порядка на измеряемое расстояние учитывается довольно просто, так как в основном радиодальномерные измерения проводятся на двух частотах (см. 2.6).

Важно отметить, что представленные модели получены при условии совпадения фазового центра передающей антенны и центра масс КА.

2.6 Методика учета влияния атмосферной рефракции в радиотехнических траекторных измерениях спутников

В этом подразделе опишем методику и приведем необходимые формулы, учитывающие влияние тропосферной и ионосферной рефракции на результаты доплеровских и радиодальномерных траекторных измерений КА. Формулы для расчета тропосферных и ионосферных поправок в лучевую скорость, разность дальностей и дальность до спутника будут представлены в виде, удобном для практического применения [34, 50, 56].

Напомним, что в интегральном методе доплеровских измерений современные геодезические приемники производят подсчет колебаний N_{ij} разностной частоты $f_G - f_R$, образованной смещением частот двух высокостабильных колебаний принятого радионавигационного сигнала f_R и опорной частоты f_G приемника. Этот факт описывается формулой (2.24). Накопление циклов происходит либо на отрезке времени $T_G = [\tau_i, \tau_j]$ в ЛСВ, либо на отрезке $T_S = [t_{\Gamma i}, t_{\Gamma j}]$ в ССВ. Продолжительность T_G определяется длительностью приема аппаратурой НП строки либо группы строк служебной информации навигационного кадра, а T_S – длительностью передачи аппаратурой КА этой же информации.

Результатом дифференциального метода измерений является искаженный атмосферной рефракцией доплеровский сдвиг частоты \hat{f}_d , возникающий вследствие взаимного перемещения передатчика и приемника [26, 152]:

$$\hat{f}_d = -C^{-1} \cdot f_s \cdot \frac{d\hat{S}}{dt}, \quad (2.148)$$

где C – скорость света в вакууме;

\hat{S} – длина траектории (фазового пути) ЭМВ.

Непосредственно измеряемой величиной при этом служит разностная частота, численное значение которой определяется из равенства (2.112). Без учета аппаратных задержек частота f_R может быть получена как

$$f_R = f_s + f_d. \quad (2.149)$$

На основании зависимостей (2.24), (2.148) и (2.149) число циклов может быть представлено соотношениями [26, 105, 186]

$$N_{ij}^G = \Phi \cdot T_G + C^{-1} \cdot f_s \cdot (\hat{S}_j - \hat{S}_i), \quad (2.150)$$

$$N_{ij}^S = \Phi \cdot T_S + C^{-1} \cdot f_G \cdot (\hat{S}_j - \hat{S}_i). \quad (2.151)$$

В дифференциальном методе доплеровских измерений разностная частота на основании формул (2.65), (2.112), (2.148) и (2.149) описывается выражением

$$f_G - f_R = \Phi + C^{-1} \cdot f_s \cdot \dot{\hat{S}}. \quad (2.152)$$

В беззапросных фазовом и импульсном методах промежутков времени $\tau - t_T$ распространения радиоимпульса и разность фаз $\Delta\varphi(\tau)$ принятого и опорного колебаний (без учета аппаратных задержек) определяются как

$$\tau - t_T = C^{-1} \cdot \hat{S}, \quad (2.153)$$

$$\Delta\varphi(\tau) = -K \cdot C^{-1} \cdot f_s \cdot \hat{S}. \quad (2.154)$$

Из приведенных зависимостей видно, что число циклов, разностная частота, время распространения радиоимпульса и разность фаз являются функциями криволинейного расстояния \hat{S} .

Продифференцировав по времени равенство (2.19) и подставив полученный

результат в выражение (2.148), запишем соотношение для доплеровского сдвига частоты

$$\widehat{f}_d = f_d + \delta f_{TR} + \delta f_{IR}, \quad (2.155)$$

в котором

$$f_d = -C^{-1} \cdot f_s \cdot \frac{d\rho}{d\tau} \quad (2.156)$$

– "чистый" доплеровский сдвиг частоты;

$$\delta f_{TR} = -C^{-1} \cdot f_s \cdot \frac{d\delta\rho_{TR}}{d\tau} \quad (2.157)$$

– поправка в частоту, обусловленная влиянием тропосферной рефракции (тропосферная поправка в частоту);

$$\delta f_{IR} = -C^{-1} \cdot f_s \cdot \frac{d\delta\rho_{IR}}{d\tau} \quad (2.158)$$

– поправка в частоту, обусловленная влиянием ионосферной рефракции (ионосферная поправка в частоту).

Подставив значения \widehat{S} из формулы (2.19) и \widehat{f}_d из формулы (2.155) в правую часть уравнений (2.150) – (2.154), запишем аналитические модели доплеровских и радиодальномерных траекторных измерений КА, в которых не учтены аппаратные задержки, релятивистский и абберационный эффекты

$$N_{ij}^G = \Phi \cdot T_G + C^{-1} \cdot f_s \cdot (\delta\rho_G + TR + IR_G), \quad (2.159)$$

$$N_{ij}^S = \Phi \cdot T_S + C^{-1} \cdot f_G \cdot (\delta\rho_S + TR + IR_S), \quad (2.160)$$

$$f_G - f_R = \Phi - f_d - \delta f_{TR} - \delta f_{IR}, \quad (2.161)$$

$$\tau - t_\Gamma = C^{-1} \cdot (\rho_\tau(\tau) + \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR}), \quad (2.162)$$

$$\Delta\varphi(\tau) = -K \cdot C^{-1} \cdot f_S \cdot (\rho_\varphi(\tau) + \delta\rho_{TR} + \delta\rho_{IR}). \quad (2.163)$$

Поправки за тропосферную TR и ионосферную IR рефракции в разности дальностей $\delta\rho_G$ и $\delta\rho_S$ рассчитываются по формулам (2.78) и (2.109).

Наибольшее влияние на распространение электромагнитных колебаний с частотами менее 450 МГц оказывает ионосфера (см. таблицы И.1 и И.2) (приложение И). Ее показатель преломления n_{IR} зависит от электронной концентрации N и частоты f_S сигнала [31, 99]

$$n_{IR} = \sqrt{1 - 80,8 \cdot N \cdot f_S^{-2}}. \quad (2.164)$$

Разложив правую часть равенства (2.164) в биномиальный ряд, запишем [5, 186]

$$n_{IR} = 1 - 40,4 \cdot N \cdot f_S^{-2} - (40,4 \cdot N \cdot f_S^{-2})^2 / 2 - \dots \quad (2.165)$$

С учетом того, что показатель преломления n_{IR} и индекс рефракции N_{IR} связаны известным соотношением

$$N_{IR} = (n_{IR} - 1) \cdot 10^6, \quad (2.166)$$

а также на основании зависимостей (2.18) и (2.165) можно записать

$$\delta\rho_{IR} = 10^{-6} \cdot \int_{\rho_{TR}}^{\rho_S} (n_{IR} - 1) \cdot 10^6 \cdot d\rho =$$

$$= -40,4 \cdot f_s^{-2} \cdot \int_{\rho_{TR}}^{\rho_S} N \cdot d\rho - \frac{1}{2} \cdot 40,4^2 \cdot f_s^{-4} \cdot \int_{\rho_{TR}}^{\rho_S} N^2 \cdot d\rho - \dots \quad (2.167)$$

Откуда значение ионосферной поправки в расстояние определится как [5, 186]

$$\delta\rho_{IR} = -B_1 \cdot f_s^{-2} - B_2 \cdot f_s^{-4} - \dots \quad (2.168)$$

В разложении (2.168) коэффициенты B_1 и B_2 вычисляются по формулам

$$B_1 = 40,4 \cdot \int_{\rho_{TR}}^{\rho_S} N \cdot d\rho, \quad B_2 = \frac{1}{2} \cdot 40,4^2 \cdot \int_{\rho_{TR}}^{\rho_S} N^2 \cdot d\rho, \quad (2.169)$$

где ρ_{TR} – наклонная дальность до верхней границы тропосферы;

ρ_S – наклонная дальность до спутника.

В разложении (2.168) первое слагаемое – так называемая ионосферная поправка первого порядка в расстояние, второе – ионосферная поправка второго порядка в расстояние. Представление о величине этих поправок дает таблица И.1 (приложение И), в которой приведены их численные значения для различных высот КА над горизонтом.

Из разложения (2.168) следует важный вывод: с увеличением частоты f_s радионавигационного сигнала уменьшается действие ионосферной рефракции и для $f_s \geq 10$ ГГц ее влияние практически не проявляется [99]. По этой причине ГНСС последнего поколения относительно предыдущих СРНС работают на более высоких частотах.

После подстановки $\delta\rho_{IR}$ из разложения (2.168) в формулу (2.158), можно получить зависимость для расчета ионосферной поправки в частоту [26, 191]

$$\delta f_{IR} = \alpha_1 \cdot f_s^{-1} + \alpha_2 \cdot f_s^{-3} + \dots \quad (2.170)$$

В разложении (2.170) величины α_1 и α_2 являются коэффициентами, зависящими от времени суток (электронная концентрация изменяется в течение суток) и взаимного положения передатчика и приемника и не зависящие от частоты f_s . В нем первое слагаемое будет ионосферной поправкой первого порядка в частоту, второе слагаемое – ионосферной поправкой второго порядка в частоту. Разложение (2.170) не используется в геодезических измерениях, так как в настоящее время закон изменения электронной концентрации в зависимости от высоты и солнечной активности плохо изучен.

Навигационные спутники излучают два сигнала с когерентными частотами f_s^I и f_s^{II} , например: СРНС TRANZIT $f_s^I = 400$ МГц, $f_s^{II} = 150$ МГц [5, 26, 105, 152]. Современные двухканальные приемники способны принимать и осуществлять обработку принятых сигналов с частотами f_R^I и f_R^{II} . Двухчастотный прием позволяет учесть влияние ионосферной рефракции первого порядка. Для этого решается система из двух уравнений

$$\begin{aligned} f_R^I &= f_s^I + f_d^I + \delta f_{TR}^I + \alpha_1 / f_s^I, \\ f_R^{II} &= f_s^{II} + f_d^{II} + \delta f_{TR}^{II} + \alpha_1 / f_s^{II} \end{aligned} \quad (2.171)$$

относительно неизвестного $\delta f_{IR} = \alpha_1 / f_s^I$, являющегося ионосферной поправкой первого порядка в частоту. Затем определяется ионосферная поправка к частоте f_R^I и разностной частоте $f_G^I - f_R^I$ в доплеровских измерениях [26]

$$\delta f_{IR}^I = (1 - K^2)^{-1} \cdot (f_R^I - K \cdot f_R^{II}). \quad (2.172)$$

В формуле (2.172) коэффициент K определяется отношением частот

$$K = f_s^I / f_s^{II}. \quad (2.173)$$

В зависимости (2.158) производная

$$\delta V_{IR} = d\delta\rho_{IR}/d\tau, \quad (2.174)$$

является ионосферной поправкой в лучевую скорость и используется в модели дифференциальных доплеровских измерений (2.124). Эту поправку можно определить, подставив поправку δf_{IR}^1 из формулы (2.172) в формулу (2.158)

$$\delta V_{IR} = -(1 - K^2)^{-1} \cdot (f_R^1 - K \cdot f_R^{\text{II}}) \cdot C/f_S^1. \quad (2.175)$$

Подставив выражение для основной частоты f_R^1

$$f_R^1 = f_S^1 + f_d^1 + \delta f_{TR} + \delta f_{IR} \quad (2.176)$$

в равенство (2.24), получим

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} (f_G^1 - f_R^1) \cdot d\tau = \Phi^1 \cdot T_G + C^{-1} \cdot f_S^1 \cdot (\delta\rho_G + TR) - \int_{\tau_i}^{\tau_j} \delta f_{IR}^1 \cdot d\tau, \quad (2.177)$$

где Φ^1 – частота подставки, определяемая по формуле (2.22) для основной частоты.

Из сравнения выражений (2.159) и (2.177) следует, что

$$C^{-1} \cdot f_S^1 \cdot IR_G = - \int_{\tau_i}^{\tau_j} \delta f_{IR}^1 \cdot d\tau. \quad (2.178)$$

Подставив δf_{IR}^1 из формулы (2.172) в (2.178), запишем

$$\begin{aligned}
C^{-1} \cdot f_S^1 \cdot IR_G &= -(1-K^2)^{-1} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} (f_R^1 - K \cdot f_R^{\text{II}} + f_G^1 - f_G^1) \cdot d\tau = \\
&= (1-K^2)^{-1} \cdot \left(\int_{\tau_i}^{\tau_j} (f_G^1 - f_R^1) \cdot d\tau - \int_{\tau_i}^{\tau_j} (f_G^1 - K \cdot f_R^{\text{II}}) \cdot d\tau \right). \quad (2.179)
\end{aligned}$$

Учитывая отношение (2.173) в последнем равенстве, запишем выражение для расчета ионосферной поправки в разность дальностей для модели интегральных доплеровских измерений (2.159) в ЛСВ [34]

$$IR_G = (1-K^2)^{-1} \cdot (N_{ij}^{G1} - K \cdot N_{ij}^{GII}) \cdot C/f_S^1, \quad (2.180)$$

где N_{ij}^{G1} и N_{ij}^{GII} – интегральные доплеровские отсчеты при работе на частотах f_R^1 и f_R^{II} .

Проделав аналогичные действия, найдем выражение для расчета ионосферной поправки в разность дальностей для модели измерений (2.160) [34]:

$$IR_S = (1-K^2)^{-1} \cdot (N_{ij}^{S1} - K \cdot N_{ij}^{SII}) \cdot C/f_G^1. \quad (2.181)$$

Формулы (2.175), (2.180) и (2.181) используются для расчета ионосферных поправок в математических моделях доплеровских траекторных измерений КА (см. 2.4).

Некоторые двухканальные доплеровские приемники в режиме автокоррекции исправляют интегральные доплеровские отсчеты в процессе измерений. При этом частота f_R^1 корректируется ионосферной поправкой δf_{IR} , определяемой по формуле (2.172),

$$\bar{f}_R^1 = f_R^1 - \delta f_{IR} = K^2 \cdot (K^2 - 1)^{-1} \cdot (f_R^1 - K^{-1} \cdot f_R^{\text{II}}), \quad (2.182)$$

где \bar{f}_R^1 – свободное от ионосферной рефракции первого порядка значение частоты принятого радионавигационного сигнала [26].

Для импульсных и фазовых радиодальномерных измерений в целях исключения ионосферной рефракции первого порядка измерения выполняются также на двух частотах. В этом случае измеренное расстояние, исправленное поправкой за ионосферную рефракцию, определяется из выражения [186, 188]

$$\rho = (f_s^{I^2} \cdot \hat{S}^I - f_s^{II^2} \cdot \hat{S}^{II}) / (f_s^{I^2} - f_s^{II^2}), \quad (2.183)$$

где \hat{S}^I и \hat{S}^{II} – измеренные на частотах f_s^I и f_s^{II} значения расстояний.

Эти расстояния можно определить как

$$\hat{S}^{I,II} = (\tau - t_r) \cdot C \quad (2.184)$$

– для импульсных РТС;

$$\hat{S}^I = -\Delta\varphi(\tau) \cdot C \cdot K^{-1} \cdot f_s^I, \quad \hat{S}^{II} = -\Delta\varphi(\tau) \cdot C \cdot K^{-1} \cdot f_s^{II} \quad (2.185)$$

– для фазовых РТС.

Формула (2.183) используется в практических работах. Заметим, что выражения (2.175), (2.180), (2.181) и (2.183) учитывают влияние ионосферной рефракции только первого порядка. Чтобы исключить из результатов радиотехнических измерений влияние ионосферной рефракции первого и второго порядков, необходимо выполнять измерения на трех частотах [178]. Это, в свою очередь, приводит к значительному усложнению приемной и передающей аппаратуры.

Для расчета тропосферной поправки $\delta\rho_{TR}$ в измеренную дальность до КА наиболее приемлемы аппроксимирующие модели тропосферной рефракции Саастамойнена [92, 174, 181, 190], Хопфилдт [174, 182, 183, 186, 191], Блэка [170,

174]. Эти модели позволяют оценить значение тропосферной рефракции по измеренным на земной поверхности метеорологическим данным: атмосферному давлению P (мбар), температуре воздуха $T^{\circ}K$, парциальному давлению водяных паров e (мбар).

Согласно модели, предложенной Саастамойненом, тропосферная поправка в измеренную наклонную дальность до КА рассчитывается как

$$\delta\rho_{TR} = 22,77 \cdot 10^{-4} \cdot \sin^{-1}E_0 \cdot [P + (1255/T + 0,05) \cdot e - H \cdot \text{ctg}^2 E_0] + \delta, \quad (2.186)$$

где E_0 – приведенная высота КА над горизонтом;

H – ортометрическая высота приемника;

δ – табличная поправка для высот спутника над горизонтом, лежащих в пределах от 10° до 30° .

Угол E_0 определяется как

$$E_0 = E - \Delta E, \quad (2.187)$$

где E – реальная высота КА над горизонтом.

Поправка ΔE в угловых секундах вычисляется по формуле

$$\Delta E = \frac{16 \cdot \text{ctg} E}{T} \cdot (P + \frac{4800}{T} \cdot e) - 7 \cdot 10^{-5} \cdot (\text{ctg}^3 E + \text{ctg} E) \cdot P. \quad (2.188)$$

Числовые значения параметров H и δ выбираются из таблиц, составленных Саастамойненом. В вычислительном аспекте удобна упрощенная модель:

$$\delta\rho_{TR} = 22,77 \cdot 10^{-4} \cdot \sin^{-1}E \cdot [P + (0,05 + 1255/T) \cdot e - 1,16 \cdot \text{ctg}^2 E]. \quad (2.189)$$

Погрешность этой модели не превышает 10 см при $E \geq 10^{\circ}$ [92].

Для расчета тропосферной поправки в измеренную наклонную дальность

при обработке радиотехнических измерений часто используется формула Хопфилдт. Различия поправок, полученных по этой формуле и по аэрологическим данным, не превышают 1% при $E > 5^\circ$ [196]. Модель Хопфилдт имеет вид

$$\delta\rho_{TR} = K_d / \sin A + K_w / \sin B. \quad (2.190)$$

В этой модели

$$\begin{aligned} K_d &= 155,2 \cdot 10^{-7} \cdot h_d \cdot P/T, & K_w &= 155,2 \cdot 10^{-7} \cdot e \cdot h_w \cdot 4810/T^2, \\ h_d &= 40136 + 148,72 \cdot (T - 273^0,16), & h_w &= 11000 \text{ м}, \\ A &= \sqrt{E^2 + 6^0,25}, & B &= \sqrt{E^2 + 2^0,25}. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Модель Блэка для расчета тропосферной поправки в измеренную наклонную дальность до КА дает хорошее согласие с результатами, полученными по аэрологическим данным: различия не превышают 0,1 % при $E > 3^\circ$ [182]. Эта модель имеет вид

$$\delta\rho_{TR} = K_d \cdot (\Phi_d - b(E)) + K_w \cdot (\Phi_w - b(E)). \quad (2.192)$$

В этой модели

$$\begin{aligned} \Phi_d &= \left[1 - \left(\frac{\cos E}{1 + (1 - l_c) \cdot h_d / R} \right)^2 \right]^{1/2}, & \Phi_w &= \left[1 - \left(\frac{\cos E}{1 + (1 - l_c) \cdot h_w / R} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ l_c &= 0,833 + (0,076 + 15 \cdot 10^{-6} \cdot (T - 273))^{0,3E}, & b(E) &= 1,92 \cdot (E^2 + 0,6)^{-1}, \\ h_d &= 148,98 \cdot (T - 3,96), & h_w &= 13000 \text{ м}, \\ K_d &= 2312 \cdot 10^{-6} \cdot P \cdot (T - 3,96)/T, & K_w &= 0,20, \end{aligned} \quad (2.193)$$

где R – геоцентрическое расстояние приемника.

Если на поверхности Земли относительная влажность воздуха r измерена в процентах, то парциальное давление водяных паров может быть вычислено по формуле [107]

$$e = r \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-37,24657 + 0,21317 \cdot T - 26 \cdot 10^{-5} \cdot T^2). \quad (2.194)$$

Для модели дифференциальных доплеровских измерений (2.124) тропосферную поправку δV_{TR} в лучевую скорость

$$\delta V_{TR} = \frac{d\delta\rho_{TR}}{d\tau} \quad (2.195)$$

определим как

$$\delta V_{TR} = \frac{d\delta\rho_{TR}}{dE} \cdot \frac{dE}{d\tau}. \quad (2.196)$$

Здесь скорость $dE/d\tau$ изменения высоты КА над горизонтом обозначим как \dot{E} .

Дифференцирование зависимостей (2.189) и (2.190) по времени позволяет получить соотношения, определяющие значение тропосферной поправки в лучевую скорость КА [50, 56]:

$$\delta V_{TR} = -\frac{22,77 \cdot 10^{-4} \cdot \cos E}{\sin^2 E} \cdot [P + 1,16 + (\frac{1255}{T} + 0,05) \cdot e - 3,48 \cdot \sin^2 E] \cdot \dot{E}, \quad (2.197)$$

$$\delta V_{TR} = -[\frac{\cos A}{A \cdot \sin^2 A} \cdot K_d + \frac{\cos B}{B \cdot \sin^2 B} \cdot K_w] \cdot E \cdot \dot{E}. \quad (2.198)$$

Чтобы найти угол E и скорость его изменения \dot{E} , запишем скалярное произведение геоцентрического радиус-вектора \mathbf{R} приемника и топоцентрического радиус-вектора \mathbf{p} КА

$$\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\rho} = R \cdot \rho \cdot \cos(\mathbf{R}_s \boldsymbol{\rho}). \quad (2.199)$$

Так как угол между векторами \mathbf{R} и $\boldsymbol{\rho}$ равен $(90^\circ - E)$, то можно записать

$$\sin E = R^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\rho}, \quad (2.200)$$

где R – геоцентрическое расстояние приемника (2.59);

ρ – топоцентрическое расстояние спутника.

Продифференцировав по времени равенство (2.199), запишем

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^T \cdot \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} = \dot{R} \cdot \rho \cdot \sin E + R \cdot V \cdot \sin E + R \cdot \rho \cdot \cos E \cdot \dot{E}, \quad (2.201)$$

где $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ – вектор топоцентрической скорости КА;

$\dot{\mathbf{R}}$ – вектор геоцентрической скорости КА, определяемый формулой (2.48);

V – лучевая скорость, определяемая по формуле (2.47).

Теперь из выражения (2.201), в котором $\dot{R} = dR/dt = 0$, выразим параметр \dot{E} .

В результате получим

$$\dot{E} = \frac{1}{\rho \cdot \cos E} \cdot [R^{-1} \cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} \cdot \dot{\mathbf{R}}) - V \cdot \sin E]. \quad (2.202)$$

Чтобы избавиться от функции $\cos E$, находящейся в знаменателе, подставим \dot{E} из равенства (2.202) в формулу (2.197) и получим выражение для расчета тропосферной поправки в лучевую скорость спутника [50, 56]

$$\begin{aligned} \delta V_{TR} = & -\frac{22,77 \cdot 10^{-4}}{\rho \cdot \sin^2 E} \cdot [P + 1,16 + (\frac{1255}{T} + 0,05) \cdot e - 3,48 \cdot \sin^2 E] \times \\ & \times [R^{-1} \cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} \cdot \dot{\mathbf{R}}) - V \cdot \sin E]. \end{aligned} \quad (2.203)$$

Формулы Саастамойнена (2.189) и Хопфилдт (2.190) и, полученные на их основе, формулы (2.198), (2.203) дают хорошо согласующиеся между собой результаты. В таблицах И.2 и И.3 (приложение И) приведены некоторые числовые значения тропосферных поправок в дальность и лучевую скорость КА для различных высот спутника над горизонтом. При $E > 10^\circ$ различия между тропосферными поправками в наклонную дальность, вычисленными по формулам (2.189) и (2.190), не превышают ~ 14 см, в лучевую скорость (формулы (2.198) и (2.203)) – 7,2 мм/с. Если $E \geq 15^\circ$, то эти различия поправок в наклонную дальность не превосходят уже ~ 5 см, а в лучевую скорость $\sim 1,4$ мм/с.

В таблице И.4 (приложение И) представлены численные значения тропосферных поправок в разность дальностей, вычисленных по формулам Саастамойнена и Хопфилдт, для различных высот КА над горизонтом. Видно, что различия этих поправок существенно меньше, чем различия тропосферных поправок в дальность: при $E > 10^\circ$ расхождения не превышают ~ 8 см, а при $E > 15^\circ$ – ~ 2 см.

В вычислительном аспекте для расчета тропосферных поправок в разность дальностей и в лучевую скорость предпочтительнее выражения (2.189) и (2.203). Они компактнее и содержат меньшее число арифметических операций, что весьма существенно при обработке больших массивов измерительной информации. По точности же эти формулы сопоставимы с формулами (2.190), (2.198) и могут успешно применяться на этапе обработки результатов радиотехнических траекторных измерений КА.

2.7 Уравнения поправок для определения геодезических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников

При решении обратной задачи космической геодезии с целью оценивания геодезических и геодинамических параметров по результатам обработки радиотехнических траекторных измерений КА необходимо иметь соответствующие уравнения поправок (см. 1.4). В них левая часть представляет собой линеаризо-

ванную нелинейную вектор-функцию конкретного измеряемого параметра относительно приближенных значений вектора оцениваемых параметров. Правая часть получается как разность измеренных и вычисленных значений измеряемых параметров с добавлением неизвестных поправок к результатам измерений. Для обработки дифференциальных и интегральных доплеровских, а также беззапросных импульсных и фазовых радиодальномерных траекторных измерений КА были получены соответствующие математические модели (см. 2.4 и 2.5), отвечающие определенным критериям адекватности. В этом подразделе рассмотрим порядок формирования вектора правой части и матриц коэффициентов уравнений поправок вида (1.100) и (1.101) для математической обработки этих видов радиотехнических измерений. Часть матриц коэффициентов была представлена в 1.5 и 1.6.

Для математических моделей (2.128) – (2.130), (2.144) и (2.145) рассматриваемых радиотехнических траекторных измерений спутников функциональную зависимость (1.33) между векторами-столбцами первичных и вторичных измеряемых псевдопараметров можно записать как

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}(\mathbf{\Lambda}, t) = \begin{bmatrix} \Delta f \\ N_{ij}^G \\ N_{ij}^S \\ \tau - t_\Gamma \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot (V(\tau) + \Delta_v) \\ T_G \cdot \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot (\delta \rho_G + \Delta_G) \\ T_S \cdot \Phi^0 + C^{-1} \cdot f_G^0 \cdot (\delta \rho_S + \Delta_S) \\ C^{-1} \cdot (\rho_\tau(\tau) + \Delta_\tau) \\ -K \cdot C^{-1} \cdot f_s^0 \cdot (\rho_\varphi(\tau) + \Delta_\varphi) \end{bmatrix}. \quad (2.204)$$

Здесь под параметром Δf понимается разностная частота, образованная смещением частот принятых колебаний f_G и колебаний опорного генератора приемника f_R . Она находится по формуле

$$\Delta f = f_G - f_R. \quad (2.205)$$

Вектор-функции, необходимые для расчета компонент вектора \mathbf{Z} в зависимости (2.204), определяются следующими величинами: Φ^0 – номинальным значением

частоты подставки; f_G^0, f_S^0 – номинальными значениями частот опорных генераторов приемника и передатчика; C – скоростью света в вакууме; T_G, T_S – отрезками времени накопления колебаний разностной частоты в ЛСВ и ССВ соответственно; $(V(\tau)+\Delta_v)$ – лучевой псевдоскоростью КА; $(\delta\rho_G+\Delta_G), (\delta\rho_S+\Delta_S)$ – разностями топоцентрических псевдодальностей в ЛСВ и ССВ; $(\rho_\tau+\Delta_\tau), (\rho_\varphi+\Delta_\varphi)$ – топоцентрическими псевдодальностями, измеряемыми импульсными и фазовыми РТС; K – отношением частот модулирующего и несущего колебаний электромагнитного сигнала.

Вектор-столбец $\tilde{\mathbf{Z}}$ результатов измерений первичных параметров будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{Z}} = [\Delta\tilde{f} \quad \tilde{N}_{ij}^G \quad \tilde{N}_{ij}^S \quad \Delta\tilde{\tau} \quad \Delta\tilde{\varphi}]^T, \quad (2.206)$$

где $\Delta\tilde{f}$ – измеренная приемной аппаратурой разностная частота;

\tilde{N}_{ij}^G и \tilde{N}_{ij}^S – измеренное число циклов разностной частоты в шкалах времени ЛСВ и ССВ соответственно;

$\Delta\tilde{\tau}$ – измеренное время распространения радиоимпульса;

$\Delta\tilde{\varphi}$ – измеренная разность фаз принятого и опорного колебаний.

За вектор вторичных измеряемых параметров примем пятимерный вектор-столбец

$$\mathbf{\Lambda}' = [V(\tau) \quad \delta\rho_G \quad \delta\rho_S \quad \rho_\tau(\tau) \quad \rho_\varphi(\tau)]^T, \quad (2.207)$$

где $V(\tau)$ – лучевая скорость КА;

$\delta\rho_G$ и $\delta\rho_S$ – разности дальностей, определяемые интегральным доплеровским методом в ЛСВ и ССВ соответственно;

$\rho_\tau(\tau)$ – топоцентрическая дальность до КА, определяемая импульсной РТС;

$\rho_\varphi(\tau)$ – топоцентрическая дальность КА, определяемая фазовой РТС.

Под вектором вторичных измеряемых псевдопараметров Λ , определяемых выражениями (1.28) и (1.30), будем понимать вектор-столбец

$$\Lambda = [(V(\tau) + \Delta_V) (\delta\rho_G + \Delta_G) (\delta\rho_S + \Delta_S) (\rho_\tau(\tau) + \Delta_\tau) (\rho_\varphi(\tau) + \Delta_\varphi)]^T, \quad (2.208)$$

где $V(\tau) + \Delta_V$ – лучевая псевдоскорость КА;

$\delta\rho_G + \Delta_G$ – разность псевдодальностей, измеряемых интегральным доплеровским методом в ЛСВ;

$\delta\rho_S + \Delta_S$ – разность псевдодальностей, измеряемых интегральным доплеровским методом в ССВ;

$\rho_\tau(\tau) + \Delta_\tau$ – топоцентрическая псевдодальность, измеряемая импульсной РТС;

$\rho_\varphi(\tau) + \Delta_\varphi$ – топоцентрическая псевдодальность, измеряемая фазовой РТС.

Здесь компонентами пятимерного вектора-столбца Λ , определяемого выражением (1.34),

$$\Lambda = [\Delta_V \quad \Delta_G \quad \Delta_S \quad \Delta_\tau \quad \Delta_\varphi]^T \quad (2.209)$$

служат сингулярные ошибки измеряемых лучевой скорости V , разностей дальностей $\delta\rho_G$ и $\delta\rho_S$, наклонных дальностей ρ_τ и ρ_φ . Эти ошибки обусловлены аппаратурными, атмосферными, абберационными, релятивистскими и прочими влияниями на результаты радиотехнических траекторных измерений КА.

На этапе предварительной обработки результатов доплеровских измерений исключается номинальное значение частоты подставки Φ^0 , поэтому вектор-столбец \mathbf{Z} первичных измеряемых псевдопараметров и вектор-столбец $\tilde{\mathbf{Z}}$ результатов измерений первичных параметров будут иметь вид:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \Delta f - \Phi^0 \\ N_{ij}^G - \Phi^0 \cdot T_G \\ N_{ij}^S - \Phi^0 \cdot T_S \\ \Delta \tau \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_s^0 \cdot (V(\tau) + \Delta_V) \\ f_s^0 \cdot (\delta \rho_G + \Delta_G) \\ f_g^0 \cdot (\delta \rho_S + \Delta_S) \\ (\rho_\tau(\tau) + \Delta_\tau) \\ -K \cdot f_s^0 \cdot (\rho_\varphi(\tau) + \Delta_\varphi) \end{bmatrix}, \quad (2.210)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{f} - \Phi^0 \\ \tilde{N}_{ij}^G - \Phi^0 \cdot T_G \\ \tilde{N}_{ij}^S - \Phi^0 \cdot T_S \\ \Delta \tilde{\tau} \\ \Delta \tilde{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1} \cdot \tilde{f}_s \cdot \tilde{V}(\tau) + (\tilde{\Phi} - \Phi^0) \\ C^{-1} \cdot \tilde{f}_s \cdot \delta \tilde{\rho}_G + (\tilde{\Phi} - \Phi^0) \cdot T_G \\ C^{-1} \cdot \tilde{f}_G \cdot \delta \tilde{\rho}_S + (\tilde{\Phi} - \Phi^0) \cdot T_S \\ C^{-1} \cdot \tilde{\rho}_\tau(\tau) \\ -K \cdot C^{-1} \cdot \tilde{f}_s \cdot \tilde{\rho}_\varphi(\tau) \end{bmatrix}, \quad (2.211)$$

где $\Delta \tilde{f}$ – текущее значение частоты биений;

$\tilde{\Phi}$ – текущее значение частоты подставки;

\tilde{f}_s – текущее значение частоты опорного генератора передатчика;

\tilde{f}_G – текущее значение частоты опорного генератора приемника;

$\tilde{V}(\tau)$ – реальное значение лучевой скорости КА;

$\delta \tilde{\rho}_G$ – реальное значение разности дальностей при измерении в ЛСВ;

$\delta \tilde{\rho}_S$ – реальное значение разности дальностей при измерении в ССВ;

$\tilde{\rho}_\tau(\tau)$ – реальное значение дальности до КА при измерении импульсными РТС;

$\tilde{\rho}_\varphi(\tau)$ – реальное значение дальности до КА при измерении фазовыми РТС.

Вектор-столбец измеренных значений вторичных параметров $\tilde{\Lambda}$ представим как

$$\tilde{\Lambda} = \left[\tilde{V}(\tau) \quad \delta \tilde{\rho}_G \quad \delta \tilde{\rho}_S \quad \tilde{\rho}_\tau(\tau) \quad \tilde{\rho}_\varphi(\tau) \right]^T. \quad (2.212)$$

Обозначив вектор вторичных измеряемых псевдопараметров Λ в равенстве (2.208) как

$$\Lambda = \left[\lambda_V \quad \lambda_G \quad \lambda_S \quad \lambda_\tau \quad \lambda_\varphi \right]^T, \quad (2.213)$$

запишем общее выражение для расчета элементов диагональной матрицы в системах уравнений поправок (1.98) и (1.99)

$$\frac{\partial \mathbf{W}(\Lambda, t)}{\partial \Lambda} = \text{diag}\left(\frac{\partial W_V(\lambda_V, t)}{\partial \lambda_V}, \frac{\partial W_G(\lambda_G, t)}{\partial \lambda_G}, \frac{\partial W_S(\lambda_S, t)}{\partial \lambda_S}, \frac{\partial W_\tau(\lambda_\tau, t)}{\partial \lambda_\tau}, \frac{\partial W_\varphi(\lambda_\varphi, t)}{\partial \lambda_\varphi}\right). \quad (2.214)$$

Матрицу $\frac{\partial \mathbf{W}(\Lambda, t)}{\partial \Lambda}$ получим, продифференцировав функциональную зависимость (2.204) по компонентам вектора Λ из равенства (2.208). В итоге имеем

$$\frac{\partial \mathbf{W}(\Lambda, t)}{\partial \Lambda} = C^{-1} \cdot \text{diag}(f_s^0, f_s^0, f_G^0, 1, -K \cdot f_s^0). \quad (2.215)$$

Перемножив матрицу $\left(\frac{\partial \mathbf{W}(\Lambda, t)}{\partial \Lambda}\right)^{-1}$ на векторы \mathbf{Z} и $\tilde{\mathbf{Z}}$ из зависимостей (2.210), (2.211), получим аналитические выражения для расчета компонент векторов Λ и $\tilde{\Lambda}$ (см. 1.4). Выполнив перемножение, можем записать [134]

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \tilde{V}(\tau) \\ \delta \tilde{\rho}_G \\ \delta \tilde{\rho}_S \\ \tilde{\rho}_\tau(\tau) \\ \tilde{\rho}_\varphi(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{f}_S \cdot \tilde{V}(\tau) + C \cdot (\tilde{\Phi} - \Phi^0))/f_s^0 \\ (\tilde{f}_S \cdot \delta \tilde{\rho}_G + C \cdot (\tilde{\Phi} - \Phi^0) \cdot T_G)/f_s^0 \\ (\tilde{f}_G \cdot \delta \tilde{\rho}_S + C \cdot (\tilde{\Phi} - \Phi^0) \cdot T_S)/f_G^0 \\ \tilde{\rho}_\tau(\tau) \\ \tilde{f}_S \cdot \tilde{\rho}_\varphi(\tau)/f_s^0 \end{bmatrix}. \quad (2.216)$$

Зависимости (2.216) поясняют физическую природу формирования измеренных значений лучевой псевдоскорости $\tilde{V}(\tau)$, разности псевдодальностей $\delta \tilde{\rho}_G$ и $\delta \tilde{\rho}_S$, а также псевдодальностей $\tilde{\rho}_\tau(\tau)$ и $\tilde{\rho}_\varphi(\tau)$ до спутника. Численные же значения этих величин найдем из аналитических выражений, которые получим перемножением матрицы $\left(\frac{\partial \mathbf{W}(\Lambda, t)}{\partial \Lambda}\right)^{-1}$ на вектор-столбец $\tilde{\mathbf{Z}}$ первого представления из равенства

(2.211):

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \tilde{V}(\tau) \\ \delta\tilde{\rho}_G \\ \delta\tilde{\rho}_S \\ \tilde{\rho}_\tau(\tau) \\ \tilde{\rho}_\varphi(\tau) \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} (\tilde{f}_G - \tilde{f}_R - \Phi^0)/f_S^0 \\ (\tilde{N}_{ij}^G - \Phi^0 \cdot T_G)/f_S^0 \\ (\tilde{N}_{ij}^S - \Phi^0 \cdot T_S)/f_G^0 \\ \tilde{\tau} - \tilde{t}_T \\ -\Delta\tilde{\varphi}(\tau) \cdot K^{-1}/f_S^0 \end{bmatrix}. \quad (2.217)$$

Теперь компоненты вектора-столбца $\mathbf{F} = [f^V \ f^G \ f^S \ f^\tau \ f^\varphi]^T$ правых частей системы уравнений поправок определим как разность векторов $\tilde{\Lambda}$ и Λ [76, 134]:

$$\mathbf{F} = \tilde{\Lambda} - \Lambda = \begin{bmatrix} f^V \\ f^G \\ f^S \\ f^\tau \\ f^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}(\tau) - V(\tau) - \Delta_V \\ \delta\tilde{\rho}_G - \delta\rho_G - \Delta_G \\ \delta\tilde{\rho}_S - \delta\rho_S - \Delta_S \\ \tilde{\rho}_\tau(\tau) - \rho_\tau(\tau) - \Delta_\tau \\ \tilde{\rho}_\varphi(\tau) - \rho_\varphi(\tau) - \Delta_\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.218)$$

Ниже получим матрицу коэффициентов \mathbf{E} , определяемую выражением (1.32), перед вектором мешающих параметров Γ . За оцениваемый вектор мешающих параметров для одного прохождения спутника в зоне видимости НП примем пятимерный вектор-столбец

$$\Gamma = \left[\delta\Phi \quad \dot{\Phi} \quad K_T \quad \delta\tau \quad \delta f_S \right]^T, \quad (2.219)$$

компоненты которого независимы между собой. Будем полагать, что они не изменяют своих значений в пределах одного прохождения КА зоны радиовидимости наблюдателя (см. 1.1). Отметим, что здесь временная задержка $\delta\tau$ имеет следующий смысл: $\delta\tau = \delta\tau_G + \delta\tau_g$ – для дифференциальных и интегральных в ЛСВ доплеровских измерений; $\delta\tau = \delta t_s$ – для интегральных в ССВ доплеровских измерений;

$\delta\tau = \delta\tau_G + \delta t_S$ – для импульсных и фазовых радиодальномерных измерений. При обработке результатов радиодальномерных измерений, полученных импульсными РТС, параметр δf_S исключается из вектора Γ , то есть $\delta f_S = 0$.

Для определения аналитических выражений элементов прямоугольной матрицы \mathbf{E} воспользуемся формулой (1.41) и получим

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}_V \ \mathbf{E}_G \ \mathbf{E}_S \ \mathbf{E}_\tau \ \mathbf{E}_\varphi]^T = \left[\frac{\partial \Delta_V}{\partial \Gamma} \ \frac{\partial \Delta_G}{\partial \Gamma} \ \frac{\partial \Delta_S}{\partial \Gamma} \ \frac{\partial \Delta_S}{\partial \Gamma} \ \frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \Gamma} \ \frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \Gamma} \right]^T. \quad (2.220)$$

Продифференцировав правые части зависимостей (2.131) – (2.133), (2.146) и (2.147) по компонентам вектора Γ из равенства (2.219), запишем (см. приложение К)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_V &= [(C - \dot{\gamma}(\tau) - \ddot{\gamma}(\tau) \cdot (\tau - \tau_0)) / f_S^0 \quad C \cdot (\tau - \tau_0) / f_S^0 \quad \delta V_{TR} \quad -\ddot{\gamma}(\tau) \quad V(\tau) / f_S^0], \\ \mathbf{E}_G &= [(C \cdot T_G + (\Phi_0 / f_G^0 - 1) \cdot (m_{i+1} \cdot \dot{\gamma}(\tau_{i+1}) \cdot (\tau_{i+1} - \tau_0) - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0))) / f_S^0 \\ &\quad C \cdot T_G \cdot ((\tau_i + \tau_{i+1}) / 2 - \tau_0) / f_S^0 \quad TR \quad (m_i \cdot V(\tau_i) - m_{i+1} \cdot V(\tau_{i+1})) \\ &\quad (\delta \rho_G + (m_{i+1} \cdot \dot{\gamma}(\tau_{i+1}) \cdot (\tau_{i+1} - \tau_0) - m_i \cdot \dot{\gamma}(\tau_i) \cdot (\tau_i - \tau_0)) \cdot \Phi^0 / f_G^0) / f_S^0], \\ \mathbf{E}_S &= [(2 \cdot C \cdot T_S - (n_{i+1} \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i+1}) \cdot (t_{\Gamma i+1} - t_0) - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i}) \cdot (t_{\Gamma i} - t_0)) + \delta \rho_S) / f_G^0 \quad (2.221) \\ &\quad 2 \cdot C \cdot T_S \cdot ((t_{\Gamma i} + t_{\Gamma i+1}) / 2 - t_0) / f_G^0 \quad TR \quad (n_i \cdot V(t_{\Gamma i}) - n_{i+1} \cdot V(t_{\Gamma i+1})) \\ &\quad (\delta \rho_S + (n_{i+1} \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i+1}) \cdot (t_{\Gamma i+1} - t_0) - n_i \cdot \dot{\beta}(t_{\Gamma i}) \cdot (t_{\Gamma i} - t_0) - C \cdot T_S) \cdot \Phi^0 / f_S^0) / f_G^0], \\ \mathbf{E}_\tau &= [(C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0) / f_G^0 \quad (C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0)^2 / f_G^0 / 2 \quad \delta \rho_{TR} \quad (C - m \cdot V(\tau)) \quad 0], \\ \mathbf{E}_\varphi &= [(C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0) / f_G^0 \quad (C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0)^2 / f_G^0 / 2 \quad \delta \rho_{TR} \quad (C - m \cdot V(\tau)) \quad \rho_\varphi(\tau) / f_S^0]. \end{aligned}$$

В зависимости от решаемой задачи и класса точности приемной аппаратуры элементы матриц (2.221) в различной степени могут упрощаться. Но, учитывая быстродействие вычислительных операций в современных компьютерных системах, вид этих коэффициентов можно не менять.

Матрицу частных производных $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Y}}$ в системах уравнений поправок

(1.100) и (1.101) представим в виде произведения двух матриц

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Y}}, \quad (2.222)$$

где Ψ – вектор-функция вида (1.30);

\mathbf{X} – шестимерный вектор-столбец прямоугольных координат векторов положения \mathbf{r} и скорости $\dot{\mathbf{r}}$ спутника в звездной системе координат;

\mathbf{Y} – шестимерный вектор-столбец регулярных элементов (1.135).

Аналитические выражения для расчета элементов матрицы $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Y}}$ вида (1.144) уже получены – это зависимости (B.12) и (B.13) (приложение B). Матрицу частных производных $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}}$ в равенстве (1.141) на текущий момент времени $t \in T$ также представим в виде произведения двух матриц

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda'} \cdot \frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.223)$$

Здесь матрицы-сомножители имеют вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda'} = \text{diag}\left(\frac{\partial \lambda_V}{\partial V(\tau)}, \frac{\partial \lambda_G}{\partial \delta \rho_G}, \frac{\partial \lambda_S}{\partial \delta \rho_S}, \frac{\partial \lambda_\tau}{\partial \rho_\tau(\tau)}, \frac{\partial \lambda_\varphi}{\partial \rho_\varphi(\tau)}\right), \quad (2.224)$$

$$\frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \Lambda'}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\tau)}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial V(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \\ \frac{\partial \delta \rho_G}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \delta \rho_G}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \\ \frac{\partial \delta \rho_S}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \delta \rho_S}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \\ \frac{\partial \rho_\tau(\tau)}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \rho_\tau(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \\ \frac{\partial \rho_\varphi(\tau)}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \rho_\varphi(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \end{bmatrix}, \quad (2.225)$$

Так как вектор вторичных измеряемых псевдопараметров Λ в выражении (2.208) определяется суммой вектора вторичных измеряемых параметров Λ' равенства (2.207) и вектора сингулярных ошибок Δ равенства (2.209) (см. 1.1)

$$\Lambda = \Lambda' + \Delta, \quad (2.226)$$

то матрица частных производных (2.224) выражается в виде суммы двух матриц

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda'} = \mathbf{I} + \frac{\partial \Delta}{\partial \Lambda'}, \quad (2.227)$$

где \mathbf{I} – единичная 5x5 матрица.

Элементы диагональной матрицы $\frac{\partial \Delta}{\partial \Lambda'}$ найдем дифференцированием правых частей равенств (2.131) – (2.133), (2.146) и (2.147) по компонентам вектора Λ' . В результате получим

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \Lambda'} = \text{diag}\left(\frac{\delta f_s}{f_s^0} - \frac{\dot{\gamma}(\tau) + 2 \cdot V(\tau)}{C}, \frac{\delta f_s}{f_s^0}, \frac{\delta f_G}{f_G^0}, \frac{\dot{\gamma}(\tau) \cdot \delta \tau_c}{\rho(\tau)}, \frac{\dot{\gamma}(\tau) \cdot \delta \tau_c}{\rho(\tau)} + \frac{\delta f_s}{f_s^0}\right). \quad (2.228)$$

Для большинства спутниковых орбит и оснащения КА современной радиотехнической аппаратурой элементы этой матрицы имеют следующую величину:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \Lambda'} = \text{diag}(7 \cdot 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-7}, 1.0 \cdot 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6}). \quad (2.229)$$

Проведенные исследования показали (см. приложение Д), что относительная ошибка расчета матрицы изохронных производных составляет величину примерно $5 \cdot 10^{-3}$. Это значительно превышает величины ошибок вычисления элементов матрицы $\frac{\partial \Delta}{\partial \Lambda'}$. Поэтому в дальнейшем будем считать

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.230)$$

Матрицу частных производных $\frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{X}}$ вида (2.225) размерности 5×6 , заданную на текущий момент времени τ , получим (см. приложение К) дифференцированием правых частей равенств (2.44), (2.47), (2.77), (2.108) и (2.61) по компонентам вектора \mathbf{X} [10, 97, 146]:

$$\frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \rho^{-1}(\tau) \cdot [\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - \mathbf{V}(\tau)]^T & \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \\ \rho^{-1}(\tau_j) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau_j) - \rho^{-1}(\tau_i) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau_i) & 0 \\ \rho^{-1}(t_{\Gamma j}) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(t_{\Gamma j}) - \rho^{-1}(t_{\Gamma i}) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(t_{\Gamma i}) & 0 \\ \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) & 0 \\ \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.231)$$

Здесь вектор $\mathbf{V}(\tau)$ лучевой скорости КА в звездной системе координат вычисляется по формуле

$$\mathbf{V}(\tau) = \rho^{-1}(\tau) \cdot V(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau). \quad (2.232)$$

Далее для уравнений поправок (1.100) и (1.101) получим матрицу

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} = \frac{\partial \Lambda'}{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}, \quad (2.233)$$

которая в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial \Lambda'}{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\tau)}{\partial \mathbf{R}} & \frac{\partial V(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \\ \frac{\partial \delta \rho_G}{\partial \mathbf{R}} & \frac{\partial \delta \rho_G}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \\ \frac{\partial \delta \rho_S}{\partial \mathbf{R}} & \frac{\partial \delta \rho_S}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \\ \frac{\partial \rho_\tau(\tau)}{\partial \mathbf{R}} & \frac{\partial \rho_\tau(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \\ \frac{\partial \rho_\varphi(\tau)}{\partial \mathbf{R}} & \frac{\partial \rho_\varphi(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \end{bmatrix} \cdot \quad (2.234)$$

Справедливо следующее важное равенство [10]

$$\frac{\partial \Lambda'}{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} = - \frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{X}} \cdot \quad (2.235)$$

Отсюда следует, что матрица $\frac{\partial \Psi}{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}$ в рассматриваемых уравнениях поправок рассчитывается по формулам (2.231), то есть

$$\frac{\partial \Psi}{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})} = - \frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{X}} \cdot \quad (2.236)$$

Дифференцирование правой части выражения (1.61), посредством которого осуществляется преобразование геоцентрического радиус-вектора \mathbf{R}_G НП из земной системы координат $(OXYZ)_G$ в инерциальную систему $(oxyz)$, по компонентам геоцентрического радиус-вектора \mathbf{R}_G позволяет в общем виде получить следующее матричное равенство

$$\frac{\partial(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \mathbf{R}_G} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \cdot \quad (2.237)$$

Здесь для принятых в данной работе систем координат матрицы преобразования имеют вид (1.62) и (1.71).

Чтобы найти аналитический вид коэффициентов $\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta_0}$ перед вектором поправок в уравнениях (1.100) и (1.101)

$$\Delta \Theta_0 = [\Delta x_0 \dots \Delta x_{L1} \quad \Delta y_0 \dots \Delta y_{L1} \quad \Delta UT_0 \dots \Delta UT_{L1}]^T \quad (2.238)$$

к приближенным значениям вектора оцениваемых параметров Θ_0 вида (1.94) кинематической модели ПВЗ, следует продифференцировать правую часть матричного выражения (1.61) по текущим значениям компонент вектора Θ ПВЗ в выражении (1.86). В итоге можно записать [51, 55, 74, 80]

$$\frac{\partial (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \dot{\mathbf{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}}{\partial \Theta} \end{bmatrix}, \quad (2.239)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -Z_G \cdot \cos \tilde{S} & -Z_G \cdot \sin \tilde{S} & \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R}_G \\ -Z_G \cdot \sin \tilde{S} & Z_G \cdot \cos \tilde{S} & \\ X_G & -Y_G & \end{bmatrix}, \quad (2.240)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\tilde{S}} \cdot \begin{bmatrix} Z_G \cdot \sin \tilde{S} & -Z_G \cdot \cos \tilde{S} & \\ -Z_G \cdot \cos \tilde{S} & -Z_G \cdot \sin \tilde{S} & \dot{\tilde{S}}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R}_G \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}. \quad (2.241)$$

Матрицу $\dot{\mathbf{P}}$ размерности 3×3 с учетом функциональной зависимости

поправки UT от Всемирного времени $UT1$ (1.48) и допущениях

$$\frac{\partial \dot{\tilde{S}}}{\partial UT1} = 0, \quad \delta \dot{\epsilon} \cdot \cos \tilde{S} = 0, \quad \delta \dot{\epsilon} \cdot \sin \tilde{S} = 0,$$

вносящих в расчеты относительную ошибку, не превышающую величины 10^{-8} , получим как

$$\ddot{\mathbf{P}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{P}}}{\partial UT1} \cdot \frac{\partial UT1}{\partial UT} \quad (2.242)$$

Выполнив дифференцирование элементов матрицы $\dot{\mathbf{P}}$ в выражении (1.71) и правой части равенства (1.48) по переменным $UT1$ и UT соответственно, получим

$$\ddot{\mathbf{P}} = -\dot{\tilde{S}}^2 \cdot (\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P}), \quad (2.243)$$

где

$$\Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v' \\ 0 & 0 & -\delta \epsilon \\ -x_p - 2 \cdot \dot{\tilde{S}}^{-1} \cdot \dot{v}' \cdot \sin \tilde{S} & -y_p - 2 \cdot \dot{\tilde{S}}^{-1} \cdot \dot{v}' \cdot \cos \tilde{S} & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.244)$$

Прямоугольную матрицу частных производных \mathbf{K} от текущих значений ПВЗ Θ по оцениваемым параметрам Θ_0 кинематической модели ПВЗ

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta_0} \quad (2.245)$$

найдем, дифференцируя модели (1.69) и (1.70) по компонентам вектора Θ_0 вида

(1.94) [51, 55]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & t-t_0 & \dots & (t-t_0)^{L1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t-t_0 & \dots & (t-t_0)^{L1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t-t_0 & \dots & (t-t_0)^{L1} \end{bmatrix}, \quad (2.246)$$

Здесь моменты t и t_0 заданы в равномерной шкале времени RT .

С учетом зависимостей (1.159), (2.220) – (2.222), (2.230), (2.231), (2.233), (2.236), (2.237), (2.239) и (2.245) окончательно запишем систему уравнений поправок вида (1.100) для совместного оценивания начальных условий движения КА, ПВЗ и положения НП [35, 36, 51, 55, 74, 80]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_V \cdot \Delta\Gamma + \rho^{-1}(\tau) \cdot ([\dot{\rho}(\tau) - \mathbf{V}(\tau)]^T \cdot \Phi_1 + \rho^T(\tau) \cdot \Phi_2) \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - \\ - \rho^{-1}(\tau) \cdot ([\dot{\rho}(\tau) - \mathbf{V}(\tau)]^T \cdot \mathbf{P} + \rho^T(\tau) \cdot \dot{\mathbf{P}}) \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \\ - \rho^{-1}(\tau) \cdot ([\dot{\rho}(\tau) - \mathbf{V}(\tau)]^T \cdot \mathbf{M} + \rho^T(\tau) \cdot \dot{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta\Theta_0 = f^V + V_V \end{aligned} \quad (2.247)$$

– по результатам дифференциальных доплеровских измерений;

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_G \cdot \Delta\Gamma + ((\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \Phi_1)_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \Phi_1)_{\tau_i}) \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - \\ - ((\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \mathbf{P})_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \mathbf{P})_{\tau_i}) \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \\ - ((\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K})_{\tau_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K})_{\tau_i}) \cdot \Delta\Theta_0 = f^G + V_G \end{aligned} \quad (2.248)$$

– по результатам интегральных доплеровских измерений в ЛСВ;

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_S \cdot \Delta\Gamma + ((\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \Phi_1)_{t_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \Phi_1)_{t_i}) \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - \\ - ((\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \mathbf{P})_{t_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \mathbf{P})_{t_i}) \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \\ - ((\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K})_{t_{i+1}} - (\rho^{-1} \cdot \rho^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K})_{t_i}) \cdot \Delta\Theta_0 = f^S + V_S \end{aligned} \quad (2.249)$$

– по результатам интегральных доплеровских измерений в ССВ;

$$\mathbf{E}_\tau \cdot \Delta\Gamma + \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot (\boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - \mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \mathbf{M} \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta\boldsymbol{\Theta}_0) = f^\tau + V_\tau \quad (2.250)$$

– по результатам импульсных беззапросных радиодальномерных измерений;

$$\mathbf{E}_\varphi \cdot \Delta\Gamma + \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot (\boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \Delta\mathbf{Y}_0 - \mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{R}_G - \mathbf{M} \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta\boldsymbol{\Theta}_0) = f^\varphi + V_\varphi \quad (2.251)$$

– по результатам фазовых беззапросных радиодальномерных измерений.

В случае оценивания начальных условий движения спутника, ПВЗ и элементов ориентирования референцной системы координат $(OXYZ)_Г$ относительно общеземной $(OXYZ)_G$, следует воспользоваться системой уравнений поправок вида (1.101). Для этого в уравнениях (2.247) – (2.251) достаточно заменить трехмерный вектор-столбец $\Delta\mathbf{R}_G$ матричным выражением (1.96) и оценивать элементы векторов $d\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\omega}$ и параметр k [35, 36].

3 ВОПРОСЫ НАБЛЮДАЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

3.1 Вопросы наблюдаемости в космической геодезии

Под наблюдаемостью динамической системы понимается свойство взаимно однозначного соответствия между множеством измеряемых и множеством оцениваемых параметров. Как уже отмечалось в 1.1, наблюдаемость является одним из условий регулярной постановки измерительной задачи. Нарушение этого условия приводит к нерегулярной ее постановке, что на этапе численных экспериментов выражается в повышенной чувствительности решения задачи к ошибкам задания исходных данных или в неоднозначности получаемого решения, а также в слабой сходимости итерационного процесса (1.114) при решении системы нелинейных уравнений (1.112).

Впервые понятие наблюдаемости динамических систем введено Р. Калманом в 1960 году на 1-м конгрессе ИФАК в г. Москве. Им же разработаны критерии наблюдаемости для линейных систем, основанные на определении ранга функциональной матрицы (1.113). Дальнейшее развитие вопросы ранговой наблюдаемости получили в работах В. Н. Брандина, Б. Ф. Жданюка, Г. Н. Разоренова, И. В. Онькова, П. Е. Эльясберга и ряда других авторов [6, 16, 90, 122, 123, 149]. Ими же определены качественные (геометрические) условия глобальной и локальной наблюдаемости, глобальной ненаблюдаемости для различных параметров орбит КА и видов измерений. Обобщая отмеченные выше работы, запишем следующее определение. Система называется наблюдаемой, если имеется возможность однозначно определить ее состояние по имеющейся выборке результатов измерений.

Понятие плохой наблюдаемости, основанное на теории собственных значений функциональной матрицы, введено Г. Н. Разореновым [16], Р. Р. Назировым и П. Е. Эльясбергом [118] и использовано в дальнейшем при анализе решения геодезических задач [96, 166, 171]. Это понятие возникло в связи с тем, что в

реальных задачах приходится иметь дело с такими системами, которые теоретически наблюдаемы, но в ходе проведения численного эксперимента проявляют признаки ненаблюдаемых систем. Этот факт соответствует некорректной либо нерегулярной постановке задачи. По этой причине для выявления случаев плохой наблюдаемости ранговые критерии не пригодны. Здесь применимы количественные критерии: число обусловленности, след, квадратный корень из следа, определитель, максимальное собственное значение ковариационной матрицы [13, 14, 106, 161].

Появление нерегулярной (глобальная ненаблюдаемость) либо некорректной (плохая наблюдаемость) измерительной задачи обусловлено тем, что имеющейся измерительной информации недостаточно для определения всех компонент вектора оцениваемых параметров (1.93). На этапе решения СЛАУ глобальная ненаблюдаемость проявляется в том, что матрица коэффициентов в уравнении (1.119) неполного ранга. Поэтому все компоненты вектора оцениваемых параметров определить невозможно. Плохая наблюдаемость проявляется в том, что эта матрица плохо обусловлена и решение СЛАУ становится неустойчивым (см. 1.4). На этапе постановки измерительной задачи желательно знать качественные условия наблюдаемости. Это позволит перед началом численного эксперимента более достоверно определить состав вектора оцениваемых параметров либо доопределить задачу путем добавления информативных измерений (увеличивая число опорных НП в задаче определения орбит или число прохождений КА в зоне видимости наблюдателя при определении координат НП, а также подключая другие виды измерений).

За количественную характеристику наблюдаемости в задаче оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем удобно принять число обусловленности, рассчитываемое по формуле (Б.18) (приложение Б) в отдельности для каждой группы базисных векторов равенства (1.125), соответствующих определенной группе компонент вектора оцениваемых параметров равенства (1.93) [46]. В формуле (Б.18) (приложение Б) в качестве величин σ_{max} и τ выбирается максимальное сингулярное число и точность формирования коэффициентов по группам оцениваемых параметров, например:

элементы орбиты КА – первая группа, координаты НП – вторая и т.д. Такой подход позволяет более достоверно установить причину появления плохой обусловленности полной матрицы коэффициентов (состоящей из отдельных групп базисных векторов) в системе уравнений поправок и, соответственно, принять правильное решение по улучшению наблюдаемости (обусловленности СЛАУ) исследуемой нелинейной динамической системы. Если невозможно улучшить обусловленность матрицы добавлением информативных измерений (улучшить геометрию наблюдений), то можно прибегнуть к сокращению числа компонент вектора оцениваемых параметров. Последний прием в вычислительных программах может осуществляться без вмешательства исследователя: согласно методике, описанной в приложении Б, определяется эффективный ранг матрицы коэффициентов, после чего находится нормальное обобщенное решение (Б.19) (приложение Б).

3.2 Условия наблюдаемости параметров движения спутника при измерении его наклонной дальности и лучевой скорости

Получим качественные условия наблюдаемости в задаче уточнения регулярных элементов (1.136) орбиты спутника по результатам измерений наклонной дальности ρ и лучевой скорости V КА [46]. Для этого получим аналитические выражения для расчета матрицы коэффициентов $\partial\Psi/\partial Y_0$ вида (1.139) перед вектором поправок ΔY_0 к приближенным значениям регулярных элементов орбиты в уравнениях (2.247) – (2.251).

Перемножив градиентную (2.231) и фундаментальную матрицы (1.159) (в силу своей относительной простоты сам процесс перемножения матриц не приводится), запишем формулы для вычисления элементов матрицы коэффициентов A системы линейных уравнений поправок вида (1.119):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial p_0} &= \frac{1}{p_0} \cdot (\boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} - 1.5 \cdot (t - t_0) \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}), & \frac{\partial \rho}{\partial g_0} &= -\frac{\eta}{p_0} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} + \frac{K}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}, \\
\frac{\partial \rho}{\partial h_0} &= -\frac{\xi}{p_0} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} + \frac{L}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}, & \frac{\partial \rho}{\partial f_0} &= \kappa^{-1} \cdot (-f \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{S}_1), \\
\frac{\partial \rho}{\partial q_0} &= \kappa^{-1} \cdot (-q \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{S}_2), & \frac{\partial \rho}{\partial l_0} &= \frac{r_0}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \dot{\mathbf{r}},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial p_0} &= \frac{1}{2 \cdot p_0} \cdot (2 \cdot \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{r} - 3 \cdot (t - t_0) \cdot \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{3 \cdot \mu}{r^3} \cdot (t - t_0) \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}), \\
\frac{\partial V}{\partial g_0} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \cdot \left(\frac{-\eta}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{r} + \frac{K}{\mu} \cdot \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{K}{r^3} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} \right), \\
\frac{\partial V}{\partial h_0} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \cdot \left(\frac{-\xi}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{r} + \frac{L}{\mu} \cdot \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{e}_2 - \frac{L}{r^3} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} \right), \\
\frac{\partial V}{\partial f_0} &= \kappa^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{S}_1 + \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{S}_3 \cdot f \cdot \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{r} - f \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}), \\
\frac{\partial V}{\partial q_0} &= \kappa^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{S}_2 + \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{S}_4 \cdot q \cdot \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{r} - q \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \dot{\mathbf{r}}), \\
\frac{\partial V}{\partial l_0} &= \frac{r_0^2}{\sqrt{\mu \cdot p_0}} \cdot \left(\dot{\mathbf{U}}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu}{r^3} \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{r} \right).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Разность $\dot{\mathbf{U}}$ векторов топоцентрической $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ и лучевой \mathbf{V} скоростей КА в текущий момент времени t определяется по формуле

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{V}, \tag{3.3}$$

а параметры K и L – по формулам (1.160).

В задаче оценивания регулярных элементов орбиты КА по результатам измерений наклонной дальности и лучевой скорости спутника на интервале T соотношения (3.1) и (3.2) образуют m строк матрицы коэффициентов \mathbf{A} в СЛАУ

вида (1.119). Если базисные векторы \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, n$; n – размерность расширенного вектора оцениваемых параметров) этой матрицы практически линейно зависимы, либо длина хотя бы одного из них близка к нулю (предполагается, что предварительно базисные векторы нормированы до единицы), то это обязательно приведет к увеличению числа обусловленности (ухудшению обусловленности) матрицы коэффициентов, что непременно проявится в множественности решения СЛАУ. Последнее обстоятельство является проявлением факта плохой наблюдаемости и соответствует случаю некорректной постановки задачи оценивания. Нерегулярная постановка задачи оценивания объясняется наличием факта глобальной ненаблюдаемости. На стадии математической обработки измерительной информации это обязательно проявится в том, что число обусловленности сформированной матрицы коэффициентов будет стремиться к бесконечности (матрица коэффициентов неполного ранга) и часть компонентов вектора оцениваемых параметров станет невозможно определить.

Выполнив описанный выше анализ выражений (3.1) и (3.2), запишем условия, при выполнении которых матрица коэффициентов будет плохо обусловлена.

Общие случаи:

– если наклонные дальности до КА измерены вблизи точек траверса в течение одного или более сеансов, проведенных с одного или нескольких НП, то $\partial \rho / \partial l_0 \approx 0$ и $\partial \rho / \partial g_0 \approx \operatorname{tg} l \cdot \partial \rho / \partial h_0$;

– если лучевые скорости и наклонные дальности до КА, находящегося на экваториальной орбите, измерены в течение одного или более сеансов, проведенных с одного или нескольких НП, расположенных в экваториальной зоне, то $\partial \rho / \partial f_0 \approx \partial \rho / \partial q_0 \approx 0$ и $\partial V / \partial f_0 \approx \partial V / \partial q_0 \approx 0$.

Частные случаи:

а) наклонные дальности до КА, находящегося на экваториальной орбите, измерены в течение одного или более коротких сеансов, проведенных с одного или нескольких НП:

1) $\partial\rho/\partial f_0 \approx 0$, если спутник находился вблизи координатной оси η
($l \approx 90^\circ, 270^\circ$);

2) $\partial\rho/\partial q_0 \approx 0$, если спутник находился вблизи координатной оси ξ
($l \approx 0^\circ, 180^\circ$);

3) $\partial\rho/\partial q_0 \approx \operatorname{tg} l \cdot \partial\rho/\partial f_0$, если спутник находился на одном или двух
диаметрально противоположных участках орбиты;

б) наклонные дальности до КА, имеющего круговую орбиту, измерены в течение одного или более коротких сеансов, проведенных с одного или нескольких НП, находящихся, примерно, на одной широте:

1) $\partial\rho/\partial g_0 \approx 0$, если в моменты измерений спутник имел координаты
 $\xi \approx \xi_0$ и $\eta \approx 0$ ($l \approx l_0 \approx 0^\circ, 180^\circ$);

2) $\partial\rho/\partial h_0 \approx 0$, если в моменты измерений спутник имел координаты
 $\eta \approx \eta_0$ и $\xi \approx 0$ ($l \approx l_0 \approx 90^\circ, 270^\circ$);

3) $\partial\rho/\partial g_0 \approx \operatorname{tg} l \cdot \partial\rho/\partial h_0$, если в моменты измерений спутник имел
координаты $\xi \approx \xi_0$ и $\eta \approx \eta_0$;

4) $\frac{\partial\rho}{\partial g_0} \approx \frac{2 \cdot (\xi_0 - \xi)}{r_0} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial l_0}$, если в моменты измерений спутник находился
вблизи координатной оси ξ ($l \approx 0^\circ, 180^\circ$);

5) $\frac{\partial\rho}{\partial h_0} \approx -\frac{2 \cdot (\eta_0 - \eta)}{r_0} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial l_0}$, если в моменты измерений спутник находился
вблизи координатной оси η ($l \approx 90^\circ, 270^\circ$);

в) наклонные дальности до КА измерены вблизи точек траверса произвольных орбит в течение одного или более коротких сеансов, проведенных с одного или нескольких НП:

1) $\partial\rho/\partial g_0 \approx 0$, если в моменты измерений спутник находился вблизи
координатной оси ξ ($l \approx 0^\circ, 180^\circ$);

2) $\partial\rho/\partial h_0 \approx 0$, если в моменты измерений спутник находился вблизи
координатной оси η ($l \approx 90^\circ, 270^\circ$).

Более редкие случаи появления равных нулю либо зависимых между собой базисных векторов функциональной матрицы здесь опущены.

3.3 Условия наблюдаемости пространственного положения наземного пункта при измерении наклонной дальности и лучевой скорости спутника

В данном подразделе определим качественные условия наблюдаемости в задаче определения пространственных положений НП по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников [46]. Для этого получим аналитические выражения расчета коэффициентов перед вектором поправок $\Delta \mathbf{R}_G$ к приближенным прямоугольным координатам НП. Из уравнений (2.247), (2.250) и (2.251) имеем

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{R}_G} \right]^T = -\rho^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\rho}, \quad (3.4)$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}_G} \right]^T = -\rho^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \boldsymbol{\rho}. \quad (3.5)$$

Так как столбцы матрицы $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \mathbf{P}_3$ в формуле (1.62) относительно осей звездной системы координат образуют ортонормированный базис общеземной системы (см. 1.3), то выражение

$$\boldsymbol{\rho}_G = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\rho} \quad (3.6)$$

означает преобразование топоцентрического радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}$ спутника из звездной системы координат в общеземную, то есть в вектор $\boldsymbol{\rho}_G = \bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z}_G^T$.

Перейдя от топоцентрических векторов положения и скорости КА к

геоцентрическим векторам положения и скорости НП и спутника, зависимость (3.5) с учетом выражений (3.3) и (2.232) запишем как

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}_G} \right]^T = -\rho^{-1} \cdot (\mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} - \rho^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\rho} + \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{r} - \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{R}). \quad (3.7)$$

Используя матричное преобразование (1.61) радиус-вектора \mathbf{R}_G положения НП из общеземной системы координат в звездную, можно записать

$$\mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R}_G, \quad \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{R} = \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R}_G, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}}_G = \dot{\mathbf{r}}_G, \quad \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{r} = \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_G, \quad (3.9)$$

где $\mathbf{r}_G, \dot{\mathbf{r}}_G$ – геоцентрические радиус-векторы положения и скорости КА в общеземной системе координат.

Если учитывать только суточное вращение Земли, то

$$\mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}} = \dot{\tilde{S}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{P} = \dot{\tilde{S}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{R}. \quad (3.11)$$

С учетом зависимостей (3.6), (3.9) и (3.11), преобразуем выражения (3.4) и (3.7). В итоге запишем формулы для расчета коэффициентов перед вектором поправок к приближенным координатам НП, причем для удобства последующего анализа все векторы в этих формулах заданы в общеземной системе координат:

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{R}_G} \right]^T = -\rho^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}_G, \quad (3.12)$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}_G} \right]^T = -\rho^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{r}}_G - \rho^{-1} \cdot V \cdot \boldsymbol{\rho}_G + \dot{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_G). \quad (3.13)$$

В координатной форме последнее равенство имеет вид:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}_G} \right]^T = -\rho^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} - \rho^{-1} \cdot V \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \dot{S}_G \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}_G. \quad (3.14)$$

В задаче оценивания прямоугольных геоцентрических координат положения НП по результатам измерений наклонной дальности и лучевой скорости спутника на интервале времени T соотношения (3.12) – (3.14) образуют m строк матрицы коэффициентов \mathbf{A} в СЛАУ вида (1.119). Выполнив описанный в 3.2 анализ выражений (3.12) – (3.14), запишем условия, при выполнении которых матрица коэффициентов будет плохо обусловлена.

Общие случаи:

– если лучевые скорости и наклонные дальности до одного или нескольких КА, находящихся на экваториальных орбитах, измерены в течение одного или более сеансов с НП, расположенного в экваториальной зоне, то $\partial \rho / \partial Z_G \approx 0$ и $\partial V / \partial Z_G \approx 0$;

– если лучевые скорости одного или нескольких КА, находящихся на экваториальных орбитах, измерены вблизи точек траверса в течение одного или более сеансов с НП, то $\partial V / \partial Z_G \approx 0$;

– если наклонные дальности измерены до одного или нескольких КА, имеющих полярную орбиту, в течение одного или более сеансов и вблизи зенита НП, находящего на полюсе, то $\partial \rho / \partial X_G \approx \partial \rho / \partial Y_G \approx 0$.

Частные случаи:

а) лучевые скорости одного или нескольких КА измерены вблизи точек траверза и зенита места в течение одного или более сеансов, проведенных с НП, расположенного в окрестности полюса:

1) $\partial V / \partial X_G \approx 0$ и $\partial V / \partial Z_G \approx 0$, если в моменты измерений плоскость орбиты спутника примерно совпадает с плоскостью $Y_G 0Z_G$ меридиана Гринвича;

2) $\partial V / \partial Y_G \approx 0$ и $\partial V / \partial Z_G \approx 0$, если в моменты измерений плоскость орбиты спутника примерно совпадает с координатной плоскостью $X_G 0Z_G$;

б) наклонные дальности до одного или нескольких КА измерены с НП в течение одного или более сеансов:

1) $\partial \rho / \partial X_G \approx 0$, если в моменты измерений спутник пересекает координатную плоскость $Y_G 0Z_G$;

2) $\partial \rho / \partial Y_G \approx 0$, если в моменты измерений спутник пересекает координатную плоскость $X_G 0Z_G$;

3) $\partial \rho / \partial Z_G \approx 0$, если в моменты измерений спутник пересекает плоскость, параллельную плоскости экватора и проходящую через НП.

Более редкие случаи появления равных нулю либо зависимых между собой базисных векторов функциональной матрицы здесь опущены.

3.4 Условия наблюдаемости в задаче определения параметров вращения Земли по спутниковым данным

Одной из актуальных задач геодезии является задача изучения проявления геодинамических эффектов на вращение Земли, то есть на параметры вращения Земли. Эти параметры описывают неравномерность вращения Земли вокруг своей оси, а также периодические колебания этой оси в теле Земли. По своей сути эта задача относится к задачам оценивания. Чтобы она имела решение и это решение было единственным, исследователю необходимо стремиться к тому, чтобы ее

постановка на стадии планирования проведения эксперимента отвечала требованиям регулярности и корректности.

В вычислительном аспекте уравнения (2.247) – (2.251) удобны для выполнения задачи оценивания, но не удобны для проведения анализа с целью выявления условий наблюдаемости ПВЗ. По этой причине их следует привести к такому виду, в котором векторы положений и скоростей НП и КА были бы заданы в одной системе координат – земной. Такой подход позволяет существенно упростить последующий анализ. После соответствующих преобразований коэффициенты перед вектором поправок $\Delta\Theta$ в уравнениях (2.247) – (2.251) примут вид [48]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \Theta} = -\rho^{-1} \cdot \mathbf{p}_G^T \cdot \mathbf{D} \quad (3.15)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial \Theta} = -\rho^{-1} \cdot \mathbf{r}_G^T \cdot \mathbf{D}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta} = -\rho^{-1} \cdot \left\{ (\dot{\mathbf{p}}_G^T - \mathbf{V}_G^T) \cdot \mathbf{D} - \dot{S} \cdot \mathbf{r}_G^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & Z_G & X_G \\ Z_G & 0 & Y_G \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dot{S} \cdot [Y_G \cdot Z_G \quad X_G \cdot Z_G \quad X_G^2 + Y_G^2] \right\}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -Z_G & 0 & -\dot{S} \cdot Y_G \\ 0 & Z_G & \dot{S} \cdot X_G \\ X_G & -Y_G & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

где \mathbf{p}_G , \mathbf{r}_G – трехмерные векторы-столбцы топоцентрических и геоцентрических координат КА в земной системе;

$\dot{\mathbf{p}}_G$ и \mathbf{V}_G – векторы топоцентрической и лучевой скоростей КА в земной системе координат.

Отметим, что в некоторых случаях решения задачи оценивания формулы

(3.15) – (3.17) более предпочтительны, так как имеют простой вид и требуют меньшего числа операций для их вычисления.

В задаче оценивания ПВЗ по результатам радиотехнических траекторных измерений КА на интервале времени T выражения (3.15) – (3.17) также образуют m строк матрицы коэффициентов \mathbf{A} в СЛАУ (1.119). Выполнив описанный в 3.2 анализ этих выражений, приведем условия, при которых рассматриваемая динамическая система будет плохо наблюдаема и глобально не наблюдаема [44, 48]:

– НП расположен на экваторе или в области экватора, тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_p} = -\frac{X_G}{Y_G} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_p}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_p} = -\frac{X_G}{Y_G} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_p};$$

– НП расположен на экваторе или в области экватора и орбита КА экваториальная (либо КА пересекает плоскость экватора), тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_p} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y_p} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_p} = -\frac{X_G}{Y_G} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_p};$$

– НП расположен на полюсе или в области полюса, тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x_p} = -\frac{\bar{x}_G}{\bar{y}_G} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_p}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial UT} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial UT} = 0,$$

где \bar{x}_G и \bar{y}_G – топоцентрические координаты КА в земной системе;

– КА находится в зените или области зенита НП, тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_p} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y_p} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial UT} = 0;$$

- КА и НП находятся в плоскости одного меридиана, тогда $\frac{\partial \rho}{\partial UT} = 0$;
- орбита КА экваториальная (либо КА пересекает плоскость экватора), тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x_p} = -\frac{x'_G}{y'_G} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_p},$$

где x'_G и y'_G – геоцентрические координаты КА в земной системе;

- КА находится в области земных полюсов, тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_p} = -\frac{X_G}{Y_G} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y_p}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial UT} = 0.$$

В заключение отметим, что в случае оценивания ПВЗ дифференциальные доплеровские измерения предпочтительнее прочих, так как при решении этой задачи они более информативны.

3.5 Условия наблюдаемости при определении ЭВО по ГНСС-измерениям

Одной из задач космической геодезии является задача оценивания по результатам радиодальномерных траекторных измерений спутников ЭВО, связывающих различные геодезические системы координат. Одним из актуальных вопросов здесь является получение единственного и устойчивого к ошибкам исходных данных вектора решения, то есть вопрос регулярной и корректной постановки такой задачи оценивания. В этом подразделе рассмотрим качественные и количественные условия наблюдаемости ЭВО для некоторых геометрических схем взаимного расположения НП [43, 54, 59].

При определении пространственного положения НП с помощью ГНСС-

технологий потребитель вычисляет его геоцентрический радиус-вектор \mathbf{R}_G в общеземной системе координат $(OXYZ)_G$, под которой в этом подразделе будем понимать систему WGS-84. Чтобы найти пространственное положение НП (геоцентрический радиус-вектор \mathbf{R}_Γ) в какой-либо референцной системе $(OXYZ)_\Gamma$, необходимо выполнить матричное преобразование (1.52) вектора \mathbf{R}_G , в котором поправку к масштабу примем $k=0$,

$$\mathbf{R}_\Gamma = \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{R}_G - d\mathbf{R}. \quad (3.19)$$

Видно, что для определения координат НП по ГНСС-измерениям абсолютным методом, необходимо знать все шесть ЭВО – три угла поворота $\boldsymbol{\omega}$ и три компоненты вектора смещения $d\mathbf{R}$.

При определении координат НП относительным методом спутниковые приемники устанавливаются на двух и более пунктах (НП-1, НП-2 и т.д.). Приемники синхронно выполняют радиодальномерные траекторные измерения нескольких навигационных КА. После математической обработки этих измерений получают положение НП-2 относительно НП-1, то есть вектор $\Delta\mathbf{R}_G = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]_G^T$. Если пространственное положение НП-1 известно (опорный пункт), то положение определяемого пункта НП-2 находится как

$$\mathbf{R}_{G2} = \mathbf{R}_{G1} + \Delta\mathbf{R}_G. \quad (3.20)$$

Обычно пространственное положение НП требуется определять в геодезической системе координат. В этой же системе задаются и пространственные положения (геоцентрические радиус-векторы \mathbf{R}_Γ) одного или нескольких опорных НП, например, НП-1. Если еще известен и вектор $\Delta\mathbf{R}_\Gamma = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]_\Gamma^T$ относительного положения пунктов в геодезической системе, то легко находится пространственное положение определяемого НП этой же системе координат

$$\mathbf{R}_{\Gamma 2} = \mathbf{R}_{\Gamma 1} + \Delta \mathbf{R}_{\Gamma}. \quad (3.21)$$

Вектор $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma}$ может быть найден следующим образом [59]

$$\Delta \mathbf{R}_{\Gamma} = \mathbf{R}^T(\omega) \cdot \mathbf{R}_{G2} - d\mathbf{R} - \mathbf{R}^T(\omega) \cdot \mathbf{R}_{G1} + d\mathbf{R} = \mathbf{R}^T(\omega) \cdot (\mathbf{R}_{G2} - \mathbf{R}_{G1}). \quad (3.22)$$

Откуда получается простое матричное выражение

$$\Delta \mathbf{R}_{\Gamma} = \mathbf{R}^T(\omega) \cdot \Delta \mathbf{R}_G, \quad (3.23)$$

в котором вектор $\Delta \mathbf{R}_G$ будет вычислен в системе $(OXYZ)_G$ в процессе обработки ГНСС-измерений. Получается, если известны углы ω , то можно определить вектор $\Delta \mathbf{R}_{\Gamma}$, а затем по формуле (3.21) – и пространственное положение определяемого НП-2 в геодезической системе координат. Следовательно, при определении пространственного положения НП в геодезической системе координат по ГНСС-измерениям относительным методом необходимо знать углы ω , но не требуется информации о векторе $d\mathbf{R}$.

Задача определения шести ЭВО решается следующим образом. На нескольких опорных НП, заданных в геодезической системе, выполняются ГНСС-измерения абсолютным методом. После обработки измерений получаются пространственные положения этих НП в общеземной системе координат. Затем углы поворотов и вектор смещения находятся из решения СЛАУ [113], записанных в таком виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11} \cdot \omega + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R} &= \tilde{\mathbf{R}}_{G1} - \mathbf{R}_{\Gamma 1}, \\ &\dots \\ \mathbf{D}_{1m} \cdot \omega + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R} &= \tilde{\mathbf{R}}_{Gm} - \mathbf{R}_{\Gamma m}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица;

$\tilde{\mathbf{R}}_G$ – трехмерный вектор-столбец $\tilde{\mathbf{R}}_G = [\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}]_G^T$ вычисленных (составлен из результатов абсолютных ГНСС-измерений) прямоугольных координат опорных НП в системе $(OXYZ)_G$;

m – число опорных пунктов.

В уравнениях (3.24) матрица \mathbf{D}_1 составлена из прямоугольных координат опорного пункта в системе $(OXYZ)_G$ и определяется по формуле (1.56). Зная углы поворотов ω , вектор смещения $d\mathbf{R}$ и результаты абсолютных ГНСС-измерений (векторы $\tilde{\mathbf{R}}_G = [\tilde{X}\ \tilde{Y}\ \tilde{Z}]_G^T$), по формуле (3.19) вычисляются координаты определяемых НП в геодезической системе.

В случае относительных ГНСС-измерений решение задачи определения ЭВО сводится к следующему. На нескольких опорных НП, заданных в геодезической системе координат радиус-векторами $\mathbf{R}_{G1}, \mathbf{R}_{G2}, \dots, \mathbf{R}_{Gm}$ (m – число опорных НП), выполняются относительные ГНСС-измерения. После их математической обработки вычисляются векторы относительного положения НП (базовые векторы) $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G = [\Delta\tilde{X}\ \Delta\tilde{Y}\ \Delta\tilde{Z}]_G^T$, которые будут заданы в общеземной системе координат. Их численные значения выбираются из протоколов работы утилиты “Baseline” программного комплекса “GPSurvey”, либо “Trimble Geomatics Office”. Ниже эти векторы будут рассматриваются как измеренные. По формуле (3.21) между этими же пунктами вычисляются векторы $\Delta\mathbf{R}_G$ относительного положения НП в геодезической системе.

Как следует из выражения (3.23), векторы $\Delta\mathbf{R}_G$ и $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$ связаны между собой равенством

$$\mathbf{R}(\omega) \cdot \Delta\mathbf{R}_G = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_G. \quad (3.25)$$

После простых матричных преобразований равенства (3.25), получим

$$\mathbf{D}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} = \Delta \tilde{\mathbf{R}}_G - \Delta \mathbf{R}_\Gamma. \quad (3.26)$$

Здесь матрица \mathbf{D}_3 составлена из компонент вектора $\Delta \mathbf{R}_\Gamma$ и имеет вид

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z_\Gamma & \Delta Y_\Gamma \\ \Delta Z_\Gamma & 0 & -\Delta X_\Gamma \\ -\Delta Y_\Gamma & \Delta X_\Gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Для k относительных ГНСС-измерений формируется СЛАУ [59]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{31} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{G1} - \Delta \mathbf{R}_{\Gamma 1}, \\ &\dots \\ \mathbf{D}_{3k} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{Gk} - \Delta \mathbf{R}_{\Gamma k}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

после решения которой находятся углы малых поворотов $\boldsymbol{\omega}$. При наличии этих углов и результатов относительных ГНСС-измерений (векторы $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_G$) определяются векторы $\Delta \mathbf{R}_\Gamma$ (3.23). Затем по формуле (3.21) осуществляется передача координат с опорных пунктов на определяемые. Так решаются задачи определения пространственных координат НП и ЭВО по результатам абсолютных и относительных ГНСС-измерений.

Ниже получим условия глобальной ненаблюдаемости ЭВО для абсолютных и относительных ГНСС-измерений, предварительно отметив следующий факт. По относительным ГНСС-измерениям вектор смещения не определяется, а по абсолютным измерениям этот вектор определяется по любому числу измерений, так как в выражении (3.24) матрица коэффициентов перед вектором $d\mathbf{R}$ является ортогональной матрицей.

Из анализа матриц \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_3 следует, что углы $\boldsymbol{\omega}$ не определяются из результатов абсолютных и относительных ГНСС-измерений в случаях, когда [59]:

а) выполнено только одно измерение (здесь определители $|\mathbf{D}_1|=|\mathbf{D}_3|=0$);

б) измерения выполнены на пунктах, расположенных на полюсах (здесь определители $|\mathbf{D}_1|=|\mathbf{D}_3|=0$);

в) измерения выполнены на пунктах, расположенных на экваторе (здесь определители $|\mathbf{D}_1|=|\mathbf{D}_3|=0$).

При проведении ГНСС-измерений абсолютным методом углы поворотов не определяются, если:

а) НП расположены на одном меридиане (в этом случае будут линейно зависимы первый и второй столбцы матрицы \mathbf{D}_1);

б) НП расположены в точках с координатами $B=L=45^\circ, 125^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

Для получения и последующего анализа количественных условий наблюдаемости ЭВО и ошибок их определения применительно к различным геометрическим схемам взаимного расположения опорных НП в данной работе применялись следующие авторские методика и технология.

Разработан математический алгоритм и составлена вычислительная программа, моделирующая задачу оценивания ЭВО для различных геометрических схем взаимного расположения опорных НП. В ней анализируется качество геометрии взаимного расположения НП, которое выражается в виде числа обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ (3.24) и (3.28), а также абсолютных ошибок определения ЭВО. В программе задаются пространственные координаты НП (взятые из каталогов либо с карты прямоугольные или эллипсоидальные), на которых в дальнейшем планируется выполнить абсолютные или относительные ГНСС-измерения с целью определения ЭВО на заданном участке работ. Задаются и примерные значения ЭВО тех координатных систем, в которых будет выполняться исследовательская либо производственная работа (кроме референцной и общеземной систем координат могут использоваться другие системы, например, местные). На данном этапе эти примерные ЭВО будут считаться точными параметрами. Ниже для проведения экспериментов будут рассмотрены только две наиболее часто используемые системы координат: СК-42 и WGS-84.

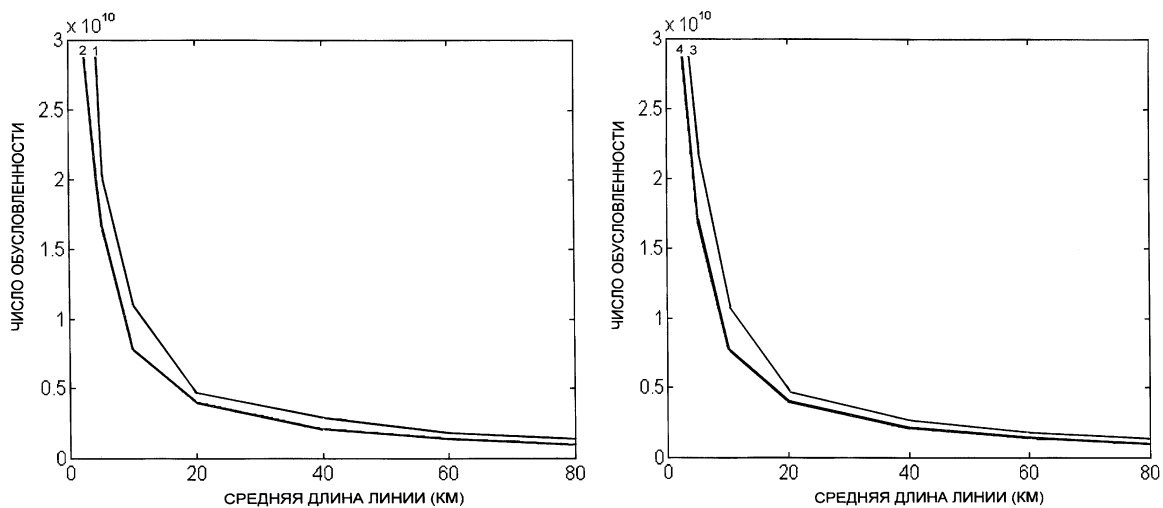
В программе пространственные координаты опорных пунктов, представленные в виде радиус-векторов $\mathbf{R}_Г$, по формуле (1.54) трансформируются из референционной системы в общеземную, т. е. формируются радиус-векторы \mathbf{R}_G . Затем эти радиус-векторы случайным образом искажаются ошибками, численные значения которых отражают уровень точности определения пространственных координат по планируемым ГНСС-измерениям. В итоге получаются пространственные положения $\mathbf{R}_Г$ пунктов в геодезической и искаженные ошибками положения $\tilde{\mathbf{R}}_G$ этих же пунктов в общеземной системах координат. Эти векторы могут быть использованы для получения и последующего анализа количественных условий наблюдаемости ЭВО по результатам абсолютных ГНСС-измерений. Для решения поставленной задачи по результатам относительных ГНСС-измерений на основе известных $\mathbf{R}_Г$ и $\tilde{\mathbf{R}}_G$ по формулам (3.20) и (3.21) формируются базовые векторы $\Delta\mathbf{R}_Г$ и $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$. Эти векторы вычисляются для тех линий между НП, по которым планируется выполнять относительные ГНСС-измерения.

Затем составляются СЛАУ (3.24) или (3.28), которые решаются по МНК с применением процедуры сингулярного разложения сформированных прямоугольных матриц коэффициентов с последующим расчетом числа обусловленности $\mu(\mathbf{A})$ и определением полного либо эффективного рангов этих матриц (см. приложение Б). В процессе решения СЛАУ находятся ЭВО для заданной (смоделированной) геометрической схемы взаимного расположения опорных НП. Далее, эти ЭВО сравниваются с заданными изначально (примерными ЭВО) и определяются их абсолютные ошибки. Если точность определения ЭВО по данному взаимному расположению опорных НП и методу ГНСС-измерений удовлетворительна, то эти пункты используются для определения ЭВО по реальным абсолютным или относительным ГНСС-измерениям. Если эта точность не удовлетворительна, то выбирается и анализируется другая геометрическая схема взаимного расположения опорных пунктов. Заметим, что эта же программа применяется и для определения ЭВО по

результатам реальных ГНСС-измерений. Она хорошо зарекомендовала себя при проведении производственных геодезических работ по развитию геодезических сетей сгущения с помощью относительных ГНСС-измерений.

В данной работе количественные условия наблюдаемости ЭВО применительно к абсолютным и относительным ГНСС-измерениям были получены по описанной выше методике и технологии ее реализации для следующих геометрических построений: треугольник, четырехугольник, четырехугольник с одной и двумя диагоналями, трех и четырех лучевые построения. Средние длины линий фигур изменялись от 2,5 до 80 км. При проведении эксперимента брались ЭВО для систем координат WGS-84 и СК-42, а абсолютные ошибки координат опорных НП не превышали 10 см.

В результате экспериментальных исследований установлено следующее [54, 59]. При использовании абсолютных измерений задача оценивания ЭВО по указанным выше геометрическим построениям характеризуется плохой обусловленностью (рисунок 3.1), приводящей к большим ошибкам.



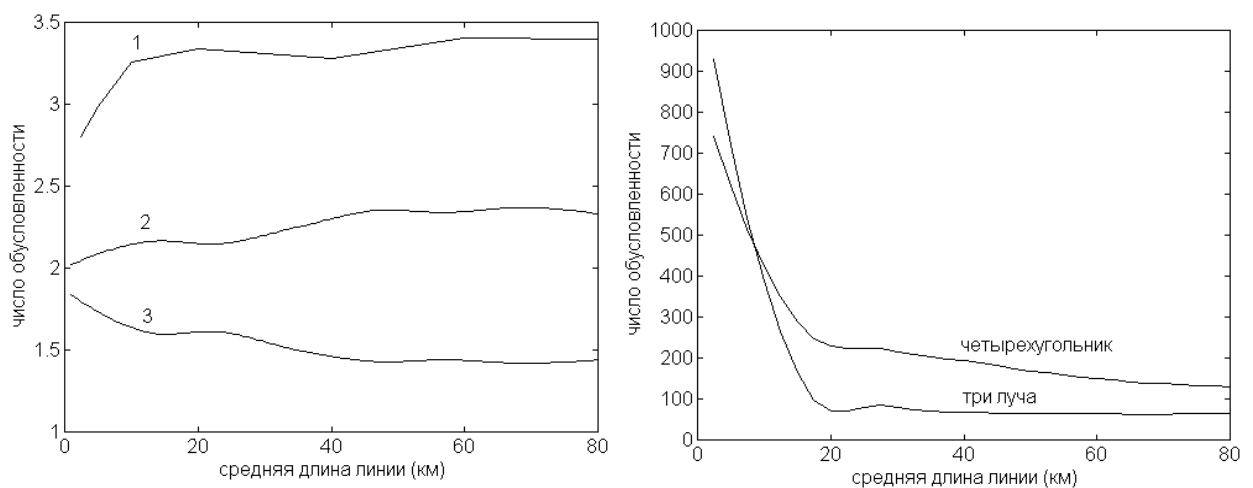
1 – три луча; 2 – четырехугольник; 3 – треугольник; 4 – четыре луча

Рисунок 3.1 – Абсолютные определения

Здесь эффективный ранг матрицы коэффициентов СЛАУ (3.24) всегда равен 4, а абсолютные ошибки ЭВО практически одинаковы (таблица Л.1) (приложение Л).

Наиболее предпочтительными для определения ЭВО являются относительные ГНСС-измерения и геометрические фигуры – четырехугольники с одной и двумя диагоналями, четырех лучевые построения. Здесь обусловленность матрицы коэффициентов СЛАУ (3.28) значительно меньше, чем при абсолютных ГНСС-измерениях. Значения числа обусловленности находятся в пределах от 1,4 до 3,4 (рисунок 3.2), а абсолютных ошибок углов ω – от 0,000" до 0,003" (таблица Л.2) (приложение Л). Кроме этого, численные значения этих величин практически не изменяются при увеличении средней длины линии геометрических построений.

Менее предпочтительными для определения ЭВО относительным методом являются четырехугольник и трех лучевое построения. Здесь при средних длинах линий фигур до 20 км число обусловленности быстро уменьшается и после 20 км практически стабилизируется (рисунок 3.2). Отсюда следует, что в случае возникшей необходимости эти построения желательно применять только при средних длинах линий более 20 км.



1 – четыре луча; 2 – четырехугольник с одной диагональю; 3 – четырехугольник с двумя диагоналями

Рисунок 3.2 – Относительные определения

Из всех рассмотренных геометрических построений треугольник является наиболее плохой фигурой для определения ЭВО как по абсолютным, так и по

относительным ГНСС-измерениям (рисунки 3.1 и 3.3). В обоих случаях матрицы коэффициентов соответствующих СЛАУ характеризуются очень большими числами обусловленности и ошибками решения (таблицы Л.1 и Л.2) (приложение Л).

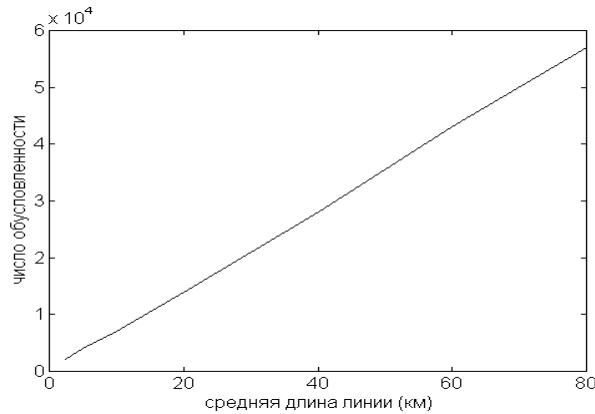


Рисунок 3.3 – Относительные определения (треугольник)

Из полученных результатов проведенных экспериментов следует, что при развитии различных ГСС относительными ГНСС-измерениями эти сети должны опираться не менее чем на четыре исходных пункта. В этом случае будет образовываться не менее шести векторных ходов (замыкающих векторов) между исходными пунктами и определение ЭВО при этом будет происходить по схеме четырехугольника с двумя диагоналями.

Если требуется определить шесть ЭВО, то лучше решать эту задачу следующим образом. Между исходными НП нужно выполнить относительные ГНСС-измерения, при этом одновременно на этих же пунктах будут получены и абсолютные измерения. По результатам относительных ГНСС-измерений определяется вектор малых углов ω , затем радиус-векторы $\mathbf{R}_Г$ исходных НП трансформируются в общеземную систему координат и вычисляется вектор смещения $d\mathbf{R}$ по формуле

$$d\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}_G - \mathbf{R}(\omega) \cdot \mathbf{R}_Г. \quad (3.29)$$

В подтверждение сказанному приведем результаты двух вариантов численного эксперимента по определению ЭВО.

В первом варианте имитировались абсолютные ГНСС-измерения, выполненные на исходных НП, образующих треугольник. Средняя длина стороны треугольника 10 км, а пространственные координаты исходных НП заданы с погрешностью порядка 10 см. По этим измерениям были определены углы малых поворотов ω и вектор смещения $d\mathbf{R}$ со следующими значениями абсолютных ошибок: $\delta\omega_x=1,73''$, $\delta\omega_y=0,68''$, $\delta\omega_z=0,56''$, $\delta dX=27,2$ м, $\delta dY=42,9$ м, $\delta dZ=32,0$ м (таблица Л.1) (приложение Л). Полученный результат можно считать неудовлетворительным.

Во втором варианте между исходными НП имитировались относительные ГНСС-измерения, выполненные по схеме четырехугольника с двумя диагоналями. Средняя длина стороны этой фигуры и погрешность пространственных координат исходных НП составляли 10 км и 10 см соответственно. Сначала по относительным ГНСС-измерениям из решения СЛАУ (3.28) были определены углы малых поворотов с абсолютной ошибкой $\delta\omega=0,000''$ (таблица Л.2) (приложение Л). Затем с использованием этих углов и результатов абсолютных ГНСС-измерений, взятых из первого варианта, по формуле (3.29) был определен вектор смещения $d\mathbf{R}$ со следующими значениями абсолютных ошибок: $\delta dX=0,003$ м, $\delta dY=0,027$ м, $\delta dZ=0,059$ м. Полученный результат можно считать вполне удовлетворительным.

В заключение отметим, что использование на этапе планирования проведения геодезических работ такого подхода и методики для определения ЭВО и координат НП по абсолютным или относительным ГНСС-измерениям делает постановку задачи оценивания регулярной и корректной с выполнением заданного критерия точности оцениваемых параметров.

3.6 Методика оценки влияния ошибок расчета матрицы коэффициентов и вектора правой части на решение СЛАУ в некоторых задачах космической геодезии

Рассмотрим методику планирования оптимального измерительного процесса и технологию ее реализации, обеспечивающую определение ЭВО с заранее заданными точностными характеристиками на примере оценивания ЭВО геодезических систем координат по результатам относительных радиодальномерных траекторных измерений спутников.

Как уже отмечалось ранее, задачи космической геодезии относятся к нелинейным задачам оценивания по результатам траекторных измерений КА расширенного вектора оцениваемых параметров, состоящего из различных геодезических, геодинамических и мешающих параметров, а также параметров движения КА [40, 74, 80]. Такие задачи, как правило, решаются по МНК. Нелинейная задача МНК сводится к последовательному решению ряда линейных задач, представленных несовместной СЛАУ (1.119). При наличии в ней возмущений $\Delta \mathbf{A}$ и $\Delta \mathbf{F}$ матрицы коэффициентов и вектора правой части фактически решается система уравнений (1.129). Верхний предел относительной ошибки ε_x вектора решения \mathbf{X} этой системы определяется неравенством (1.131).

Выполним расчет ожидаемой точности решения в задаче оценивания ЭВО геодезических систем координат по результатам относительных ГНСС-измерений [59]. Из анализа системы уравнений (3.28) следует, что ошибки вектора правой части значительно превышают ошибки матрицы коэффициентов. Поэтому ниже при расчете ожидаемой точности решения задачи оценивания ЭВО будем использовать только относительную ошибку вектора правой части формируемых СЛАУ.

В предыдущем подразделе для различных геометрических фигур, образованных наземными пунктами и подобранных для оценивания ЭВО, получены числа обусловленности в зависимости только от средних длин сторон этих фигур. Используя эти числа обусловленности и значения ошибок ε_F в

неравенстве (1.131), можно рассчитать значения относительной ошибки ε_x решения СЛАУ (3.28) для различных средних длин сторон любой из рассмотренных выше фигур. Затем можно построить графики изменения этой ошибки в зависимости от средней длины стороны выбранной фигуры. Ниже, в качестве примера, к решению поставленной задачи будет применен именно такой подход для четырех геометрических построений.

На рисунке 3.4 представлены два графика изменения ошибки ε_F для ε_F величиной 10^{-6} и 10^{-7} , построенных для произвольного треугольника. Видно, что с увеличением средней длины стороны треугольника линейно увеличивается и ожидаемая ошибка решения.

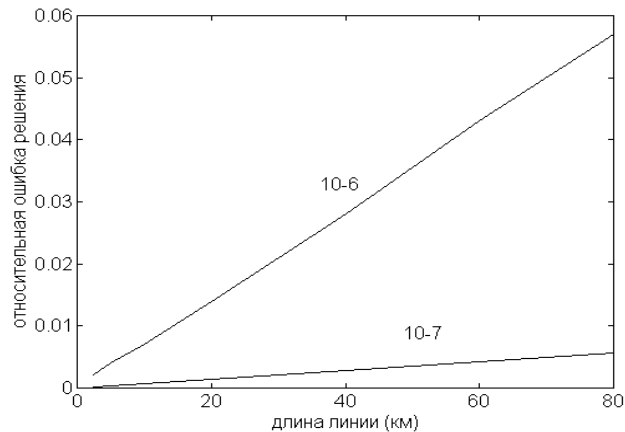


Рисунок 3.4 – Треугольник (относительные определения)

На рисунке 3.5 представлены также два графика изменения ε_x для ε_F величиной 10^{-4} и 10^{-5} , построенных для произвольного четырехугольника. Графики показывают, что с увеличением средней длины стороны этой фигуры ожидаемая относительная ошибка определения ЭВО уменьшается.

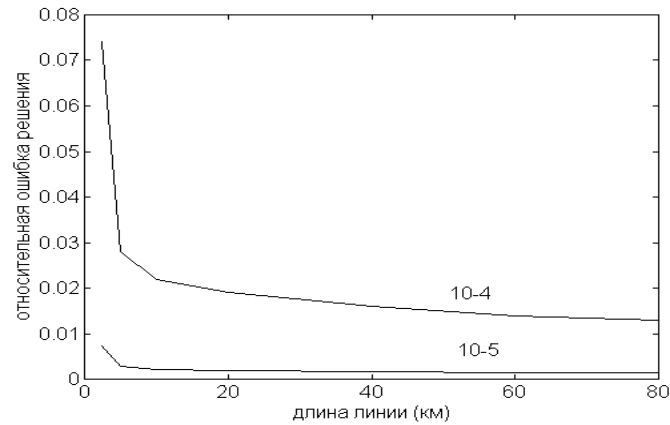


Рисунок 3.5 – Четырехугольник (относительные определения)

На рисунке 3.6 показаны графики изменения ε_X при $\varepsilon_F = 10^{-2}$ для четырехугольников с одной и двумя диагоналями. Графики наглядно показывают, что для более точного определения ЭВО предпочтительнее использовать четырехугольник с двумя диагоналями. Кроме этого, для таких построений ожидаемая ошибка решения практически не изменяется в зависимости от увеличения или уменьшения средней длины линий таких геометрических фигур.

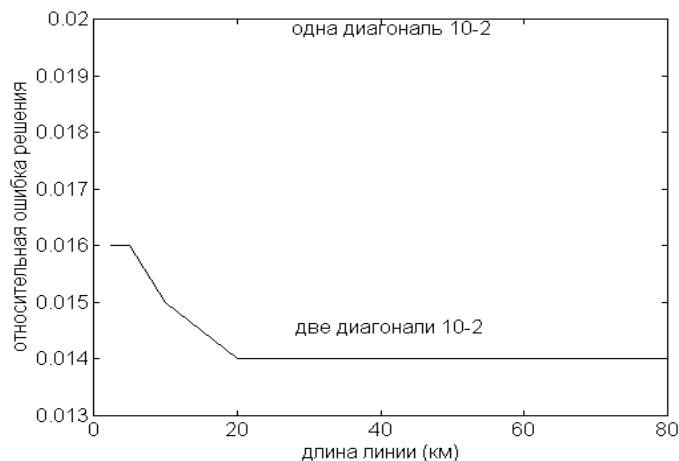


Рисунок 3.6 – Четырехугольник с диагоналями (относительные определения)

В заключение отметим следующее: применяя описанную выше методику,

уже на этапе постановки задачи оценивания геодезических и геодинамических параметров можно спланировать и выбрать оптимальный измерительный эксперимент, обеспечивающий получение оцениваемых геодезических и геодинамических параметров с заранее заданными точностными характеристиками.

3.7 Точность определения высот пунктов по результатам ГНСС-измерений

В данном подразделе рассмотрим один из важных вопросов, связанных с навигационными определениями высотных отметок НП [52, 58]. Известно, что после обработки результатов спутниковых навигационных измерений высоты НП, как правило, определяются с большей ошибкой, чем две другие его координаты. Этот факт в большей степени обусловлен геометрией выбираемого навигационным приемником рабочего созвездия КА. Из всех КА, находящихся в зоне видимости наблюдателя, приемником отбираются только четыре спутника, отвечающих следующему требованию. Они должны образовывать тетраэдр, составленный из топоцентрических векторов по линиям НП-КА. Очевидно, что тетраэдр будет иметь максимальный объем при расположении одного КА в зените НП и трех других вблизи плоскости горизонта, образующих при этом треугольник максимальной площади [114]. Из анализа условий наблюдаемости следует, что при близзенитных прохождениях КА во время позиционирования хорошо определяется высота НП. Если же КА находятся вблизи плоскости горизонта, то хорошо определяются широта и долгота НП.

В основном навигационные измерения выполняются при высотах спутников над горизонтом (углах отсечки) в пределах от 10° до 15° . Это обусловлено тем, что при меньших высотах на точность навигационных определений свое большое отрицательное влияние оказывают не учитываемые погрешности моделей атмосферной рефракции. При таких условиях измерений получаются хорошие, на первый взгляд, статистические оценки высот и их прогнозируемый критерий ожидаемой точности – *VDOP*.

Для выявления оптимального угла отсечки был проведен следующий эксперимент (первая работа, посвященная этой проблеме, с которой встретился автор – это работа авторов [197]). На двух наземных пунктах, пространственные положения которых заданы в системе WGS-84 с субсантиметровой точностью, абсолютным методом с помощью геодезической аппаратуры Wild GPS System-200 Долгановым И. М. были выполнены навигационные определения координат. В процессе обработки результатов измерений по каждому сеансу наблюдений для углов отсечек, заданных с дискретностью в 2° , автором диссертационной работы находились абсолютные ошибки вычисленных высот. Затем для каждого угла отсечки по всем сеансам навигационных определений вычислялось среднее значение абсолютной ошибки как среднее арифметическое из абсолютных ошибок высоты, определенных из отдельных сеансов. Эти данные для наземного пункта 1 сведены в таблице М.1 (приложение М), для наземного пункта 2 – в таблице М.2 (приложение М). Для большей наглядности распределение средних значений абсолютной ошибки высоты по углам отсечки для пунктов 1 и 2 отражено с помощью графиков на рисунке 3.7.

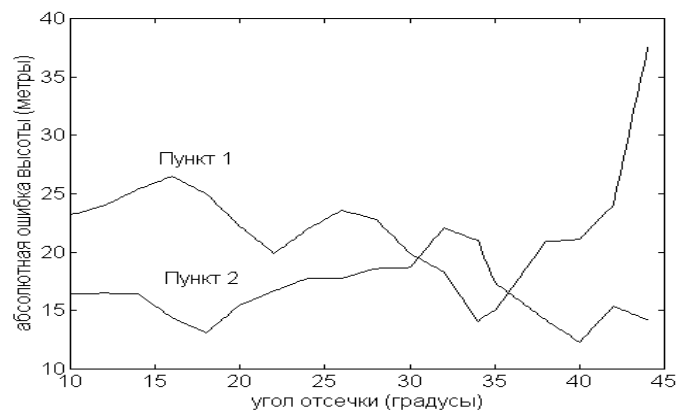


Рисунок 3.7 – Распределение средних значений абсолютных ошибок по углам отсечки для наземных пунктов 1 и 2

Результаты экспериментальных исследований показали, что для повышения точности определения высот НП абсолютным методом, угол отсечки должен

находиться в пределах от 20° до 40° . При этом абсолютная ошибка высоты существенно меньше, чем при углах отсечки от 10° до 15° . Вместе с тем становится очевидным, что абсолютные ошибки высоты уменьшаются с увеличением угла отсечки примерно до 40° . Затем ошибки начинают увеличиваться. Это явление объясняется тем, что число остающихся КА уменьшается и, как следствие, ухудшается геометрия взаимного расположения рабочего созвездия спутников и НП, сильно влияющая на точность навигационных определений высот.

4 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ И УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГНСС-ТЕХНОЛОГИЙ

4.1 Использование ГНСС-измерений для решения геодезических задач

Развернутые в околоземном пространстве ГНСС позволили решать геодезические и геодинамические задачи гораздо точнее и оперативнее классических методов геодезии. Использование этих систем дает возможность реализовать два метода ГНСС-измерений: абсолютный и относительный. Абсолютный метод позволяет определять пространственные координаты НП с ошибкой до 15 м, поэтому он применяется для решения задач топографии. Второй метод при соблюдении благоприятных условий измерений позволяет определять относительные положения НП на сантиметровом уровне точности и даже выше. По этой причине он применяется для решения геодезических и геодинамических задач. С помощью ГНСС можно определять не только пространственные координаты НП, но и развивать геодезические сети различного назначения, выполнять топографическую съемку земной поверхности. По причине своей высокой точности для решения этих задач используется только относительный метод.

При выполнении с 1998 г. производственных топографо-геодезических работ с использованием ГНСС-технологий в различных природно-климатических районах России автор сталкивался с определенными трудностями при: а) развитии сплошных и протяженных (до нескольких сотен километров) планово-высотных геодезических сетей; б) развитии высотных сетей; в) определении пространственных координат отдельных НП; г) вычислении аномалии высоты и целом ряде других задач при выполнении топографических съемок разных масштабов. Решению таких задач уделено внимание российских ученых: А. П. Герасимова [27], В. М. Зимина, М. Г. Годжаманова [11], Ю. И. Маркузе, Е. Г. Бойко, В. В. Голубева, А. В. Антипова [108 – 111], К. М. Антоновича [3, 4], Г. А. Панаева [126], С. Б. Приказчикова [130], В. З. Остроумова, Г. А. Шанурова [125, 160] и др. Здесь особого внимания заслуживает работа Ю. И. Маркузе и W. M. Welsh [110], в

которой представлена система линейных уравнений поправок для уравнивания геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений. В этих уравнениях матрица коэффициентов формируется на основе прямоугольных координат исходных НП, заданных в референцной системе. Как следует из выражения (1.131) для плохо обусловленных СЛАУ, порождаемых плохой геометрией измерений, матрицу коэффициентов и вектор правой части необходимо вычислять с наибольшей точностью. Отсюда следует, что матрицу коэффициентов лучше формировать на основе базовых векторов, получаемых непосредственно из выполненных относительных ГНСС-измерений. Этот подход будет реализован в 4.3.

Другая причина, заставившая автора заняться решением отмеченных выше проблем, была обусловлена следующим фактом. Для обработки ГНСС-измерений используются программные комплексы, например: “GPSurvey”, “Trimble Geomatics Office”, “Ski” и др. В руководствах по их применению не описывается математический алгоритм обработки этих измерений, что существенно усложняет осмысление получаемых с их помощью результатов. Кроме этого, подобные зарубежные программные продукты не позволяют активно влиять на ход вычислительного процесса.

В этом разделе приводятся теория и методы развития геодезических сетей, проведения топографических съемок отдельных участков земной поверхности с использованием ГНСС-измерений. Разработанные теория и методы применялись для выполнения большого объема производственных топографо-геодезических работ. На основе математических алгоритмов были разработаны программные продукты, которые позволили автору влиять на ход вычислительного процесса по обработке ГНСС-измерений и оперативно вносить в них соответствующие изменения и дополнения по мере их совершенствования.

4.2 Развитие геодезических сетей пространственными векторными построениями

В последние несколько лет значительная часть геодезических работ связана с построением ГСС и геодезических съемочных сетей с использованием ГНСС-измерений. Часто такие сети создаются в труднопроходимых регионах, в которых плотность пунктов ГГС довольно низкая, например: горные участки местности, районы Крайнего севера и т.д. Кроме того, приходится выполнять геодезические работы на узких и протяженных (от нескольких десятков до нескольких сотен километров) участках местности, на которых выполняется топографическая съемка надземных и подземных линейных объектов (автомобильных и железных дорог, линий электропередач, трубопроводов различного назначения на нефтяных и газовых месторождениях и т. д.). Расстояние между определяемыми НП здесь, как правило, колеблется от сотен метров до 20 км. В таких случаях целесообразно развивать ГСС пространственными векторными ходами (далее по тексту векторными ходами) с применением относительного метода [64, 65, 69, 70, 81]. В векторном ходе в качестве исходных достаточно иметь два пункта ГГС (рисунок 4.1, а). Если на участке работ требуется определять ЭВО геодезических систем координат, то в число исходных необходимо включать один или два дополнительных пункта ГГС (рисунок 4.1, б и 4.1, в).

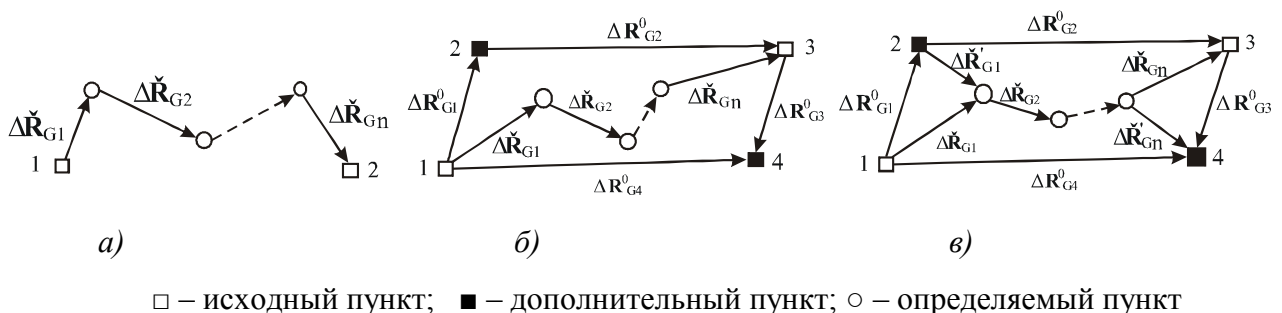
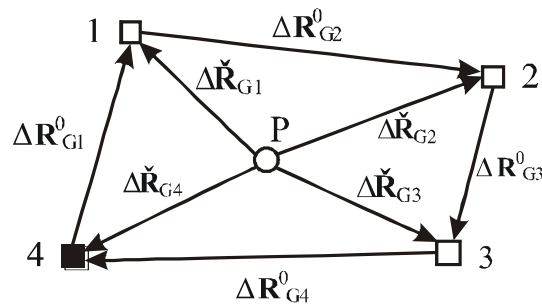


Рисунок 4.1 – Некоторые варианты схем построения векторных ходов:

а) схема 1; б) схема 2; в) схема 3

Для определения координат отдельных НП можно применять пространственную векторную засечку [64, 68, 81]. Эта засечка представляет собой пространственную фигуру, в общем случае многоугольную пирамиду, у которой боковые ребра образованы базовыми векторами, полученными после выполненных относительных ГНСС-измерений в режиме “Static”. В ее основании располагаются исходные НП, а в вершине – определяемый пункт (рисунок 4.2). При построении засечек в число исходных желательно также включать один или два дополнительных НП.



□ – исходный пункт; ■ – дополнительный пункт; ○ – определяемый пункт

Рисунок 4.2 – Вариант построения пространственной векторной засечки

В векторном ходе (рисунок 4.1, а) измеряются базовые векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi} = [\Delta\tilde{X}_{Gi} \ \Delta\tilde{Y}_{Gi} \ \Delta\tilde{Z}_{Gi}]^T$ ($i = 1, 2, \dots, n$, n – число базовых векторов) между пунктами хода. Эти векторы, как правило, представлены в общеземной системе координат $(OXYZ)_G$. На этапе математической обработки измерений плоские прямоугольные координаты и нормальные высоты исходных НП преобразуются в пространственные, т.е. вычисляются их радиус-векторы $\mathbf{R}_{\Gamma k}^0 = [X_{\Gamma k}^0 \ Y_{\Gamma k}^0 \ Z_{\Gamma k}^0]^T$ ($k = 1, 2, \dots, L$, L – число исходных НП) в референционной системе координат $(OXYZ)_\Gamma$ (см. 4.4). Далее, по каждой из координатных осей системы $(OXYZ)_\Gamma$ находятся вектор-столбец $\mathbf{W} = [W_x \ W_y \ W_z]^T$ невязок координат и вектор-столбец поправок $\mathbf{V}_i = [V_{xi} \ V_{yi} \ V_{zi}]^T$ к измеренным значениям базовых векторов

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi} - \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0 - \mathbf{R}_{\Gamma 2}^0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{W} \cdot S_i / S, \quad (4.2)$$

$$S_i = \sqrt{\Delta\tilde{X}_{Gi}^2 + \Delta\tilde{Y}_{Gi}^2 + \Delta\tilde{Z}_{Gi}^2}, \quad (4.3)$$

где $\sum_{i=1}^n \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$ – сумма измеренных базовых векторов;

$\mathbf{R}_{\Gamma_1}^0$ и $\mathbf{R}_{\Gamma_2}^0$ – радиус-векторы первого и последнего по ходу исходных пунктов;

S_i – длина i -го базового вектора;

S – сумма длин базовых векторов хода (общая длина хода).

Исправленные значения базовых векторов $\Delta\mathbf{R}_{\Gamma_i} = [\Delta X_{\Gamma_i} \ \Delta Y_{\Gamma_i} \ \Delta Z_{\Gamma_i}]^T$ вычисляются в системе координат $(OXYZ)_{\Gamma}$ по формуле

$$\Delta\mathbf{R}_{\Gamma_i} = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi} + \mathbf{V}_i. \quad (4.4)$$

Радиус-векторы НП векторного хода $\mathbf{R}_{\Gamma_j} = [X_{\Gamma_j} \ Y_{\Gamma_j} \ Z_{\Gamma_j}]^T$ ($j = 1, 2, \dots, m$; m – число определяемых НП) в референцной системе координат определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Gamma_1} &= \mathbf{R}_{\Gamma_1}^0 + \Delta\mathbf{R}_{\Gamma_1}, \\ \mathbf{R}_{\Gamma_2} &= \mathbf{R}_{\Gamma_1} + \Delta\mathbf{R}_{\Gamma_2}, \\ &\dots \\ \mathbf{R}_{\Gamma_m} &= \mathbf{R}_{\Gamma_{m-1}} + \Delta\mathbf{R}_{\Gamma_{m-1}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Вектор-столбец $\mathbf{f} = [1/f_x \ 1/f_y \ 1/f_z]^T$ относительных ошибок пространственных координат пунктов векторного хода находится по формуле

$$\mathbf{f} = 1 / (S / \mathbf{W}). \quad (4.6)$$

В конце уравнительных вычислений пространственные координаты пунктов векторного хода пересчитываются в систему плоских прямоугольных координат и нормальных высот [30, 72, 112, 113].

Для оценки точности координат определяемых НП в системе плоских прямоугольных координат и нормальных высот вычисляется радиус-вектор $\hat{\mathbf{R}}_{\Gamma_2}^0 = [\hat{X}_{\Gamma_2}^0 \hat{Y}_{\Gamma_2}^0 \hat{Z}_{\Gamma_2}^0]^T$ конечного НП векторного хода (рисунок 4.1, а)

$$\hat{\mathbf{R}}_{\Gamma_2}^0 = \mathbf{R}_{\Gamma_1}^0 + \sum_{i=1}^n \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{Gi} \quad (4.7)$$

и выполняется переход от пространственных координат $\hat{X}_{\Gamma_2}^0$, $\hat{Y}_{\Gamma_2}^0$ и $\hat{Z}_{\Gamma_2}^0$ к плоским прямоугольным координатам \hat{X}_2^0 , \hat{Y}_2^0 и нормальной высоте \hat{H}_2^0 . Затем вычисляются вектор-столбец $\mathbf{N} = [N_X \ N_Y \ N_H]^T$ невязок и вектор-столбец $\mathbf{F} = [1/F_X \ 1/F_Y \ 1/F_H]^T$ относительных ошибок координат НП векторного хода

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_2^0 - X_2^0 \\ \hat{Y}_2^0 - Y_2^0 \\ \hat{H}_2^0 - H_2^0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{F} = 1 / (S / \mathbf{N}), \quad (4.9)$$

где X_2^0 , Y_2^0 и H_2^0 – взятые из каталога плоские прямоугольные координаты и нормальная высота конечного НП в векторном ходе;

S – длина хода.

В пространственной векторной засечке для определения базовых векторов $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$ между определяемым и исходными пунктами применяется относительный метод ГНСС-измерений. Здесь геоцентрический радиус-вектор $\mathbf{R}_p = [X_p \ Y_p \ Z_p]^T$ определяемого пункта вычисляется в референционной системе координат по каждому базовому вектору отдельно (здесь число базовых векторов совпадает с числом исходных НП) как

$$\mathbf{R}_{Pi} = \mathbf{R}_{\Gamma_i}^0 + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{Gi}. \quad (4.10)$$

Окончательно пространственное положение определяемого НП при равноточных ГНСС-измерениях базовых векторов находится по формуле

$$\mathbf{R}_p = (\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{p_i}) / n, \quad (4.11)$$

где n – число измеренных базовых векторов.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса координат определяемого НП вычисляется как

$$\mu = (\sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i^T \cdot \mathbf{V}_i)^{1/2} / (3 \cdot n - 1). \quad (4.12)$$

Здесь вектор-столбец вероятных поправок $\mathbf{V}_i = [V_{Xi} V_{Yi} V_{Zi}]^T$ к измеренным базовым векторам определяется по формуле

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{R}_{p_i} - \mathbf{R}_p. \quad (4.13)$$

На заключительном этапе вычисленные пространственные координаты определяемого НП преобразуются в систему плоских прямоугольных координат и нормальных высот [30, 72].

Представленные алгоритмы уравнивания векторных построений просты и при их использовании координаты определяемых НП получаются в системе координат исходных НП. Для выполнения уравнивательных вычислений значения базовых векторов выбираются из электронного протокола работы утилиты “Baselines” программного комплекса “GPSurvey”, либо “Trimble Geomatics Office” и других. В качестве примера в приложении Н представлен вид одного из протоколов обработки реальных измерений, выполненных автором на Самбургском газоконденсатном месторождении в 2003 году. Здесь компоненты базовых векторов (Baseline Components) представлены в системе координат WGS-84.

Точность определения координат определяемых НП можно повысить, если измеренные значения базовых векторов $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$ преобразовать из общеземной системы координат в референцную, то есть получить радиус-векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{\Gamma_i}$. Такое преобразование выполняется по формуле

$$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{\Gamma_i} = \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\omega}) \cdot \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}, \quad (4.14)$$

в которой матрица вращения $\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega})$ координатных осей системы $(OXYZ)_{\Gamma}$ относительно одноименных осей системы $(OXYZ)_G$ определяется по формуле (1.53). После выполненного преобразования (4.14) в уравнительных вычислениях вместо базовых векторов $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}$ следует использовать базовые векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{\Gamma_i}$.

Чтобы определить численные значения углов $\boldsymbol{\omega}$ для района работ, нужно измерить базовые векторы $\Delta\mathbf{R}_{Gj}^0 = [\Delta X_{Gj}^0 \ \Delta Y_{Gj}^0 \ \Delta Z_{Gj}^0]^T$ ($j = 1, 2, \dots, M$; M – число измеренных базовых векторов) между исходными пунктами ГГС. Например, в векторном ходе (рисунок 4.1, б) и в векторной засечке (рисунок 4.2) измеряются базовые векторы $\Delta\mathbf{R}_{G1}^0$, $\Delta\mathbf{R}_{G2}^0$, $\Delta\mathbf{R}_{G3}^0$ и $\Delta\mathbf{R}_{G4}^0$. На основе измеренных базовых векторов формируется система линейных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} &= \Delta\mathbf{R}_{G1}^0 - \Delta\mathbf{R}_{\Gamma1}^0, \\ &\dots \\ \mathbf{D}_j \cdot \boldsymbol{\omega} &= \Delta\mathbf{R}_{Gj}^0 - \Delta\mathbf{R}_{\Gamma j}^0, \\ &\dots \\ \mathbf{D}_M \cdot \boldsymbol{\omega} &= \Delta\mathbf{R}_{GM}^0 - \Delta\mathbf{R}_{\Gamma M}^0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь базовые векторы $\Delta\mathbf{R}_{\Gamma j}^0 = [\Delta X_{\Gamma j}^0 \ \Delta Y_{\Gamma j}^0 \ \Delta Z_{\Gamma j}^0]^T$ вычисляются в референцной системе по пространственным координатам тех исходных пунктов ГГС, между которыми были выполнены относительные ГНСС-измерения

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0 &= \mathbf{R}_{\Gamma 2}^0 - \mathbf{R}_{\Gamma 1}^0, \\ &\dots \\ \Delta \mathbf{R}_{\Gamma M}^0 &= \mathbf{R}_{\Gamma L}^0 - \mathbf{R}_{\Gamma L-1}^0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

а матрицы \mathbf{D}_j составлены из координат измеренных базовых векторов $\Delta \mathbf{R}_{Gj}^0$ и имеют вид

$$\mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z_{Gj}^0 & \Delta Y_{Gj}^0 \\ \Delta Z_{Gj}^0 & 0 & -\Delta X_{Gj}^0 \\ -\Delta Y_{Gj}^0 & \Delta X_{Gj}^0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Из решения системы уравнений (4.15) находится вектор-столбец ω .

Углы ω лучше определять по пяти или шести базовым векторам, измеренным между исходными НП. Если эти углы определять по трем или четырем базовым векторам, то система уравнений (4.15) будет плохо обусловлена, что приведет к большим ошибкам вычисленных значений углов ω . Для улучшения обусловленности этой системы уравнений требуется дополнительно измерить диагональ в четырехугольнике, например: 1–3 (рисунок 4.1, б и в). Лучшие результаты получаются тогда, когда в четырехугольнике дополнительно измерены две диагонали (см. 3.6), например: 1–3 и 2–4 (рисунок 4.1, б и в) [54, 59].

Для уменьшения затрат на производство полевых работ можно не измерять базовые векторы между исходными НП, а использовать замыкающие векторы. В зависимости от сложности района работ применение такого приема может обеспечить значительный экономический эффект. Значения замыкающих векторов определяются путем суммирования измеренных базовых векторов (с учетом их направленности) между исходными и определяемыми НП. Например, для построения векторного хода по схеме 3 (рисунок 4.1, в)

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{R}_{G1}^0 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G1}' - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G1}', & \Delta\mathbf{R}_{G2}^0 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G1}' + \sum_{i=2}^n \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}', \\ \Delta\mathbf{R}_{G3}^0 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gn}' - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gn}', & \Delta\mathbf{R}_{G4}^0 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gn}' + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}',\end{aligned}\quad (4.18)$$

где $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G1}'$, $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gn}'$ – дополнительно измеренные базовые векторы в общеземной системе координат.

Для этого же построения базовые векторы $\Delta\mathbf{R}_{G5}^0$ и $\Delta\mathbf{R}_{G6}^0$ по диагоналям 1–3 и 2–4 четырехугольника вычисляются как

$$\Delta\mathbf{R}_{G5}^0 = \sum_{i=1}^n \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}', \quad \Delta\mathbf{R}_{G6}^0 = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G1}' + \sum_{i=2}^{n-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}' + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gn}'. \quad (4.19)$$

В построении по схеме 2 (рисунок 4.1, б) можно измерить только базовые векторы $\Delta\mathbf{R}_{G1}^0$ и $\Delta\mathbf{R}_{G3}^0$. Базовые векторы $\Delta\mathbf{R}_{G2}^0$, $\Delta\mathbf{R}_{G4}^0$ и базовый вектор $\Delta\mathbf{R}_{G5}^0$ между исходными пунктами 1 и 3 могут быть вычислены как

$$\Delta\mathbf{R}_{G5}^0 = \sum_{i=1}^n \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi}', \quad \Delta\mathbf{R}_{G2}^0 = \Delta\mathbf{R}_{G5}^0 - \Delta\mathbf{R}_{G1}^0, \quad \Delta\mathbf{R}_{G4}^0 = \Delta\mathbf{R}_{G5}^0 + \Delta\mathbf{R}_{G3}^0. \quad (4.20)$$

Если в векторной засечке (рисунок 4.2) измерены базовые векторы только между определяемым и исходными НП, то базовые векторы между исходными НП по ее периметру и по диагоналям вычисляются так же, как и в двух предыдущих случаях.

Рассмотренные методы развития и уравнивания ГСС хорошо зарекомендовали себя с 1998 года при проведении автором топографо-геодезических работ (паспортизация автомобильных и железных дорог, создание ГСС на нефтяных и газовых месторождениях и т.д.). Например, в 2003 г. на Самбургском месторождении газа была создана ГСС, состоящая из 20 пунктов. Относительные ГНСС-измерения выполнялись двухчастотными спутниковыми

приемниками. В качестве рабочего созвездия использовались спутники ГНСС NAVSTAR. Перед началом проведения основных полевых работ проводился анализ исходных геодезических пунктов на предмет их морозного выпирания (см. подраздел 4.4). Всего на этом месторождении было проложено четыре основных векторных хода, опирающихся на четыре пункта ГГС. Длины векторных ходов находились в пределах от 12 до 39 км. Пространственные положения пунктов ГСС были определены в системе координат СК-42. Характеристика точности полученных координат пунктов этой ГСС представлена в таблице 4.1 [81].

Таблица 4.1 – Точности определения координат пунктов в векторных ходах

Номер хода	Число определяемых пунктов	Длина хода (км)	Невязка в превышении F_H (мм)	Относительные ошибки по координатам		
				X	Y	H
1	8	38,9	73	1/499000	1/322000	1/533000
2	4	12,5	28	1/241000	1/447000	1/447000
3	6	19,6	61	1/1630000	1/306000	1/321000
4	2	33,3	63	1/362000	1/2223000	1/529000

Из таблицы 4.1 видно, что высотные отметки пунктов векторных ходов под номерами 1, 3 и 4 по точности соответствуют требованиям нивелирования IV класса, а хода под номером 2 – III класса.

Процесс обработки результатов измерений полностью автоматизирован. Для этого на алгоритмическом языке ПАСКАЛЬ автором составлены соответствующие программы обработки ГНСС-измерений. Описанные выше алгоритмы обработки пространственных векторного хода и векторной засечки реализованы и в вычислительной среде “Microsoft Excel”. Алгоритмы уравнивания в “Microsoft Excel” отличаются своей простотой реализации и наглядностью уравнивательных вычислений, а также возможностью оперативного влияния на ход вычислений.

4.3 Уравнивание геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений

Как уже отмечалось выше, определение координат пунктов с использованием ГНСС-технологий может выполняться либо абсолютным, либо относительным методами. При использовании абсолютного метода спутниковый приемник устанавливается на определяемом НП и выполняет синхронные ГНСС-измерения нескольких КА (не менее четырех). В процессе математической обработки этих измерений вычисляется радиус-вектор определяемого пункта \mathbf{R}_G в той общеземной системе координат $(OXYZ)_G$, в которой задаются пространственные положения навигационных КА используемой для работы ГНСС. В настоящее время для пространственно-временного обеспечения проводимых навигационных и топографо-геодезических работ наиболее активно используется ГНСС NAVSTAR. Пространственное положение спутников этой ГНСС задается в общеземной системе координат WGS-84. Поэтому под общеземной системой в этом подразделе будем понимать систему координат WGS-84. Чтобы получить пространственные координаты НП (радиус-вектор \mathbf{R}_G) в некоторой референцной системе $(OXYZ)_T$ (обычно СК-42), необходимо выполнить матричное преобразование (1.52) геоцентрического радиус-вектора \mathbf{R}_G НП из общеземной системы координат в референцную. Для чего необходимо знать ЭВО референцной системы координат относительно общеземной.

При использовании относительного метода один спутниковый приемник устанавливается на исходном НП, второй – на определяемом. При этом, как правило, пространственное положение исходного НП задается (известно) в референцной системе координат. Если во время одного сеанса относительных ГНСС-измерений одновременно задействовано три и более спутниковых приемника, то время выполнения полевых работ существенно сокращается [65]. В процессе работы приемники синхронно отслеживают несколько спутников ГНСС. После математической обработки результатов ГНСС-измерений определяется вектор-

столбец $\Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1} = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]_{G_i, i+1}^T$ ($i = 1, 2, \dots, n$; n – число измерений) относительного положения (базовый вектор) определяемого НП к исходному НП в системе координат $(OXYZ)_G$. Если бы было известно пространственное положение \mathbf{R}_{G_i} исходного НП в общеземной системе координат, то пространственное положение $\mathbf{R}_{G_{i+1}}$ определяемого НП в этой же системе можно определить по формуле

$$\mathbf{R}_{G_{i+1}} = \mathbf{R}_{G_i} + \Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1}. \quad (4.21)$$

Если будет известно пространственное положение \mathbf{R}_{G_i} исходного НП и вектор $\Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1} = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]_{G_i, i+1}^T$ относительного положения НП в референционной системе координат, то пространственное положение $\mathbf{R}_{G_{i+1}}$ определяемого НП в этой же системе можно найти как

$$\mathbf{R}_{G_{i+1}} = \mathbf{R}_{G_i} + \Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1}. \quad (4.22)$$

Здесь вектор $\Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1}$ определяется из равенства (3.23), которое можно представить также и в таком виде

$$\Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1} = \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\omega}) \cdot \Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1}. \quad (4.23)$$

Перемножив матрицы $\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\omega})$ на вектор $\Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1}$ в формуле (4.23) и выделив при этом вектор $\boldsymbol{\omega}$, запишем следующее матричное выражение вида (3.25) [33, 59]

$$\Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1} = \Delta \mathbf{R}_{G_i, i+1} + \mathbf{D}_4 \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.24)$$

В выражении (4.24) матрица \mathbf{D}_4 составлена из компонент вектора $\Delta \mathbf{R}_G$ и имеет вид аналогичный матрице \mathbf{D}_3 в равенстве (3.27)

$$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z_G & \Delta Y_G \\ \Delta Z_G & 0 & -\Delta X_G \\ -\Delta Y_G & \Delta X_G & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

С учетом выражения (4.22) равенство (4.24) можно записать как

$$\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = \mathbf{D}_4 \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_{\Gamma i+1} - \mathbf{R}_{\Gamma i}. \quad (4.26)$$

При формировании матрицы \mathbf{D}_4 следует учитывать направление вектора $\Delta \mathbf{R}_G$, оно должно совпадать с направлением вектора $\Delta \mathbf{R}_\Gamma$ из выражения (4.22).

Матричное преобразование (4.26) является математической моделью измерений (1.5) и может быть представлено в общем виде

$$\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = \Delta \mathbf{R}_G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}_{\Gamma i}, \mathbf{R}_{\Gamma i+1}). \quad (4.27)$$

Применим к нему процедуру, изложенную в 1.1, то есть разложим его правую часть в ряд Тейлора в малой окрестности априорных значений векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{R}_{\Gamma i}$ и $\mathbf{R}_{\Gamma i+1}$, ограничившись при этом первыми членами разложения. В итоге имеем

$$\Delta \mathbf{R}_{Gi,i+1} = \Delta \mathbf{R}_G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{R}'_{\Gamma i}, \mathbf{R}'_{\Gamma i+1}) + \left. \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{R}_\Gamma=\mathbf{R}'_{\Gamma}}} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} + \left. \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \mathbf{R}_{\Gamma i}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{R}_\Gamma=\mathbf{R}'_{\Gamma}}} \cdot \delta \mathbf{R}_i + \left. \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \mathbf{R}_{\Gamma i+1}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{R}_\Gamma=\mathbf{R}'_{\Gamma}}} \cdot \delta \mathbf{R}_{i+1}, \quad (4.28)$$

где $\boldsymbol{\omega}'$, $\mathbf{R}'_{\Gamma i}$ и $\mathbf{R}'_{\Gamma i+1}$ – априорные значения векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{R}_{\Gamma i}$ и $\mathbf{R}_{\Gamma i+1}$.

Величины $\delta \boldsymbol{\omega}$, $\delta \mathbf{R}_i$ и $\delta \mathbf{R}_{i+1}$ являются поправками к априорным значениям векторов $\boldsymbol{\omega}'$, $\mathbf{R}'_{\Gamma i}$ и $\mathbf{R}'_{\Gamma i+1}$ и определяются как

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}', \quad \delta \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{\Gamma i} - \mathbf{R}'_{\Gamma i}, \quad \delta \mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_{\Gamma i+1} - \mathbf{R}'_{\Gamma i+1}. \quad (4.29)$$

Для нахождения частных производных в выражении (4.28) воспользуемся

равенством (4.26). Можно записать

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{D}_4, \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \mathbf{R}_{\Gamma_i}} = -\mathbf{E}, \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{R}_G}{\partial \mathbf{R}_{\Gamma_{i+1}}} = \mathbf{E}, \quad (4.30)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размерности 3×3 .

Подставив зависимости (4.30) в разложение (4.28), получим

$$\Delta \mathbf{R}_{G_{i,i+1}} = \Delta \mathbf{R}_G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{R}'_{\Gamma_i}, \mathbf{R}'_{\Gamma_{i+1}}) + \mathbf{D}'_4 \cdot \delta \boldsymbol{\omega} - \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{R}_i + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{R}_{i+1}. \quad (4.31)$$

В равенстве (4.31) матрица \mathbf{D}'_4 вычисляется с использованием априорных (приближенных) значений векторов $\Delta \mathbf{R}'_{\Gamma}$ и $\boldsymbol{\omega}'$ по формулам:

$$\mathbf{D}'_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta Z'_G & \Delta Y'_G \\ \Delta Z'_G & 0 & -\Delta X'_G \\ -\Delta Y'_G & \Delta X'_G & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\Delta \mathbf{R}'_{G_{i,i+1}} = \Delta \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{R}'_{\Gamma_i}, \mathbf{R}'_{\Gamma_{i+1}}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}') \cdot \Delta \mathbf{R}'_{\Gamma_{i,i+1}}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}') = \begin{bmatrix} 1 & \omega'_Z & -\omega'_Y \\ -\omega'_Z & 1 & \omega'_X \\ \omega'_Y & -\omega'_X & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Теперь аналогично системе уравнений (1.92) для одного измерения равенство (4.31) можно записать как

$$\mathbf{D}'_4 \cdot \delta \boldsymbol{\omega} - \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{R}_i + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{R}_{i+1} = \Delta \tilde{\mathbf{R}}'_{G_{i,i+1}} - \Delta \mathbf{R}'_{G_{i,i+1}} + \mathbf{V}, \quad (4.35)$$

где $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi,i+1}$ – трехмерный вектор-столбец результатов относительных ГНСС-измерений в общеземной системе координат (измеренный базовый вектор, проекции которого выбираются из протокола работы утилиты “Baselines” программного комплекса “GPSurvey” или “Trimble Geomatics Office” и т. п.);

$\Delta\mathbf{R}'_{Gi,i+1}$ – трехмерный вектор-столбец (вычисленный базовый вектор), определяемый по формуле (4.33) с использованием приближенных значений векторов ω' и $\Delta\mathbf{R}'_{\Gamma i,i+1}$;

\mathbf{V} – трехмерный вектор-столбец поправок к измеренному вектору $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$.

Выражение (4.35) является уравнением поправок, в котором матрицы \mathbf{D}'_4 и \mathbf{E} будут матрицами коэффициентов, векторы $\delta\omega$, $\delta\mathbf{R}_i$ и $\delta\mathbf{R}_{i+1}$ – неизвестными поправками к приближенным (вычисленным) значениям векторов ω' , $\mathbf{R}'_{\Gamma i}$ и $\mathbf{R}'_{\Gamma i+1}$, а разность $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi,i+1} - \Delta\mathbf{R}'_{Gi,i+1}$ – вектором правой части.

Матрицу \mathbf{D}'_4 в формуле (4.32) предпочтительнее формировать из компонент измеренного базового вектора $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$. Это имеет большое значение, так как при решении систем нелинейных уравнений итерационными методами (см. 1.4) более точное значение матрицы коэффициентов линеаризованной системы уравнений согласно выражению (1.131) дает более точное ее решение и приводит к уменьшению числа итераций. В преобладающем числе случаев вектор $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$ известен точнее, чем пространственные положения исходных НП.

Для n относительных ГНСС-измерений уравнение (4.35) образует систему линейных уравнений поправок [83]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_{41} \cdot \delta\omega - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_1 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_2 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G1,2} - \Delta\mathbf{R}'_{G1,2} + \mathbf{V}_1, \\ \mathbf{D}'_{42} \cdot \delta\omega - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_2 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_3 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,3} - \Delta\mathbf{R}'_{G2,3} + \mathbf{V}_2, \\ &\dots \\ \mathbf{D}'_{4n} \cdot \delta\omega - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_{P-1} + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_P &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gn} - \Delta\mathbf{R}'_{Gn} + \mathbf{V}_n, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где p – число определяемых пунктов.

Систему уравнений поправок (4.36) можно представить как СЛАУ (3.1)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{V}. \quad (4.37)$$

В ней матрица коэффициентов \mathbf{A} является блочной матрицей и в общем случае может быть записана как

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{41} & -\mathbf{E} & \mathbf{E} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}'_{42} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \mathbf{D}'_{4n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

где \mathbf{E} – единичная 3×3 матрица;

$\mathbf{0}$ – нулевая 3×3 матрица.

Вектор-столбец неизвестных \mathbf{X} в СЛАУ (4.37) составлен из поправок к приближенным значениям малых углов поворота ω' , координатам определяемых НП \mathbf{R}'_{Γ_i} , $\mathbf{R}'_{\Gamma_{i+1}}$ и имеет вид

$$\mathbf{X}^T = [\delta\omega^T \quad \delta\mathbf{R}_1^T \quad \delta\mathbf{R}_2^T \quad \dots \quad \delta\mathbf{R}_{p-1}^T \quad \delta\mathbf{R}_p^T]. \quad (4.39)$$

Поправки к приближенным значениям малых углов поворота здесь выступают только в роли согласующих параметров. Вектор правой части \mathbf{F} является вектором-столбцом размерности $3 \times n$ и определяется как разность измеренных базовых векторов $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi,i+1}$ и их вычисленных значений $\Delta\mathbf{R}'_{Gi,i+1}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G1,2} - \Delta\mathbf{R}'_{G1,2} \\ \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,3} - \Delta\mathbf{R}'_{G2,3} \\ \dots \\ \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gn} - \Delta\mathbf{R}'_{Gn} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Если за приближенные значения малых углов поворота принять нулевые значения $\omega'=0$, то в равенстве (4.29) будет $\delta\omega=\omega$. Тогда вектор неизвестных (4.39) примет вид

$$\mathbf{X}^T = [\omega^T \quad \delta\mathbf{R}_1^T \quad \delta\mathbf{R}_2^T \quad \dots \quad \delta\mathbf{R}_{P-1}^T \quad \delta\mathbf{R}_P^T]. \quad (4.41)$$

Решение системы линейных уравнений поправок (4.36) выполняется методом последовательных приближений (см. 1.4) до достижения критерия (1.117) для определяемых параметров. Пример формирования системы линейных уравнений поправок при уравнивании геодезических сетей по результатам относительных ГНСС-измерений представлен в приложении П.

Решение задачи, рассмотренное выше, можно выполнить иначе [83]. Сначала из СЛАУ (3.28) определить малые углы поворота ω , а затем уже после решения системы уравнений поправок (4.36) – пространственные положения определяемых НП. При таком подходе данная система уравнений упрощается, так как из нее исключается вектор неизвестных $\delta\omega$. Для определения вектора ω в СЛАУ (3.28) можно применить один из двух приемов. Первый – измерить базовые векторы между опорными НП. Например, векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,1}$, $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,3}$ и $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G3,1}$ (см. рисунок П.1) (приложение П). Но такой подход приводит к увеличению затрат на выполнение полевых работ. Второй – вместо непосредственно измеренных базовых векторов между опорными НП взять замыкающие векторы, полученные из суммы измеренных базовых векторов по векторным ходам, проложенными между опорными и определяемыми НП. Например, базовые векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,1}$,

$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,3}$ и $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G3,1}$ (см. рисунок П.1) (приложение П) могут быть найдены как $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G3,1}$

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,1} &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,4} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G4,6} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G6,1}, \\ \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,3} &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,4} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G4,5} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G3,5}, \\ \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G3,1} &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G3,5} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G5,6} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G6,1}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Следует иметь в виду, что в равенствах (4.42) алгебраическое сложение векторов нужно выполнять с учетом их направленности. На основе измеренных либо вычисленных (как замыкающие векторы) значений базовых векторов формируется СЛАУ (3.28). После ее решения находится вектор ω .

Представленный метод уравнивания дает высокие точности определения координат определяемых НП в геодезических сетях, создаваемых с использованием ГНСС-технологий. Он может применяться при развитии локальных и региональных геодезических сетей сгущения. Для достижения хороших результатов желательно, чтобы геодезические построения содержали в себе не менее 4 исходных НП (см. 3.5) [43, 54, 59]. Соблюдение этого условия приводит к тому, что система линейных уравнений (4.36) будет хорошо обусловлена и мало чувствительна к ошибкам исходных данных: к ошибкам координат исходных пунктов и результатам измерений [53, 61].

С целью уменьшения численных значений поправок \mathbf{V} к измеренным значениям базовых векторов можно по формуле (4.23) измеренные базовые векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1}$ преобразовать из общеземной системы координат в референцную и получить базовые векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{\Gamma i,i+1}$

$$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{\Gamma i,i+1} = \mathbf{R}^T(\omega) \cdot \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1}.\tag{4.43}$$

Затем эти векторы использовать в формулах (4.35), (4.36), (4.38), (4.40) и (П.1 –

П.3) (приложение П) в качестве измеренных, то есть вместо векторов $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{Gi,i+1}$ [83]. В этом случае необходимо предварительно определить вектор-столбец ω малых углов поворота координатных осей, как это было сказано выше. Здесь следует иметь в виду, что определение вектора ω по трем исходным НП дает плохие результаты. Лучше решать эту задачу по четырем исходным НП [53, 61].

В заключение следует отметить, что рассмотренный метод был реализован на основе параметрического способа уравнивания с учетом ошибок исходных данных [108] и хорошо зарекомендовал себя при проведении производственных и научно-исследовательских работ.

4.4 Методика выявления эффекта морозного выпирания пунктов

В процессе развития геодезических сетей различного назначения одним из важных моментов является оперативный выбор надежных пунктов ГГС, которые будут приняты в качестве исходных (опорных). За время проведения полевых топографо-геодезических работ в северных регионах автору встречались пункты ГГС, подвергнутые воздействию морозного выпирания (пучения). Это явление отмечалось только у центров трубчатого типа. Зафиксированное морозное выпирание центров по высоте в основном составляло величину от одного до нескольких дециметров. Однако были встречены два пункта триангуляции также с центрами трубчатого типа, у которых марки возвышались над поверхностью земли на 140 см и 205 см. Отметим, что нормальной можно считать высоту марки над землей около 30 см (согласно требованию по закладке центров типов 5 – 8). При морозном выпирании высотная отметка геодезических центров изменяется значительно сильнее, чем их плановые координаты. Ниже НП, на которые было оказано воздействие морозного выпирания, будем называть мобильными. Пункты, на которые не было оказано воздействие морозного выпирания, будем называть стабильными. Только их и следует принимать в качестве опорных при развитии геодезических сетей различного назначения. В принятых здесь

условных определениях не принимается во внимание проявление каких-либо геотектонических процессов. Заметим, что задача выявления стабильных и мобильных НП в основном решается одновременно с выполнением основных геодезических работ на объекте. Она составляет важный этап работы при создании геодезических сетей и позволяет исключить их искажения, обусловленные эффектом морозного выпирания центров [67, 70].

Во время проведения топографо-геодезических работ для выявления стабильных и мобильных центров желательно применять не одночастотные, а двухчастотные геодезические спутниковые приемники. При этом поставленная задача в конкретных случаях может решаться по-разному. Если НП расположены друг от друга на расстоянии до 15 км, то на каждом из них устанавливаются спутниковые приемники, которые выполняют ГНСС-измерения в режиме “статика”. После обработки этих измерений, например, по программе GPSurvey, вычисляется базовый вектор $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G = [\Delta\tilde{X} \ \Delta\tilde{Y} \ \Delta\tilde{Z}]^T_G$, заданный в общеземной системе координат WGS-84. Затем по координатам этих НП, численные значения которых выбираются из каталогов, рассчитывается этот же базовый вектор $\Delta\mathbf{R}_G = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]^T_G$, но в системе координат СК-42. При этом переход от нормальных высот к геодезическим выполняется по формуле (4.50).

Далее, с использованием ЭВО (только углов ω) координатных систем WGS-84 и СК-42, по формуле (3.25) делается преобразование вычисленного вектора $\Delta\mathbf{R}_G$ в систему координат WGS-84. Обозначим его как $\Delta\mathbf{R}'_G = [\Delta X' \ \Delta Y' \ \Delta Z']^T_G$. Затем векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_G$ и $\Delta\mathbf{R}'_G$ сравниваются. Причем сравниваются не только их координаты, но также и их модули (так как длина любого вектора не зависит от выбранной системы координат). Если различия в этих величинах не превышают заданных пределов (обычно точности выполняемых топографо-геодезических работ в данном районе), то эти НП можно считать стабильными.

Если окажется, что различия между рассматриваемыми векторами превышают допустимые значения, значит один из двух геодезических центров либо они оба подверглись влиянию морозного выпирания. В этом случае

подбирается третий НП, расположенный на расстоянии до 15 км от двух предыдущих. Между ним и двумя ранее рассматриваемыми центрами измеряются два дополнительных базовых вектора. После чего, по описанной выше методике, эти базовые векторы вычисляются, преобразуются в систему координат WGS-84 и сравниваются с их измеренными значениями. Если не удастся подобрать один дополнительный НП, удаленный от двух ранее рассматриваемых на приемлемом расстоянии, то к ним следует подобрать два дополнительных НП по одному для каждого. Такая геометрия порождает также два новых базовых вектора, которые подвергаются анализу. Как показывает практика, только у одного из двух добавленных базовых векторов различия между его вычисленными и измеренными величинами будут превышать установленные допустимые пределы. Этот вектор и определяет мобильный пункт. В реальных условиях проведения геодезических работ для определения мобильных и стабильных центров могут применяться и другие более сложные геометрические построения, состоящие из исходных НП. Заметим, что все эти измерения (не содержащие мобильных НП) могут быть использованы для определения или уточнения ЭВО геодезических систем координат в данном районе.

Автору известны также случаи, когда в каталогах координаты некоторых пунктов ГГС представлены с ошибками (опечатки, многократно проводимый в течение нескольких лет пересчет координат из одной координатной системы в другую и обратно нередко по разным каждый раз программам и др.). Такие пункты также можно отнести к разряду мобильных. Они тоже могут быть выявлены в результате проведения описанного выше анализа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные и практические результаты, полученные в диссертации, заключаются в следующем:

– дано теоретическое обоснование регулярной постановки задачи оценивания параметров состояния нелинейной динамической системы по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников. Раскрыта сущность сингулярных ошибок и показано, что различие между измеряемыми параметрами и псевдопараметрами обусловлено наличием этих ошибок в результатах измерений. Это позволило сформировать общий вид нелинейных и линеаризованных моделей измерений для первичных и вторичных измеряемых псевдопараметров в задаче оценки параметров состояния рассматриваемой нелинейной динамической системы;

– разработаны нелинейные математические модели беззапросных импульсных и фазовых радиодальномерных, интегральных (в локальной и спутниковой шкалах времени) и дифференциальных доплеровских траекторных измерений спутников, которые отвечают уровню точности современных радиотехнических систем;

– получены уравнения поправок с матрицами коэффициентов и вектором правой части для определения расширенного вектора оцениваемых параметров по результатам беззапросных радиотехнических траекторных измерений спутников, что позволяет получать оценки заданного набора определяемых орбитальных и геодезических параметров при различной геометрии взаимного расположения спутника и наземного пункта с точностью, соответствующей точности выполняемых измерений;

– разработана теория и получены экспериментальные значения различий между длиной траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли и прямой наклонной дальностью до спутника. Развита теория и методика учета влияния тропосферной и ионосферной рефракции в результатах беззапросных

радиодальномерных и доплеровских измерениях спутников. Учет этих эффектов в математических моделях измерений позволил повысить степень их адекватности;

– разработана теория учета влияния изменения гравитационного поля Земли на движение спутника по орбите, которая позволяет повысить точность определения параметров движения спутника, и имеет существенное преимущество перед численным методом по эффективности, быстрдействию машинных алгоритмов и надежности получаемых результатов;

– выполнены теоретические и экспериментальные исследования качественных условий наблюдаемости параметров движения спутника, пространственных положений наземных пунктов и параметров вращения Земли, а также количественных условий наблюдаемости элементов взаимного ориентирования в случае радиотехнических траекторных измерений спутников, что повышает степень регулярной постановки измерительной задачи и способствует созданию оптимальных алгоритмов ее решения;

– на основе выполненных экспериментальных исследований определены оптимальные значения высот спутника над горизонтом, при которых в процессе абсолютных спутниковых наблюдений значение высоты наземного пункта находится с максимальной точностью;

– развитая в диссертации теория уравнивания и методы создания плановых и высотных геодезических построений по результатам относительных ГНСС-измерений для определения пространственных положений наземных пунктов в системе координат исходных пунктов, а также экспериментально доказанное положение о том, что эти построения должны содержать в себе не менее четырех исходных геодезических пунктов, позволяет расширить область применения ГНСС-технологий в геодезии и повысить точность определения координат наземных пунктов;

– разработана методика оперативного выявления геодезических пунктов, испытавших влияние эффекта морозного выпирания, которая позволяет сократить производственные затраты на выполнение работ и повысить надежность

создаваемых геодезических построений.

Таким образом, цель диссертационной работы достигнута, поставленные задачи решены. Совокупность теоретических и практических положений, имеющих важное научно-практическое значение, позволяет считать проблему разработки теории и методов определения пространственных координат наземных пунктов по результатам траекторных измерений спутников решенной, что способствует расширению области применения спутниковых технологий в геодезии.

Эффективность теоретических и практических результатов исследований подтверждена в процессе проведения в СГГА фундаментальных НИР и производственных работ. Разработанные в диссертации математические алгоритмы и созданные на их основе алгоритмические программы доведены до практического применения и используются при проведении различных топографо-геодезических работ с помощью ГНСС-технологий. Применение ряда разработанных методов и технологических решений при выполнении этих работ позволило повысить как их качество, так и производительность, что обусловило значительный экономический эффект при их выполнении. Результаты исследований внедрены в производство и в учебный процесс.

Перспективы дальнейшей разработки темы связаны с расширением направлений использования моделей траекторных измерений спутников, а также развитием теории и методов построения и уравнивания пространственных векторных построений.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ГГС – Государственная геодезическая сеть

ГНСС – геодезическая навигационная спутниковая система

ГПЗ – гравитационное поле Земли

ГСС – геодезическая сеть сгущения

ДС – динамическая система

КА – космический аппарат

ЛСВ – локальная система времени

МНК – метод наименьших квадратов

НИР – научно-исследовательская работа

НП – наземный пункт

ОЗЭ – общий земной эллипсоид

ПВЗ – параметры вращения Земли

РТС – радиотехнические системы

РЭ – референц-эллипсоид

СРНС – спутниковая радионавигационная система

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

ССВ – спутниковая система времени

ФЦА – фазовый центр антенны

ЭВО – элементы взаимного ориентирования

ЭМВ – электромагнитная волна

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Абалакин, В. К. Основы эфемеридной астрономии [Текст] / В. К. Абалакин. – М. : Наука, 1979. – 448 с.
- 2 Аксенов, Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли [Текст] / Е. П. Аксенов. – М. : Наука, 1977. – 360 с.
- 3 Антонович, К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии [Текст] / К.М. Антонович. – М. : Картгеоцентр, 2005. – Т. 1. – 334 с.
- 4 Антонович, К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии [Текст] / К.М. Антонович. – М. : Картгеоцентр, 2006. – Т. 2. – 360 с.
- 5 Баняй, Л. Моделирование ошибок доплеровских наблюдений [Текст] / Л. Баняй, Г. Фелше // Наблюдения искусственных спутников Земли: докл. Междунар. науч. конф. / Болгар. Акад. Наук. – София, 1982. – № 20. – С. 358–364.
- 6 Бахшиян, Б. Ц. Определение и коррекция движения. Гарантирующий подход [Текст] / Б. Ц. Бахшиян, Р. Р. Назиров, П. Е. Эльясберг. – М. : Наука, 1980. – 360с.
- 7 Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры [Текст] / Д. В. Беклемишев. – М. : Наука, 1983. – 336 с.
- 8 Бовшин, Н. А. Аналитический способ вычисления изохронных производных в орбитальной методе спутниковой геодезии [Текст] / Н. А. Бовшин. – Томск : ТГУ, 1982. – 12 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 15.02.82, № 70–гд 82.
- 9 Бовшин, Н. А. Аналитический способ вычисления приближённых интегралов орбиты ИСЗ и изохронных производных [Текст] / Н. А. Бовшин // Астрономия и геодезия: сб. науч. тр. – Томск : ТГУ, 1984. – Вып.12. – С. 73–79.
- 10 Бойко, Е. Г. Использование искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей [Текст] / Е. Г. Бойко, Б. П. Кленицкий, И. М. Ландис, Г. А. Устинов. – М. : Недра, 1977. – 376 с.

11 Бойко, Е. Г. Методы совместной обработки локальных наземных и спутниковых геодезических сетей [Текст] / Е. Г. Бойко, В. М. Зимин, М. Г. Годжаманов // Геодезия и картография. – 2000. – № 8. – С. 11–18.

12 Бойков, В. В. Определение координат пунктов космической геодезической сети орбитальным методом [Текст] / В. В. Бойков, Г. А. Устинов // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1969. – № 4. – С. 52–58.

13 Бойков, В. В. О точности определения координат наблюдательных станций по радиальной скорости спутника [Текст] / В. В. Бойков, К. В. Малец // Геодезия и картография. – 1975. – № 9. – С. 17–24.

14 Бойков, В. В. О точности определения координат наблюдательных станций и орбит спутников по измерениям расстояний до ИСЗ [Текст] / В. В. Бойков, И. А. Лутфуллин // Геодезия и картография. – 1975. – № 12. – С. 11–22.

15 Брандин, В. Н. Основы экспериментальной космической баллистики [Текст] / В. Н. Брандин, А. А. Васильев, С. Т. Худяков. – М. : Машиностроение, 1974. – 340 с.

16 Брандин, В. Н. Определение траекторий космических аппаратов. Постановка и анализ задач [Текст] / В. Н. Брандин, Г. Н. Разорёнов. – М. : Машиностроение, 1978. – 216 с.

17 Брандин, В. Н. Экспериментальная баллистика космических аппаратов [Текст] / В. Н. Брандин, А. А. Васильев, А. А. Куницкий. – М. : Машиностроение, 1984. – 264 с.

18 Бузук, В. В. Детальные, локальные и региональные вариации гравитационного потенциала и его характеристики в районах Токтогульского и Саяно-Шушенского водохранилища [Текст] / В. В. Бузук, В. Ф. Канушин, В. И. Дударев // Исследования в области геодезии, фотограмметрии и картографии: сб. науч. тр. – М. : ЦНИИГАиК, 1994. – С. 55–58.

19 Бузук, В. В. Оценка влияния на результаты высокоточного нивелирования вариаций гравитационного потенциала в районе озера Байкал, обусловленных изменением его уровня [Текст] / В. В. Бузук, И. Г. Ганагина, В. И. Дударев //

Итоги 43 научно - техн. конф. СГГА, 1994: сб. науч. тр. – Новосибирск : НИИГАиК, 1995. – Т. 56 (96), ч. 1. – С. 93–98.

20 Бузук, В. В. Технология определения возмущающих полей аномалий высот и силы тяжести в районах крупных водохранилищ и озер, обусловленных динамикой их водных масс [Текст] / В. В. Бузук, В. И. Дударев, В. Ф. Канушин // Вестник СГГА. – 1997. – Вып.2. – С. 89–91.

21 Булыгина, О. М. Использование метода коротких дуг в спутниковой геодезии [Текст] / О. М. Булыгина, Г. Н. Разорёнов // Научные информации: сб. ст. – М. : Астрон. Совет АН СССР, 1978. – № 40. – С. 120–124.

22 Булыгина, О. М. Средства и методы решения геодезических задач по данным доплеровских наблюдений ИСЗ [Текст] / О. М. Булыгина, В. Т. Залуцкий // Научные информации: сб. ст. – М. : Астрон. Совет АН СССР, 1987. – № 62. – С. 18–55.

23 Бурша, М. Основы космической геодезии. Ч.2: Динамическая космическая геодезия [Текст] / М. Бурша. – М. : Недра, 1975. – 280 с.

24 Вейс, Г. Геодезическое использование искусственных спутников Земли [Текст] / Г. Вейс. – М. : Недра, 1967. – 115 с.

25 Воеводин, В. В. Матрицы и вычисления [Текст] / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

26 Волынкин, А. И. Спутниковые радионавигационные системы [Текст] / А. И. Волынкин, П. С. Волосов, И. Н. Мищенко // Зарубежная радиоэлектроника. – 1977. – № 3. – С. 87–127.

27 Герасимов, А. П. Определение высот спутниковыми методами [Текст] / А. П. Герасимов, В. В. Тюлькин // Геодезия и картография. – 2005. – № 4. – С. 20–26.

28 Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ (редакция 5.0) [Текст]. – М. : КНИЦ, 2002. – 57 с.

29 Голубев, А. И. В погоне за точностью: единый эталон времени – частоты – длины [Текст] / А. И. Голубев // Наука и жизнь. – 2009. – № 12. – С. 93 – 99.

30 ГОСТ Р 51794–2008. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек [Текст]: нац. стандарт РФ. – Введ. 18.12.2008 – Стандартинформ, 2009. – 16 с. – (Глобальные навигационные спутниковые системы).

31 Грудинская, Г. П. Распространение радиоволн [Текст] / Г. П. Грудинская. – М. : Высшая школа, 1975. – 280 с.

32 Грушинский, Н. П. Теория фигуры Земли [Текст] / Н. П. Грушинский. – М. : Наука, 1976. – 512 с.

33 Дементьев, Ю. В. К вопросу развития опорных геодезических сетей спутниковыми методами [Текст] / Ю. В. Дементьев // 46 научно-техн. конф. Преподавателей СГГА: тез. докл. – Новосибирск: СГГА, 1996. – Ч.1. – С. 114.

34 Дударев, В. И. Учёт влияния атмосферы Земли в доплеровских траекторных измерениях космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев. – Новосибирск : НИИГАиК, 1989. – 18 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 18.04.89, № 374 – гд 89.

35 Дударев, В. И. Уравнения поправок для обработки результатов доплеровских траекторных измерений космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев. – Новосибирск : НИИГАиК, 1989. – 28 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 26.06.89, № 392 – гд 89.

36 Дударев, В. И. Уравнения поправок для обработки результатов радиодальномерных траекторных измерений космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев. – Новосибирск : НИИГАиК, 1989. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 01.08.89, № 397 – гд 89.

37 Дударев, В. И. Анализ чувствительности систем линейных уравнений поправок к методическим ошибкам матрицы коэффициентов в орбитальном методе космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Алгоритмическое и программное обеспечение теорий движения ИСЗ: тез. докл. – Л. : ИТА АН СССР, 1990. – С. 41–42.

38 Дударев, В. И. Вопросы наблюдаемости в космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // 9 съезд ВАГО при АН СССР, 24 – 28 сентября 1990 г.: тез. докл. –

Новосибирск : НИИГАиК, 1990. – С. 35–36.

39 Дударев, В. И. Математические модели радиотехнических траекторных измерений ИСЗ [Текст] / В. И. Дударев // 9 съезд ВАГО при АН СССР, 24 – 28 сентября 1990 г.: тез. докл. – Новосибирск : НИИГАиК, 1990. – С. 36–37.

40 Дударев, В. И. Постановка задачи оценивания состояния динамической системы [Текст] / В. И. Дударев // Математическая обработка результатов геодезических наблюдений: сб. науч. тр. – Новосибирск : НИИГАиК, 1993. – Т. 51 (91). – С. 19–30.

41 Дударев, В. И. Высокоточные математические модели радиотехнических траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // 46 научно-техн. конф. преподавателей СГГА, 15 – 18 апреля 1996 г.: тез. докл. – Новосибирск : СГГА, 1996. – Ч. 1. – С. 101–102.

42 Дударев, В. И. Влияние методической ошибки расчета матрицы коэффициентов на вектор решения СЛАУ в задаче дифференциального уточнения орбит спутников [Текст] / В. И. Дударев // 46 научно-техн. конф. преподавателей СГГА, 15 – 18 апреля 1996 г.: тез. докл. – Новосибирск : СГГА, 1996. – Ч. 1. – С. 102–103.

43 Дударев, В. И. Некоторые аспекты наблюдаемости элементов взаимного ориентирования геодезических систем координат [Текст] / В. И. Дударев // 46 научно-техн. конф. преподавателей СГГА, 15 – 18 апреля 1996 г.: тез. докл. – Новосибирск : СГГА, 1996. – Ч. 1. – С. 107–108.

44 Дударев, В. И. Условия наблюдаемости в задаче определения параметров вращения Земли по спутниковым данным [Текст] / В. И. Дударев // Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), Институт математики СО РАН, 22 – 27 июня 1998 г.: тез. докл. – Новосибирск : ИМ СО РАН, 1998. – Ч.3. – С. 107.

45 Дударев, В. И. Математические модели радиодальномерных траекторных измерений ИСЗ [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 1998. – Вып.3. – С. 46–48.

46 Дударев, В. И. Вопросы наблюдаемости в космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 1998. – Вып.3. – С. 33–39.

47 Дударев, В. И. Оценивание влияний вариаций гравитационного поля Земли на движение космического аппарата [Текст] / В. И. Дударев // 48 научно-техн. конф. преподавателей СГГА, 13 –24 апреля 1998 г.: тез. докл. – Новосибирск : СГГА, 1998. – С. 21.

48 Дударев, В. И. Условия наблюдаемости в задаче определения параметров вращения Земли по спутниковым данным [Текст] / В. И. Дударев // Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98): сб. ст. – Новосибирск : СГГА, 1999. – С. 18–24.

49 Дударев, В. И. Математические модели доплеровских методов спутниковой радионавигации [Текст] / В. И. Дударев // Судовождение: управляемость, управление, навигация, обучение: сб. науч. тр. – Новосибирск : НГАВТ, 1999. – С. 21–26.

50 Дударев, В. И. Методика учета влияния атмосферной рефракции в радиотехнических траекторных измерениях спутников [Текст] / В. И. Дударев // Междунар. научно-техн. конф., посвященная 220-летию со дня основания МИИГАиК. 220 лет геодезическому образованию в России, 24 – 29 мая, 1999 г.: тез. докл. – М. : МИИГАиК, 1999. – С. 38.

51 Дударев, В. И. Определение некоторых геодезических и геодинамических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев // Междунар. научно-техн. конф., посвященная 220-летию со дня основания МИИГАиК. 220 лет геодезическому образованию в России, 24 – 29 мая, 1999 г.: тез. докл. – М. : МИИГАиК, 1999. – С. 65–66.

52 Дударев, В. И. К вопросу повышения точности определения высот по спутниковым навигационным измерениям [Текст] / В. И. Дударев, И. М. Долганов // 50 научно-техн. конф. преподавателей СГГА, 24 – 28 апреля 2000 г.: тез. докл. – Новосибирск : СГГА, 2000. – С. 29.

53 Дударев, В. И. Влияние ошибок расчета матрицы коэффициентов и вектора правой части на решение СЛАУ в некоторых задачах космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), посвященный памяти М. А. Лаврентьева (1900 – 1980), Институт математики СО РАН: тез. докл. – Новосибирск : ИМ СО РАН, 2000. – Ч. 4. – С. 60.

54 Дударев, В. И. Планирование задач оценивания элементов ориентирования геодезических систем координат [Текст] / В. И. Дударев // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), посвященный памяти М. А. Лаврентьева (1900 – 1980), Институт математики СО РАН: тез. докл. – Новосибирск : ИМ СО РАН, 2000. – Ч. 4. – С. 60–61.

55 Дударев, В. И. Определение некоторых геодезических и геодинамических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев // Междунар. научно-техн. конф., посвящ. 220-летию со дня основания Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК): сб. ст. – М. : МГУГиК, 2000. – С. 3–9.

56 Дударев, В. И. Методика учета влияния атмосферной рефракции в радиотехнических траекторных измерениях спутников [Текст] / В. И. Дударев // Междунар. научно-техн. конф., посвяще. 220-летию со дня основания Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК): сб. ст. – М. : МГУГиК, 2000. – С. 9–17.

57 Дударев, В. И. Математический алгоритм расчета переходной матрицы в задаче определения орбит космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев // 51 научно-техн. конф. преподавателей СГГА, 16 – 19 апреля 2001 г.: тез. докл. – Новосибирск : СГГА, 2001. – С. 55.

58 Дударев, В. И. К вопросу повышения точности определения высот по спутниковым навигационным измерениям [Текст] / В. И. Дударев, И. М. Долганов // Вестник СГГА. – 2001. – Вып.3. – С. 38–40.

59 Дударев, В. И. Планирование задач оценивания элементов

ориентирования геодезических систем координат [Текст] / В. И. Дударев // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000): сб. ст. – Новосибирск : СГГА, 2001. – С. 3–11.

60 Дударев, В. И. Матрица изохронных производных в регулярных элементах [Текст] / В. И. Дударев // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000): сб. ст. – Новосибирск : СГГА, 2001. – С. 12–15.

61 Дударев, В. И. Влияние ошибок расчета матрицы коэффициентов и вектора правой части на решение СЛАУ в некоторых задачах космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2002. – Вып.7. – С. 21–25.

62 Дударев, В. И. Математический алгоритм расчета переходной матрицы в задаче определения орбит космических аппаратов [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2002. – С. 17–21.

63 Дударев, В. И. Опыт выполнения топографических съемок с применением спутниковых приемников [Текст] / В. И. Дударев // Сб. материалов 53 Междунар. научно-техн. конф. – Новосибирск : СГГА, 2003. – Ч. 3. – С. 265–267.

64 Дударев, В. И. Некоторые аспекты построения и уравнивания геодезических сетей сгущения с использованием GPS-технологий [Текст] / В. И. Дударев // Сб. материалов 53 Междунар. научно-техн. конф. – Новосибирск : СГГА, 2003. – Ч. 3. – С. 268–269.

65 Дударев, В. И. Построение геодезических съемочных сетей в районах Крайнего Севера с использованием спутниковых приемников [Текст] / В. И. Дударев, В. А. Середович // Вестник СГГА. – 2005. – Вып. 10. – С. 58–61.

66 Дударев, В. И. Определение местоположения недоступных объектов при проведении топографических съемок с помощью GPS-технологий [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2005. – Вып.10. – С. 66–69.

67 Дударев, В. И. Выявление стабильных и мобильных пунктов Государственной геодезической сети в северных регионах [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2005. – Вып.10. – С. 70–72.

68 Дударев, В. И. Построение пространственной векторной засечки [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2006: сб. материалов Междунар. науч. конгр. – Новосибирск : СГГА, 2006. – Т.1, ч. 1. – С. 119–120.

69 Дударев, В. И. Уравнивание пространственного векторного хода [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия, картография, кадастр в освоении природных ресурсов Байкальского региона: материалы 2-й региональной научно-произв. конф. – Иркутск : ИрГТУ, 2006. – С. 41–44.

70 Дударев, В. И. Создание геодезической сети сгущения на территории Самбургского газового месторождения с использованием GPS-технологий [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2007: сб. материалов III Междунар. науч. конгр. – Новосибирск : СГГА, 2007 – Т.1, ч. 1. – С. 139– 141.

71 Дударев, В. И. Математические модели доплеровских траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2008. – № 2. – С. 76–77.

72 Дударев, В. И. К вопросу расчета аномалии высоты при GPS-определениях пространственных координат точек [Текст] / В. И. Дударев, Г. А. Панаев // Геодезия и картография. – 2008. – № 2. – С. 78.

73 Дударев, В. И. Математические модели беззапросных радиодальномерных траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2008. – № 6. – С. 53–54.

74 Дударев, В. И. Оценка состояния динамической системы по результатам радиодальномерных траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2009. – № 5. – С. 17–21.

75 Дударев, В. И. Поправка в дальность за кривизну траектории распространения радиосигнала в тропосфере Земли [Текст] / В. И. Дударев // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2009. – № 6. – С. 37–39.

76 Дударев, В. И. Формирование вектора правой части уравнений поправок для обработки результатов радиотехнических траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2010. –

№ 3. – С. 46–48.

77 Дударев, В. И. Классификация систем координат, применяемых в космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2010: сб. материалов VI Междунар. науч. конгр. – Новосибирск : СГГА, 2010. – Т. 1, ч. 1. – С. 145–150.

78 Дударев, В. И. Преобразование основных систем координат, применяемых в космической геодезии [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2010: сб. материалов VI Междунар. науч. конгр. – Новосибирск : СГГА, 2010. – Т. 1, ч. 1. – С.135–144.

79 Дударев, В. И. Дифференциальный и интегральный методы доплеровских спутниковых наблюдений [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2010. – № 6. – С. 12–16.

80 Дударев, В. И. Оценка состояния динамической системы по результатам доплеровских траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2010. – № 7. – С. 6–10.

81 Дударев, В. И. Развитие геодезических сетей пространственными векторными построениями [Текст] / В. И. Дударев // Геодезия и картография. – 2010. – № 8. – С. 4–8.

82 Дударев, В. И. Сингулярный анализ решения некоторых задач спутниковой геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2010. – Вып. 1 (12). – С. 35–43.

83 Дударев, В. И. Уравнивание геодезических сетей по результатам относительных GPS-измерений [Текст] / В. И. Дударев // ГЕО-Сибирь-2011: сб. материалов VII Междунар. науч. конгр. – Новосибирск : СГГА, 2011. – Т. 1, ч. 1. – С. 108–116.

84 Дударев, В. И. Оценка относительной ошибки матрицы изохронных производных [Текст] / В. И. Дударев // Вестник СГГА. – 2011. – Вып.1 (14). – С. 7–16.

85 Дударев, В. И. Оценка влияния изменения гравитационного поля Земли на движение спутника [Текст] / В. И. Дударев // Известия ВУЗов. Геодезия и

аэрофотосъемка. – 2012. – № 2. – С. 8–13.

86 Дударев, В. И. Поправка за кривизну траектории радиосигнала в тропосфере [Текст] / В. И. Дударев // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2012: сб. материалов VIII Междунар. науч. конгр. – Новосибирск : СГГА, 2012. – Т. 4 – С. 187–191.

87 Дударев, В. И. Оценка параметров состояния нелинейных динамических систем в спутниковой геодезии [Текст] / В. И. Дударев // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4/С. – С. 8–13.

88 Дударев, В. И. Уравнения поправок для определения геодезических параметров по результатам радиотехнических траекторных измерений спутников [Текст] / В. И. Дударев // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 4/С. – С. 13–18.

89 Дэннис, Д. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений [Текст] / Д. Дэннис, Р. Шнабель. – М. : Мир, 1988. – 440 с.

90 Жданюк, Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений [Текст] / Б. Ф. Жданюк. – М. : Советское радио, 1978. – 384 с.

91 Изотов, А. А. Основы спутниковой геодезии [Текст] / А. А. Изотов, В. И. Зубинский, Н. Л. Макаренко. – М. : Недра, 1974. – 320 с.

92 Использование искусственных спутников для геодезии [Текст] / Под ред. С. Хенриксена, А. Манчини, Б. Човица. – М. : Мир, 1975. – 432 с.

93 Исследование точности определения координат наземных пунктов орбитальным методом. Построение траектории ИСЗ [Текст]: отчёт о НИР / НИИГАиК; рук. Сурнин Ю. В.; исполн. Сурнин Ю. В. [и др.]. – Новосибирск, 1974. – 154 с. – № ГР 73042373. – Инв. № Б412260.

94 Исследование динамической составляющей гравитационного потенциала Земли и его характеристик, построение их математических моделей [Текст]: отчет о НИР (промежуточный) / СГГА; рук. Бузук В. В.; исполн. Артемьева Н. П. [и др.]. – Новосибирск, 1996. – 48 с. – № ГР 0196.0005075. – Инв. № 0297.0000884.

95 Исследование динамической составляющей гравитационного потенциала

Земли и его характеристик, построение их математических моделей [Текст]: отчет о НИР (заключительный) / СГГА; рук. Бузук В. В.; исполн. Артемьева Н. П. [и др.]. – Новосибирск, 1997. – 107 с. – № ГР 0196.0005075.

96 Капустин, В. А. Об оценках качества построения геодезических сетей [Текст] / В. А. Капустин // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1986. – № 3. – С. 14–18.

97 Карский, Г. К обработке разнородных наблюдений спутников в локальной сети [Текст] / Г. Карский // Наблюдения искусственных небесных тел: публикации науч. рез. сотрудн. ИНТЕРКОСМОС. – М. : Астрон. Совет АН СССР, 1976. – № 15. – С. 294–304.

98 Каула, У. Спутниковая геодезия [Текст] / У. Каула. – М. : Мир, 1970. – 172 с.

99 Колосов, М. А. Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса [Текст] / М. А. Колосов, А. В. Шабельников. – М. : Советское радио, 1976. – 220 с.

100 Космическая геодезия [Текст] / В. Н. Баранов, Е. Г. Бойко, И. И. Краснорылов, М. М. Машимов и др. – М. : Недра, 1986. – 407 с.

101 Краснорылов, И. И. Основы космической геодезии [Текст] / И. И. Краснорылов, И. В. Плахов. – М. : Недра, 1976. – 216 с.

102 Кужелев, С. В. Вычисление частных производных регулярных элементов эллиптической орбиты ИСЗ по параметрам правых частей уравнений движения на основе экстраполяционного метода численного интегрирования [Текст] / С. В. Кужелев. – Новосибирск : НИИГАиК, 1982. – 30 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.08.82, № 91 – гд 82.

103 Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа [Текст] / К. Ланцош ; пер. с англ. М.З. Кайнера. – М. : Физматлит, 1961. – 524 с.

104 Лоусон, Ч. Численное решение задач метода наименьших квадратов [Текст] / Ч. Лоусон, Р. Хенсон; пер. с англ. Х. Д. Икрамова. – М. : Наука, 1986. – 232 с.

105 Лямпарски, Я. Некоторые проблемы измерения времени при доплеровских наблюдениях [Текст] / Я. Лямпарски // Наблюдения искусственных

спутников Земли: труды Междунар. симпоз. – Варшава : Польская АН, 1979. – № 18. – С. 429–434.

106 Малец, К. В. Оптимизация наблюдений искусственных спутников Земли для повышения точности определения положения наблюдательной станции [Текст] К. В. Малец, А. А. Бовшин // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1979. – № 5. – С. 40–43.

107 Маррей, К. Э. Векторная астрометрия [Текст] / К. Э. Маррей; пер. с англ. Я. С. Яцкива. – Киев : Наукова думка, 1986. – 328 с.

108 Маркузе, Ю. И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ [Текст] / Ю. И. Маркузе. – М. : Недра, 1989. – 248 с.

109 Маркузе, Ю. И. Вычисление и уравнивание геодезических сетей [Текст] / Ю. И. Маркузе, Е. Г. Бойко, В. В. Голубев. – М. : Геодезиздат, 1994. – 426 с.

110 Маркузе, Ю. И. Два алгоритма объединения наземных и спутниковых геодезических сетей [Текст] / Ю. И. Маркузе, Welsch Walter Maria // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1995. – № 2. – С. 45–64.

111 Маркузе, Ю. И. Возможности улучшения алгоритма объединения спутниковых и наземных сетей [Текст] / Ю. И. Маркузе, А. В. Антипов // Геодезия и картография. – 2004. – № 4. – С. 16–21.

112 Маслов, А. В. Геодезия [Текст] / А. В. Маслов, А. В. Гордеев, Н. Н. Александров. – М. : Недра, 1972. – 528 с.

113 Машимов, М. М. Уравнивание геодезических сетей [Текст] / М. М. Машимов. – М. : Недра, 1979. – 367 с.

114 Медведев, П. П. Методы и результаты спутниковой геодезии [Текст] / П. П. Медведев // Итоги науки и техники. Геодезия и аэрофотосъёмка. – М. : ВИНТИ, 1980. – Т. 16. – 112 с.

115 Михай, С. Точность уравнений ошибок доплеровских наблюдений [Текст] / С. Михай // Наблюдения искусственных спутников Земли: труды Междунар. симпоз. – Варшава : Польская АН, 1979. – № 18. – С. 395–410.

116 Мищенко, И. Н. Глобальная навигационная система НАВСТАР [Текст] /

И. Н. Мищенко, А. И. Волынкин, П. С. Волосов // Зарубежная радиоэлектроника. – 1980. – № 8. – С. 52–83.

117 Молчанов, И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций [Текст] / И. Н. Молчанов. – Киев : Наукова думка, 1987. – 288 с.

118 Назиров, Р. Р. К вопросу использования априорной информации при обработке данных высокоточных наблюдений ИСЗ [Текст] : препринт / Р. Р. Назиров, П. Е. Эльясберг. – М. : ИКИ АН СССР, 1983. – № 795. – 24 с.

119 Назиров, Р. Р. Методика совместной обработки результатов определений движения ИСЗ по почти круговым орбитам [Текст] : препринт / Р. Р. Назиров, А. А. Тихонов. – М. : ИКИ АН СССР, 1983. – № 796. – 36 с.

120 Насретдинов, К. К. Оценка точности положения и скорости спутника [Текст] / К. К. Насретдинов // Геодезия и картография. – 1982. – № 11. – С. 15–18.

121 Неволько, М. П. Методы повышения точности навигационных определений приземных объектов при использовании спутниковой навигационной системы [Текст] / М. П. Неволько, С. Д. Сильвестров, В. А. Архангельский // Космические исследования. – 1985. – Т. 23, вып. 6. – С. 820–828.

122 Оньков, И. В. Наблюдаемость начальных условий движения искусственного спутника планеты по измерениям радиальной скорости [Текст] / И. В. Оньков // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1981. – № 3. – С. 50–54.

123 Оньков, И. В. Наблюдаемость начальных условий движения искусственного спутника Земли по измерениям дальности [Текст] / И. В. Оньков // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1981. – № 4. – С. 64–68.

124 Олянюк, П. В. Оптимальный приём радиосигналов и оценка потенциальной точности космических измерительных комплексов [Текст] / П. В. Олянюк. – М. : Советское радио, 1973. – 184 с.

125 Остроумов, В. З. Высотная основа уровенных постов: геодезический аспект [Текст] / В.З. Остроумов, Г. А. Шануров, В. И. Епишин // Геодезия и картография. – 2006. – № 11. – С. 37–39.

126 Панаев, Г. А. Построение моделей геоида с использованием геодезических спутниковых технологий и нивелирования [Текст] / Г. А. Панаев // Геодезия и картография. – 1998. – № 1. – С. 17–21.

127 Панкрушин, В. К. Системный подход к автоматизации обработки и интерпретации результатов наблюдений [Текст] / В. К. Панкрушин // Системные исследования в геодезии: сб. науч. тр. – Новосибирск : НИИГАиК, 1984. – Т. 23 (63). – С. 5–15.

128 Петрова, Н. Вывод начальных условий орбиты ИСЗ при помощи наблюдений в коротких интервалах времени посредством уравнивания по методу наименьших квадратов [Текст] / Н. Петрова, И. Тренков // Наблюдения искусственных спутников Земли: доклады Междунар. науч. конф. – София : Польская АН, 1982. – № 20. – С. 58–67.

129 Подобед, В. В. Общая астрометрия [Текст] / В. В. Подобед, В. В. Нестеров. – М. : Наука, 1975. – 552 с.

130 Приказчиков, С. Б. О необходимости создания региональных карт высотных аномалий [Текст] / С. Б. Приказчиков // Геодезия и картография. – 2004. – № 9. – С. 26–27.

131 Разработка методов изучения динамики гравитационного поля и фигуры Земли планетарного, регионального и локального характера [Текст]: отчет о НИР (промежуточный) / НИИГАиК; рук. Бузук В. В.; исполн. Бузук В. В. [и др.]. – Новосибирск, 1990. – 89 с. – № ГР 0186.0036274. – Инв. № 0291.0038442.

132 Разработка методов изучения динамики гравитационного поля и фигуры Земли планетарного, регионального и локального характера [Текст]: отчет о НИР (промежуточный) / НИИГАиК; рук. Бузук В. В.; исполн. Ганагина И. Г. [и др.]. – Новосибирск, 1992. – 155 с. – № ГР 0186.0036274; Инв. № 0293.0005083.

133 Разработка методов изучения динамики гравитационного поля и фигуры Земли планетарного, регионального и локального характера. Атлас картосхем возмущающих полей аномалий высот и силы тяжести в районах крупных водоемов Европы, обусловленных динамикой их водных масс [Текст]: отчет о

НИР / СГГА; рук. Бузук В. В.; исполн. Артемьева Н. П. [и др.]. – Новосибирск, 1995. – 229 с. – № ГР 0186.0036274. – Инв. № 0296.0003477.

134 Разработка теории и методов определения геодезических и геодинамических параметров по результатам спутниковых радиотехнических траекторных измерений [Текст]: отчет о НИР / СГГА; рук. Дударев В. И.; исполн. Дударев В. И. – Новосибирск, 2010. – 69 с. – № ГР 012008.03158. – Инв. № 02201154312.

135 Разработка теории и методологии формирования уравнений измерений применительно к современным методам радиотехнических траекторных наблюдений космических аппаратов при оценке состояния нелинейных динамических систем [Текст]: отчет о НИР (заключительный) / СГГА; рук. Дударев В. И.; исполн. Дударев В. И. – Новосибирск, 2011. – 56 с. – № ГР 012011.51296. – Инв. № 02201256726.

136 Селиханович, В. Г. Геодезия [Текст]: учебник / В. Г. Селиханович. – 2-е изд., стереотип. – М. : Альянс, 2006. – 544 с.

137 Справочное руководство по небесной механике и астродинамике [Текст] / В. К. Абалакин, Е.П.Аксёнов, Е. А. Гребеников и др. – М. : Наука, 1976. – 864 с.

138 Стандартная Земля [Текст] / под ред. К. Лунквиста., Г. Вейса. – М. : Мир, 1969. – 277 с.

139 Сурнин, Ю. В. Программа прогнозирования движения геодезических искусственных спутников Земли [Текст] / Ю. В. Сурнин, С. В. Кужелев, В. А. Ащеулов // Наблюдения искусственных спутников Земли: сб. науч. тр. – София : Польская АН, 1979. – № 16. – С. 157–174.

140 Сурнин, Ю. В. Оценка сравнительной эффективности численных алгоритмов построения спутниковых траекторий [Текст] / Ю. В. Сурнин, С. В. Кужелев // Астрономия и геодезия: сб. науч. тр. – Томск : ТГУ, 1984. – №12. – С. 18–26.

141 Сурнин, Ю. В. Задача определения орбит геодезических ИСЗ и методы расчёта изохронных производных [Текст] / Ю. В. Сурнин, С. В. Кужелев,

В. И. Дударев. – Новосибирск : НИИГАиК, 1986. – 22 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 24.03.86, № 203 – гд 86.

142 Сурнин, Ю. В. Математическая модель движения геодезических спутников Земли [Текст] / Ю. В. Сурин, С. В. Кужелев, А. М. Токарев. – Новосибирск : НИИГАиК, 1988. – 44 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 18.01.88, № 297 – гд 88.

143 Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.

144 Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения [Текст] / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильев, А. Г. Свешников. – М. : Наука, 1980. – 232 с.

145 Тищенко, А. П. Геометрические методы космической геодезии [Текст] / А. П. Тищенко. – М. : Наука, 1971. – 112 с.

146 Урмаев, М. С. Орбитальные методы космической геодезии [Текст] / М. С. Урмаев. – М. : Недра, 1981. – 256 с.

147 Урмаев, М. С. Космическая фотограмметрия. [Текст] / М. С. Урмаев. – М. : Недра, 1989. – 279 с.

148 Устинов, Г. А. Использование коротких дуг в космической триангуляции [Текст] / Г. А. Устинов, Д. И. Капилевич // Геодезия и картография. – 1981. – № 4. – С. 30–32.

149 Фалькович, С. Е. О наблюдаемости в задаче взаимной геодезической привязки разнесённых пунктов многопозиционных измерительных комплексов [Текст] / С. Е. Фалькович, Л. Н. Коновалов, А. А. Жалило // Космические исследования. – 1985. – Т. 23, вып.4. – С. 587–597.

150 Форсайт, Д. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений [Текст] / Д. Форсайт, К. Молер; пер. с англ. В. П. Ильина, Ю. И. Кузнецова. – М. : Мир, 1969. – 166 с.

151 Форсайт, Д. Машинные методы математических вычислений [Текст] / Д. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер; пер.с англ. Х. Д. Икрамова. – М. : Мир, 1980. – 279 с.

152 Халмлош, Ф. Применение радиотехнических (доплеровских) методов наблюдения ИСЗ для решения геометрических и динамических задач космической геодезии [Текст] / Ф. Халмлош, Н. Адам, И. Фейеш // Наблюдения искусственных небесных тел: публикации науч. рез. сотрудн. ИНТЕРКОСМОС. – М. : Астрон. Совет АН СССР, 1976. – № 15. – С. 85–134.

153 Хорошавцев, В. Г. Расчёт частных производных от характеристик движения по начальным условиям [Текст] / В. Г. Хорошавцев / Космические исследования. – 1965. – Т. 3, вып. 4. – С. 374–380.

154 Хорн, Р. Матричный анализ [Текст] / Р. Хорн, Ч. Джонсон; пер. с англ. Х. Д. Икрамова, А. В. Князева, Е. Е. Тырышникова. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

155 Цюпак, И. М. Об использовании метода вариаций при дифференциальном уточнении орбит ИСЗ [Текст] / И. М. Цюпак. – Львов : ЛПИ, 1984. – 15 с. – Деп. в УкрНИИТИ 12.04.84, № 659 – Ук 84.

156 Чарный, В. И. Об изохронных производных [Текст] / В. И. Чарный // Искусственные спутники Земли: сб. науч. тр. – М. : АН СССР, 1963. – № 16. – С. 65–79.

157 Черницов, А. М. Об эффективности применения аналогов метода Ньютона при уточнении параметров орбит [Текст] / А. М. Черницов, С. С. Краев // Бюллетень института теоретической астрономии: сб. науч. тр. – М. : ИТА АН СССР, 1984. – Т. 15, 6(169). – С. 342–346.

158 Чернявский, Г. М. Орбиты спутников связи [Текст] / Г. М. Чернявский, В. А. Бартнев. – М. : Связь, 1978. – 240 с.

159 Чуров, Е. П. Спутниковые системы радионавигации [Текст] / Е. П. Чуров. – М. : Советское радио, 1977. – 392 с.

160 Шануров, Г. А. Об оценке точности геодезических сети, созданной сочетанием космических и наземных методов измерений [Текст] / Г. А. Шануров // Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2002. – № 4. – С. 12–21.

161 Шибшаевич, В. С. Сетевые спутниковые радионавигационные системы [Текст] / В. С. Шибшаевич, П. П. Дмитриев, Н. В. Иванцевич . – М. : Радио и

связь, 1982. – 272 с.

162 Эберт, Г. Краткий справочник по физике [Текст] / Г. Эберт; пер. с англ. К. П. Яковлева. – М. : Физматгиз, 1963. – 552 с.

163 Эльясберг, П. Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли [Текст] / П. Е. Эльясберг. – М. : Наука, 1965. – 539 с.

164 Эльясберг, П. Е. Определение движения по результатам измерений [Текст] / П. Е. Эльясберг. – М. : Наука, 1976. – 416 с.

165 Эскобал, П. Методы определения орбит [Текст] / П. Эскобал. – М. : Мир, 1970. – 471 с.

166 Вълев, Г. Оптимални конфигурации при доплерови определения на единични положения чрез спътници [Текст] / Г. Вълев, Д. Жеков // Геодезия, землеустройство: годишник. – София : ВИАС, 1983. – Т. 31, св.3. – С. 27–37.

167 Георгиев, И. Аналитичен начин за пресмятане матрицата и изохронните производни при орбитален метод чрез степенни редове по регулизирано време [Текст] / И. Георгиев, В. Коцев // Висша геодезия. – 1986. – № 12. – С. 24–29.

168 Baldi, P. Geodetic positioning by satellite Doppler observations [Text] / P. Baldi, P. Gasperini, S. Zerbini // Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata. – 1985. – V. 27. – № 108. – P. 295–301.

169 Beck, N. Preliminary results on the use of differential GPS positioning for geodetic applications [Text] / N. Beck, D. Delikaraoglou, K. Lochhead, D. J. Mc Arthur, G. Lachapelle // IEEE. Position location and navigation symposium, San Diego, November 26 – 29, 1984. – 1984. – P. 163–168.

170 Black, H. D. An easily implemented algorithm for tropospheric range correction [Text] / H. D. Black / Journal of Geophysical Research. – 1978. – V. 83 (B4). – P. 1825–1828.

171 Brogan, W. L. Improvements and extension of the geometrical dilution of precision concept for selecting navigation measurements [Text] / W. L. Brogan // IEEE. Position location and navigation symposium. – 1982. – P. 27–32.

172 Cassini, J. D. Ephemerides novissimae motium coelestium marchionis

cornelii malvasiae ab A. 1661 ad 1666. Additis epheridibus solis et tabulis refractionum ex hypothesibus [Text] / J. D. Cassini. – Mutinae, 1662.

173 Cefola, P. On the formulation of the gravitational potential in terms of equinoctial variables [Text] / P. Cefola, R. Broucke // AIAA Pap. – 1975. – № 9. – P. 1–25.

174 Chen, J. Y. Geodetic datum and Doppler positioning [Text] / J. Y. Chen // Mitt. geod. Inst. Techn. Univ. Graz. – 1982. – № 39. – 255 p.

175 Collins, S. K. Computationally efficient modelling for long term prediction of Global Positioning System orbits [Text] / S. K. Collins, P. J. Cefola // The Journal of the Astronautical Sciences. – 1978. – V. 26. – № 4. – P. 293–314.

176 Czobor, A. Preliminary results of Finnish-Hungarian Doppler observation campaign [Text] / A. Czobor, J. Adam, S. Mihaly, T. Vass // Publ. Astron. Inst. Czechosl. Acad. Scin. – 1984. – N 58. – P. 529–548.

177 Fejes, I. Interferometric approach in the NNSS data processing [Text] / I. Fejes, S. Mihaly // Acta Astronautica. – 1985. – V. 12. – № 6. – P. 447–453.

178 Ferencz, C. Refraction problems and wave propagation in Doppler geodetical measurements [Text] / C. Ferencz, I. Ferencz, G. Tarcsai // Наблюдения искусственных спутников Земли: доклады Междунар. науч. конф. / Польская АН. – Варшава, 1970. – № 9. – С. 361–374.

179 Frits, J. J. On the principles, assumptions and methods of geodetic very long baseline interferometry [Text] / J. J. Frits // Netherlands Geodetic Commission: Publications on geodesy. – 1985. – V. 7, № 4. – 180 p.

180 Gendt, G. The program system POTSDAM-4 for differential improvement of orbital elements and other parameters [Text] / G. Gendt, H. Montag // 23 Plenary Meeting of COSPAR Technical Panel on Dynamics of Artificial Satellites and Space Problems, Budapest, June 1980/Akademie der Wissenschaften der DDR. – Potsdam. – 1980. – 22 p.

181 Grafarend, E. Rank defect analysis of satellite geodetic Networks 2. Dynamic mode [Text] / E. Grafarend, K. Heinz // Manuscripta geodaetica. – 1978. – V. 3. – № 2 – 3. – P. 135–156.

182 Hopfieldt, H. S. Tropospheric effects on electromagnetically measured range: prediction from surface weather data [Text] / H. S. Hopfieldt // Radio Science. – 1971. – V.6. – № 3. – P. 357–367.

183 Hopfieldt, H. S. Tropospheric refraction effects on satellite range measurements [Текст] / H. S. Hopfieldt // APL Tech. Dig. – 1972. – V. 11 (4). – P. 11 – 19.

184 Hothem, L. D. Doppler satellite surveying system [Text] / L. D. Hothem, W. E. Strange, M. White // Journal the surveying and mapping division. – 1978. – V. 104. – № 1. – P. 79–91.

185 Kepler, J. Ad vitellionen paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur. [Text] / J. Kepler // Francofurt, 1604.

186 Kouba, J. A. A review of geodetic and geodynamic satellite doppler positioning [Text] / J. A. Kouba // Reviews of Geophysics and Space Physics. – 1983. – V. 21. – № 1. – P. 27–40.

187 Mader, G. L. Dynamic positioning using GPS carrier phase measurements [Text] / G. L. Mader // Manuscripta geodaetica. – 1986. – № 11. – P. 272–277.

188 Munck, J. C. Ionospheric correction for (pseudorange) range measurement to satellites [Text] / J. C. Munck // Proceedings of the General Meeting of the IAG, Tokyo, May 7 – 15, 1982. – Kyoto, 1982. – P. 553–561.

189 Newton, R. Mesures de la frequence doppler dans les transmissions satellite et leurs emplois en geodesie geometrique [Text] / R. Newton // Symposium sur organisation d un Resean Geodesique Europeen par Observation des Satellites Artificiels, Paris, December 14 – 16, 1964. – Paris, 1965. – P. 178–185.

190 Saastamoinen, J. J. Contribution to the theory of atmospheric refraction [Text] / J. J. Saastamoinen // Bulletin Geodesique. – 1973. – № 107. – P. 13–34.

191 Schluter, W. Mathematisches modell zur auswertung von auswertung von dopplermessungen [Text] / W. Schluter, P. Pesec // Veroffentlichungen Deutsche geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. – 1982. – № 210 (B). – P. 37–54.

192 Stansell, T. A. The continuing evaluation of satellite-based geodetic positioning

and survey navigation capabilities [Text] / T. A. Stansell // Offshore Technology Conference, Houston, May 4 – 7, 1981. – Dallas, 1981. – V. 4. – P. 405–416.

193 Tarcsai, G. Relativistic effects and optimization in doppler geodetical measurements [Текст] / G. Tarcsai, P. Horvath // Наблюдения искусственных спутников Земли. Сб. науч. тр. / Польская АН. – Варшава, 1969. – № 9. – С. 375–383.

194 Teunissen, P. J. G. GPS for geodesy [Text] / P. J. G. Teunissen, Y. Bock, G. Beutler. – Berlin: Springer, 1998. – 650 p.

195 Velez, C. E. Calculation of precision satellite orbits with nonsingular elements (VOP formulation) [Text] / C. E. Velez, P. J. Cefola, A. C. Long, K. S. Nimitz // Lecture Notes in Math., Springer Verlag. – 1974. – V. 362. – P. 183–205.

196 Wells, D. E. Doppler satellite control [Text] / D. E. Wells // Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, September, 1974. – New Brunswick, 1974. – № 29.

197 Smith, C. A. Sensitivity of GPS acquisition to initial data uncertainties [Text] / C. A. Smith, K.W. Graves // Navigation: Journal of the Institute of Navigation. – 2001. – V. 31. – № 3. – P. 220–232.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(рекомендуемое)

КЛАССИФИКАЦИЯ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ

Таблица А.1 – Название и классификационные признаки координатных систем

Классификационный признак системы координат	Наименование	Описание классификационного признака	Пример обозначения
Вид	Прямоугольная	Определяется направлением нормали к основной координатной плоскости.	x, y, z X, Y, Z
	Сферическая	Определяется направлением нормали к поверхности сферы.	α, δ, ρ
	Сфероидическая (эллипсоидальная, геодезическая)	Определяется направлением нормали к поверхности эллипсоида.	Φ, λ, R B, L, H
	Астрономическая	Определяется направлением нормали к поверхности геоида.	φ, λ, H'
	Цилиндрическая	Определяется направлением нормали к поверхности цилиндра.	ρ, φ, z
Расположение начала отсчета	Геоцентрическая	Начало координат расположено в центре масс Земли.	x, y, z X, Y, Z
	Квазигеоцентрическая (референцная)	Начало координат расположено вблизи центра масс Земли.	X_G, Y_G, Z_G
	Топоцентрическая	Начало координат расположено на поверхности Земли.	$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$
	Селеноцентрическая	Начало координат расположено в центре масс Луны.	$\bar{\alpha}, \bar{\delta}, \bar{\rho}$ x_c, y_c, z_c
	Барицентрическая	Начало координат расположено в барицентре (центре масс образования Земля-Луна).	x_b, y_b, z_b
Ориентировка основной координатной плоскости	Экваториальная	За основную координатную плоскость принимается плоскость экватора или плоскость, параллельная ей.	x, y, z α, δ, ρ
	Горизонтальная (горизонтная)	За основную координатную плоскость принимается плоскость горизонта или плоскость, параллельная ей.	A, h, ρ X_H, Y_H, Z_H x_H, y_H, z_H
	Орбитальная	За основную координатную плоскость принимается плоскость орбиты или плоскость, параллельная ей.	ξ, η, ζ u, w, ρ
	Эклиптическая	За основную координатную плоскость принимается плоскость эклиптики или плоскость, параллельная ей.	x_e, y_e, z_e $\alpha_e, \delta_e, \rho_e$

Продолжение таблицы А.1

Классификационный признак системы координат	Наименование	Описание классификационного признака	Пример обозначения
Ориентировка оси абсцисс	Земная	Ось абсцисс направлена в точку G пересечения меридиана Гринвича с экватором.	X_G, Y_G, Z_G x_G, y_G, z_G
	Звездная	Ось абсцисс направлена в точку весеннего равноденствия γ .	$x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$
Тип	Средняя	Ось абсцисс связана со средней точкой γ (или G) и средним полюсом мира P_m (или средним полюсом Земли P).	X, Y, Z x, y, z α, δ, ρ
	Истинная (мгновенная)	Ось абсцисс связана с истинной точкой γ' (или G') и истинным полюсом мира P_m' (или мгновенным полюсом Земли P_G').	X', Y', Z' x', y', z' α', δ', ρ'

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(рекомендуемое)
СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Мощным средством вычислительной алгебры совместно с линейной задачей МНК является сингулярное разложение [25, 89, 117, 151, 154]. Сингулярным разложением прямоугольной $m \times n$ матрицы \mathbf{A} называется разложение вида

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T, \quad (\text{Б.1})$$

где \mathbf{U} и \mathbf{V} – левая $m \times m$ и правая $n \times n$ ортогональные матрицы;

$\mathbf{\Sigma}$ – прямоугольная $m \times n$ матрица с элементами $\sigma_{ji} = 0$ при $i \neq j$ и $\sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$).

Здесь величины σ_i являются сингулярными числами матрицы \mathbf{A} .

Разложение (Б.1) можно использовать для установления степени устойчивости вектора решения к изменению исходных данных. С этой целью применяются зависимости (1.130) – (1.133), для которых число обусловленности следует вычислять по формуле [25]

$$\mu(\mathbf{A}) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}, \quad (\text{Б.2})$$

где σ_{\max} , σ_{\min} – максимальное и минимальное сингулярные числа.

Сингулярное разложение сводит общее решение линейной задачи МНК к задаче с диагональной матрицей, что позволяет достаточно просто определить ранг матрицы коэффициентов и получить единственное решение СЛАУ. Кратко изложим суть этого вопроса, основываясь на работах [89, 104, 151, 154].

Применение к матрице коэффициентов \mathbf{A} в СЛАУ (1.123) сингулярного разложения, дает преобразованную систему

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{G}. \quad (\text{Б.3})$$

В ней n -мерный вектор-столбец преобразованных неизвестных \mathbf{Z} и m -мерный вектор-столбец правой части \mathbf{G} находятся из равенств

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{X}, \quad (\text{Б.4})$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (\text{Б.5})$$

Определив псевдообратную матрицу $\boldsymbol{\Sigma}^+$ как

$$\boldsymbol{\Sigma}^+ = \begin{cases} \sigma_{ii}^+ = \sigma_i^{-1}, i = j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m), \\ \sigma_{ji}^+ = 0 \ (i \neq j), \end{cases} \quad (\text{Б.6})$$

можно получить оценку $\hat{\mathbf{Z}}$ вектора \mathbf{Z} в (Б.3):

$$\hat{\mathbf{Z}} = \boldsymbol{\Sigma}^+ \cdot \mathbf{G}. \quad (\text{Б.7})$$

Теперь обобщенное решение СЛАУ (1.123) находится из равенства

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{Z}}. \quad (\text{Б.8})$$

Сингулярное разложение без привлечения других методов линейной алгебры позволяет вычислить псевдообратную матрицу \mathbf{A}^+

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^+ \cdot \mathbf{U}^T, \quad (\text{Б.9})$$

после чего обобщенное решение можно найти по формуле (1.128).

В вычислительной практике наиболее приемлемым с точки зрения затрат

времени на вычисления и занимаемой памяти компьютера является экономичный вариант сингулярного разложения. Суть его заключается в следующем. Так как

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad (\text{Б.10})$$

то удобно представить

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{Б.11})$$

где $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ – векторы-столбцы размерности n и $n-m$ соответственно.

Тогда вместо (Б.7) рациональнее вычислять вектор $\hat{\mathbf{Z}}$ по формуле

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{g}_1, \quad (\text{Б.12})$$

в которой

$$\mathbf{S}^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}). \quad (\text{Б.13})$$

Затем, уже обобщенное решение определяется из равенства (Б.8). Очевидно, что эффективность процедуры (Б.12) возрастает с ростом числа m уравнений относительно числа n неизвестных.

Для обобщенного решения $\hat{\mathbf{X}}$ из (Б.8) вектор невязок получается подстановкой выражений (Б.1), (Б.3), (Б.5), (Б.10) – (Б.12) в (1.124):

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) = \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{Б.14})$$

Евклидова норма этого вектора равна

$$\|\mathbf{V}\|_E = \|\mathbf{g}_2\|_E. \quad (\text{Б.15})$$

Если матрица \mathbf{A} неполного ранга $r < n$ ($r = \text{rank}\mathbf{A}$), то псевдообратная матрица Σ^+ рассчитывается следующим образом:

$$\Sigma^+ = \begin{cases} \sigma_{ii}^+ = \sigma_i^{-1}, & i=j, \sigma_i \geq \tau, \\ \sigma_{ii}^+ = 0, & i=j, \sigma_i < \tau, \\ \sigma_{ji}^+ = 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (\text{Б.16})$$

Параметр τ отражает точность задания матрицы \mathbf{A} и точность представления чисел в памяти конкретной вычислительной машины [7, 89, 151]:

$$\tau = \sigma_{max} \cdot \varepsilon_A. \quad (\text{Б.17})$$

Отбрасывание сингулярных чисел, меньших τ , приводит к уменьшению числа обусловленности, значение которого находится как [151]

$$\mu(\mathbf{A}) = \sigma_{max} / \tau. \quad (\text{Б.18})$$

С введением величины τ вводится также понятие эффективного ранга, равного количеству сингулярных чисел, больших τ [151].

Если псевдообратная матрица Σ^+ вычисляется по формуле (Б.16), то вектор решения $\hat{\mathbf{Z}}$ в выражении (Б.7) лучше представить состоящим из векторов-столбцов $\hat{\mathbf{Z}}_1$ и $\hat{\mathbf{Z}}_2$ размерности r и $n-r$ соответственно. Матрицу \mathbf{G} будут составлять векторы-столбцы \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 размерности r и $m-r$. Очевидно, что преобразованной системе уравнений (Б.3) удовлетворяет единственный вектор $\hat{\mathbf{Z}}_1$

и произвольный вектор $\hat{\mathbf{Z}}_2$. Такой выбор вектора решений не увеличивает евклидовой нормы вектора невязок. Отмеченная множественность решений для преобразованной системы обуславливает множественность решений $\hat{\mathbf{X}}$ в равенстве (Б.8) исходной СЛАУ. Единственным решением задачи является решение с минимальной евклидовой нормой (1.122). Очевидно, что в этом случае вектор $\hat{\mathbf{Z}}_2$ должен содержать нулевые компоненты. Поэтому нормальное обобщенное решение будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{V} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Z}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Б.19})$$

Для решения линейной системы уравнений с матрицей коэффициентов неполного ранга $r < n$ также применима экономичная схема вычислений. При этом решение СЛАУ (Б.3) осуществляется с использованием формулы (Б.12), в которой матрица

$$\mathbf{S}^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}) \quad (\text{Б.20})$$

состоит из r обратных сингулярных чисел, больших величины τ . Для нормального обобщенного решения, определяемого выражением (Б.19), евклидова норма вектора невязок (Б.15) также будет минимальной.

Заметим, что нормальное обобщенное решение может быть получено из выражения (1.128), в котором эффективная псевдообратная матрица \mathbf{A}^+ рассчитывается по формуле (Б.9) с использованием псевдообратной матрицы Σ^+ из выражения (Б.16) [151].

В работе [104] отмечается, что при соотношении в СЛАУ числа строк и столбцов $p = m/n$ больше 2 целесообразнее к матрице коэффициентов применять ортогональное разложение Хаусхолдера. А затем уже полученную треугольную

матрицу подвергать сингулярному разложению. Тогда при значении $p \approx 10$ экономия времени при вычислениях может достигать 50 %.

Применение сингулярного анализа показывает, что решение СЛАУ с прямоугольной матрицей гораздо предпочтительнее, чем решение этих же систем с использованием нормальной матрицы коэффициентов [82]. Для доказательства этого утверждения достаточно выполнить сингулярное разложение (Б.1) нормальной матрицы коэффициентов в (1.126). Можно записать

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T. \quad (\text{Б.21})$$

Здесь матрица $\mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{\Sigma}$ будет состоять из квадратов сингулярных чисел матрицы $\mathbf{\Sigma}$. Отсюда имеем

$$\mu(\mathbf{\Sigma}^T \cdot \mathbf{\Sigma}) = \sigma_{\max}^2 / \sigma_{\min}^2 = \mu^2(\mathbf{A}), \quad (\text{Б.22})$$

т.е. число обусловленности нормальной матрицы коэффициентов $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ в квадрат раз больше числа обусловленности прямоугольной матрицы \mathbf{A} .

Возвращаясь к оценке относительной ошибки решения СЛАУ, подчеркнем, что вектор \mathbf{V} не может служить надежной мерой ее решения. Анализ формулы

$$\varepsilon_x = \mu(\mathbf{A}) \cdot \|\mathbf{V}\|_E / \|\mathbf{F}\|_E, \quad (\text{Б.23})$$

приведенной в работе [154], позволяет сделать следующий вывод: сильно отличающийся от своего точного значения вектор решения может давать весьма малые невязки. Это отличие увеличивается с ростом числа обусловленности $\mu(\mathbf{A})$ матрицы коэффициентов СЛАУ [82].

ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

ВЫВОД АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ
МАТРИЦЫ $\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{Y}$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{Y}}, \quad \mathbf{C}_2 = \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{Y}}, \quad (\text{B.1})$$

Для получения матрицы \mathbf{C} необходимо установить функциональную зависимость

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \quad (\text{B.2})$$

компонент вектора \mathbf{X} прямоугольных координат положения и скорости спутника от регулярных элементов \mathbf{Y} его орбиты. Здесь \mathbf{G} является нелинейной шестимерной вектор-функцией от вектора \mathbf{Y} .

Инерциальную орбитальную систему координат $(o\xi\eta\zeta)$ (см. рисунок 1.4) образует ортонормированный базис \mathbf{e} , определяемый равенством (1.73), каждый единичный вектор которого можно представить в виде проекций на оси звездной системы координат $(oxyz)$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Компоненты единичных векторов в равенствах (B.3) выражаются через регулярные элементы \mathbf{Y} орбиты спутника, представленных выражением (1.135) [173, 195]

$$\mathbf{e}_2 = k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \delta \cdot f \cdot q \\ (k-q^2) \cdot \delta \\ q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \delta \cdot f \cdot q \\ (k-q^2) \cdot \delta \\ q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = k^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f \\ -q \\ (1-k) \cdot \delta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Здесь параметр k определяется по формуле (1.138).

Дифференцирование по времени зависимости (1.138) для расчета геоцентрического расстояния r до спутника позволяет получить выражение для расчета модуля вектора скорости \dot{r} спутника

$$\dot{r} = -\frac{r^2}{p} \cdot (g \cdot \cos l - h \cdot \sin l) \cdot \dot{l}. \quad (\text{B.5})$$

Подставив формулы (1.137) и (B.5) для определения величин \dot{l} и \dot{r} в (1.77) и, сделав простые преобразования, получим следующие равенства [173]:

$$\dot{\xi} = -\sqrt{\mu/p} \cdot (g + \sin l), \quad \dot{\eta} = -\sqrt{\mu/p} \cdot (h + \cos l), \quad (\text{B.6})$$

где μ – гравитационный параметр Земли;

p – фокальный параметр орбиты.

Теперь функциональная зависимость (B.2) установлена – это формулы (1.76), (1.80), (1.81), (B.4) и (B.6). Ниже получим аналитические выражения для расчета элементов матрицы \mathbf{C} [62]. Для этого представим ее в виде произведения двух матриц

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{D}} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{Y}}. \quad (\text{B.7})$$

В нем

$$\mathbf{D}^T = [\xi \ \eta \ \zeta \ \dot{\xi} \ \dot{\eta} \ \dot{\zeta} \ \mathbf{e}_1^T \ \mathbf{e}_2^T \ \mathbf{e}_3^T] \quad (\text{B.8})$$

является пятнадцатимерным вектором-столбцом, состоящим из компонент векторов положения и скорости спутника в инерциальной орбитальной системе координат $(O\xi\eta\zeta)$, а также из единичных векторов, образующих ортонормированный базис этой системы. В развернутой форме произведение матриц (B.7) имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\xi}} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\eta}} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\zeta}} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{e}_1} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{e}_2} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{e}_3} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \xi} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \eta} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \zeta} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\xi}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\eta}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\zeta}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{e}_1} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{e}_2} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{e}_3} \end{bmatrix} \times \\ \times [(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{Y}})^T (\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{Y}})^T (\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{Y}})^T (\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \mathbf{Y}})^T (\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \mathbf{Y}})^T (\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \mathbf{Y}})^T (\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \mathbf{Y}})^T (\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \mathbf{Y}})^T (\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \mathbf{Y}})^T]^T. \quad (\text{B.9})$$

Чтобы получить аналитические выражения производных в матрицах-множителях (B.9), необходимо для дифференцирования воспользоваться формулами (1.76), (1.80), (1.81), (1.137), (1.138), (B.4) и (B.6). Определение производных в равенстве (B.9) не представляет большой сложности, поэтому можно сразу записать:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \xi \cdot \mathbf{E} & \eta \cdot \mathbf{E} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{0} & \dot{\xi} \cdot \mathbf{E} & \dot{\eta} \cdot \mathbf{E} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \xi/p & -\xi \cdot \eta/p & -\xi^2/p & 0 & 0 & \xi \cdot r^2 / \sqrt{p \cdot \mu} \\ \eta/p & -\eta^2/p & -\xi \cdot \eta/p & 0 & 0 & -\dot{\eta} \cdot r^2 / \sqrt{p \cdot \mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\xi}/2p & -\sqrt{\mu/p} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\mu/p} \cdot \xi/r \\ -\dot{\eta}/2p & 0 & \sqrt{\mu/p} & 0 & 0 & -\sqrt{\mu/p} \cdot \eta/r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}^{-1} \cdot (-\mathbf{e}_1 \cdot f + \begin{bmatrix} -f \\ q \\ -\delta \end{bmatrix}) & \mathbf{k}^{-1} \cdot (-\mathbf{e}_1 \cdot q + \begin{bmatrix} q \\ f \\ 0 \end{bmatrix}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}^{-1} \cdot (-\mathbf{e}_2 \cdot f + \begin{bmatrix} \delta \cdot q \\ \delta \cdot f \\ 0 \end{bmatrix}) & \mathbf{k}^{-1} \cdot (-\mathbf{e}_2 \cdot q + \begin{bmatrix} \delta \cdot f \\ -\delta \cdot q \\ 1 \end{bmatrix}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

где \mathbf{E} – единичная 3x3 матрица;

$\bar{\mathbf{0}}$ – нулевая квадратная матрица размерности 3x3;

$\mathbf{0}$ – нулевая матрица-столбец размерности 3x1.

Матрицу частных производных \mathbf{C} в выражении (B.1) найдем, выполнив перемножение матриц-сомножителей (B.10) и (B.11). Пропустив простые преобразования, можно записать

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{r}}{p} & -\frac{\mathbf{r}}{p} \cdot \eta & -\frac{\mathbf{r}}{p} \cdot \xi & \mathbf{k}^{-1} \cdot (-\mathbf{r} \cdot f + \mathbf{S}_1) & \mathbf{k}^{-1} \cdot (-\mathbf{r} \cdot q + \mathbf{S}_2) & \frac{r^2}{\sqrt{\mu \cdot p}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\mathbf{r}}}{2p} & -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \mathbf{e}_1 & \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{k}^{-1} \cdot (-\dot{\mathbf{r}} \cdot f + \mathbf{S}_3) & \mathbf{k}^{-1} \cdot (-\dot{\mathbf{r}} \cdot q + \mathbf{S}_4) & -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

В формулах (B.12) и (B.13) векторы \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 , \mathbf{S}_3 и \mathbf{S}_4 имеют вид

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -\dot{\xi} \cdot f + \delta \cdot q \cdot \eta \\ \xi \cdot q + \delta \cdot f \cdot \eta \\ -\delta \cdot \dot{\xi} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \cdot q + \delta \cdot f \cdot \eta \\ \xi \cdot f - \delta \cdot q \cdot \eta \\ \eta \end{bmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} -\dot{\xi} \cdot f + \delta \cdot q \cdot \dot{\eta} \\ \dot{\xi} \cdot q + \delta \cdot f \cdot \dot{\eta} \\ -\delta \cdot \dot{\xi} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \cdot q + \delta \cdot f \cdot \dot{\eta} \\ \dot{\xi} \cdot f - \delta \cdot q \cdot \dot{\eta} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Наряду с аналитическим методом для вычисления элементов матрицы \mathbf{C} используются численные методы: односторонних и двусторонних конечных разностей [17, 90, 146, 164]. В методе односторонних конечных разностей частная производная от i -й ($i = 1, 2, \dots, 6$) компоненты вектора \mathbf{X} по j -й ($j = 1, 2, \dots, 6$) компоненте вектора \mathbf{Y} рассчитывается по формуле

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_j} = \frac{G_i(Y_1, \dots, Y_j + \Delta Y_j, \dots, Y_6) - G_i(Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_6)}{\Delta Y_j}, \quad (\text{B.15})$$

а в методе двусторонних конечных разностей – по формуле

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_j} = \frac{G_i(Y_1, \dots, Y_j + \Delta Y_j, \dots, Y_6) - G_i(Y_1, \dots, Y_j - \Delta Y_j, \dots, Y_6)}{2 \cdot \Delta Y_j}, \quad (\text{B.16})$$

где G_i – i -я функция в зависимости (B.2);

ΔY_j – приращение j -й компоненты вектора \mathbf{Y} .

Процесс вычислений по формуле (B.16) в сравнении с формулой (B.15) более сложен и трудоемок. Однако использование формулы (B.16) предпочтительнее, так как в этом случае обеспечивается более высокая точность вычислений.

Достоверность полученных выражений (B.12) и (B.13) проверялась автором численным методом двусторонних конечных разностей по формуле (B.16). При этом различие одноименных производных, полученных аналитическим и численным методами, не превысило 10^{-6} . Этот результат является более чем достаточным.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

(справочное)

ВЫВОД АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ
МАТРИЦАНТА

Для расчета элементов матрицы изохронных производных (матрицанта) (1.145) могут применяться численные и аналитические методы. К численным методам относятся методы односторонних и двусторонних конечных разностей, а также метод вариаций [90, 141, 146, 155, 164].

Метод односторонних конечных разностей предусматривает семикратное интегрирование дифференциальных уравнений движения КА (1.3) для невозмущенных и возмущенных малыми приращениями Δq_{0j} ($j = 1, 2, \dots, 6$) ну движения КА. Численное значение производной, находящейся на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицанта, можно определить по формуле

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{0j}} = \frac{F_i(q_{01}, \dots, q_{0j} + \Delta q_{0j}, \dots, q_{06}, t) - F_i(q_{01}, \dots, q_{0j}, \dots, q_{06}, t)}{\Delta q_{0j}}, \quad (\text{Г.1})$$

где F_i – i -я функция вектор-функции \mathbf{F} вида (1.2).

В методе двусторонних конечных разностей выполняется 12-кратное интегрирование дифференциальных уравнений движения. Численное значение производной рассчитывается по формуле

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{0j}} = \frac{F_i(q_{01}, \dots, q_{0j} + \Delta q_{0j}, \dots, q_{06}, t) - F_i(q_{01}, \dots, q_{0j} - \Delta q_{0j}, \dots, q_{06}, t)}{2 \cdot \Delta q_{0j}}. \quad (\text{Г.2})$$

Как уже отмечалось выше, метод двусторонних конечных разностей более точен, чем метод односторонних конечных разностей, но более трудоемок. Применительно к изохронным производным он используется в том случае, когда

сильно выражена нелинейность вектор-функции F . К достоинствам описанных численных методов следует отнести их универсальность и точность, а к недостаткам – значительные трудоемкость и затраты времени вычислительных машин.

При использовании метода вариации наряду с системой дифференциальных уравнений движения (1.3) рассматривается система дифференциальных уравнений в вариациях. Если для системы уравнений движения выбрать расчетные нули движения спутника, а для системы уравнений в вариациях в качестве нулей использовать последовательно строки единичной матрицы, то в результате совместного интегрирования этих систем непосредственно получаются значения искомых частных производных. Расход машинного времени при применении этого метода в 1,5–2 раза меньше, чем в методе конечных разностей [156], однако метод вариаций требует большого объема оперативной памяти вычислительных машин.

Аналитические методы расчета матрицанта подразделяются на точные и приближенные. Точные методы основываются на возможности получения модели движения КА в замкнутой форме. При этом предполагается, что спутник движется по кеплеровой орбите [146]. Методы формирования матрицанта для различных систем элементов орбиты описаны в работах П. Е. Эльясберга [163], П. Эскобала [165], Б. Ф. Жданюка [90], Р. Р. Назирова и А. А. Тихонова [119], В. М. Каула [98], И. Георгиева и В. Коцева [167] и в других. Аналитические выражения элементов матрицы изохронных производных в прямоугольных координатах получены, например, В. Н. Брандиным [17], К. К. Насретдиновым [120]. Один из методов представлен автором в работах [57, 62]. Следует отметить, что в изохронных производных, представленных в работе [120], имеются особенности для круговых и экваториальных орбит. Для уменьшения методической погрешности производных на длинных орбитальных дугах В. М. Каулой [98], Н. А. Бовшиным [8, 9], Г. А. Устиновым и В. В. Бойковым [12] получены аналитические выражения в кеплеровых элементах. В этих выражениях учитывается влияние второй зональной гармоники геопотенциала. Преимущество точных аналитических методов перед численными состоит в том, что элементы матрицанта рассчитываются по конечным

зависимостям с известным числом арифметических операций. Это приводит к значительному сокращению времени вычислений и памяти вычислительных машин. К недостаткам следует отнести: а) быстрое нарастание вычислительной погрешности с увеличением длины орбитальной дуги; б) громоздкость формул при учете влияния основных возмущений.

Приближенные аналитические методы базируются на разложении в ряд Тейлора с удержанием квадратичных членов интегралов обычной [153] или линеаризованной [156] модели движения КА. Как показывают исследования [10], для спутников с высотами от 1000 км до 1500 км вычисление изохронных производных данным методом возможно на интервале времени продолжительностью не более 5 – 7 минут, при дальнейшем увеличении этого интервала резко возрастает методическая погрешность расчета производных. Учет квадратичных членов разложения уже приводит к громоздким выражениям для элементов матрицанта, поэтому удержание кубических членов разложения нецелесообразно. Для орбитальных дуг большой протяженности В. Г. Хорошавцев [153] предлагает делить мерный интервал T на несколько коротких интервалов $[t_0, t_1], [t_0, t_2], \dots, [t_{k-1}, t_k]$ и для каждого из них вычислять изохронные производные. Матрицант на интервале T получается перемножением матрицантов, рассчитанных для каждого элементарного интервала времени. Отметим, что данный метод приводит к значительным затратам машинного времени в тех случаях, когда между участками (сеансами) измерений орбитальной дуги имеются большие промежутки времени. Обзор численных и аналитических методов расчета изохронных производных достаточно подробно изложен в монографиях [10, 15, 144].

Ниже будут получены аналитические выражения для вычисления изохронных производных вида (1.145) в регулярных элементах Y орбиты в предположении, что спутник движется по невозмущенной кеплеровой орбите [60]. Для этого в качестве исходных примем зависимости, приведенные в работах [91, 173]:

$$F = E + \sigma, \quad (\Gamma.3)$$

$$l = v + \sigma, \quad (\Gamma.4)$$

$$\lambda = M + \sigma, \quad (\Gamma.5)$$

$$\sigma = \arctg \frac{g}{h}, \quad (\Gamma.6)$$

$$\lambda = F - h \cdot \sin F + g \cdot \cos F, \quad (\Gamma.7)$$

$$e = \sqrt{g^2 + h^2}, \quad (\Gamma.8)$$

$$M = M_0 + n \cdot (t - t_0), \quad (\Gamma.9)$$

$$n = \sqrt{\mu/a^3}, \quad (\Gamma.10)$$

$$a = p \cdot (1 - g^2 - h^2)^{-1}, \quad (\Gamma.11)$$

$$\lambda = \lambda_0 + n \cdot (t - t_0), \quad (\Gamma.12)$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{V}{2}, \quad (\Gamma.13)$$

где σ – сумма аргумента широты спутника и долготы восходящего узла орбиты (формула (1.134));

E, M – эксцентрическая и средняя аномалии;

F, λ – эксцентрическая и средняя долгота спутника;

n – среднее движение;

a – большая полуось орбиты;

μ – гравитационный параметр Земли;

p – фокальный параметр орбиты;

e – эксцентриситет орбиты.

Здесь и далее подстрочный индекс "0" означает, что параметр задан на начальный момент времени $t_0 \in T$. Матрицант \mathbf{C}_0 имеет вид:

$$C_0 = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial l}{\partial p_0} & \frac{\partial l}{\partial g_0} & \frac{\partial l}{\partial h_0} & 0 & 0 & \frac{\partial l}{\partial l_0} \end{bmatrix}. \quad (\text{Г.14})$$

Дифференцируя зависимости (Г.3), (Г.4), (Г.7), (Г.10) – (Г.13), полагая при этом $p=p_0$ (здесь принимается невозмущенная орбита), запишем общий вид производной

$$\frac{\partial l}{\partial p_0} = \frac{\partial l}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_0}. \quad (\text{Г.15})$$

Частные производные в равенстве (Г.15) просто определяются и имеют вид

$$\frac{\partial l}{\partial v} = \frac{\partial E}{\partial F} = 1, \quad (\text{Г.16})$$

$$\frac{\partial v}{\partial E} = \sqrt{p \cdot a} / r, \quad (\text{Г.17})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{a}{r}, \quad (\text{Г.18})$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = -1.5 \cdot \sqrt{\mu/a^5} \cdot (t - t_0), \quad (\text{Г.19})$$

$$\frac{\partial a}{\partial p_0} = \frac{a}{p}. \quad (\text{Г.20})$$

Подставив выражения (Г.16) – (Г.20) в формулу (Г.15) и сделав необходимые преобразования, можно записать

$$\frac{\partial l}{\partial p_0} = \frac{-d}{2 \cdot r^2}. \quad (\text{Г.21})$$

Здесь параметр d определяется по формуле

$$d = 3 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \cdot (t - t_0). \quad (\text{Г.22})$$

Общий вид производной $\frac{\partial l}{\partial l_0}$ можно получить, дифференцируя зависимости (Г.3), (Г.4), (Г.7), (Г.12) и (Г.13), применимые как для текущего, так и начального моментов времени:

$$\frac{\partial l}{\partial l_0} = \frac{\partial l}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} \cdot \frac{\partial \lambda_0}{\partial F_0} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \cdot \frac{\partial E_0}{\partial v_0} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial l_0}. \quad (\text{Г.23})$$

Частные производные в зависимости (Г.13) просто определяются и имеют вид

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} = \frac{\partial F_0}{\partial E_0} = \frac{\partial v_0}{\partial l_0} = 1, \quad (\text{Г.24})$$

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial F_0} = \frac{r_0}{a}, \quad \frac{\partial E_0}{\partial v_0} = \frac{r_0}{\sqrt{a \cdot p}}. \quad (\text{Г.25})$$

Подставив равенства (Г.16) – (Г.18), (Г.24), (Г.25) в равенство (Г.23) и сделав при этом необходимые преобразования, получим

$$\frac{\partial l}{\partial l_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2. \quad (\text{Г.26})$$

Общий вид производной $\frac{\partial l}{\partial g_0}$ определяется после дифференцирования зависимостей (Г.3), (Г.4), (Г.6) – (Г.8), (Г.10) – (Г.13), применимых как для текущего, так и начального моментов времени:

$$\frac{\partial l}{\partial g_0} = \frac{\partial l}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial g_0} + \frac{\partial l}{\partial \sigma} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial g_0} + \frac{\partial v}{\partial E} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial g_0} + \frac{\partial E}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial g_0} \right) \right). \quad (\Gamma.27)$$

Частные производные в равенстве (Г.27) просто определяются и имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial g_0} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial g_0} - \cos F \right) / (1 - g_0 \cdot \sin F - h_0 \cdot \cos F), \quad (\Gamma.28)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial g_0} = \frac{\partial \lambda}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial g_0} + \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} \cdot \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial g_0} + \frac{\partial \lambda_0}{\partial F_0} \cdot \left(\frac{\partial F_0}{\partial E_0} \cdot \frac{\partial E_0}{\partial g_0} + \frac{\partial F_0}{\partial \sigma_0} \cdot \frac{\partial \sigma_0}{\partial g_0} \right) \right), \quad (\Gamma.29)$$

$$\frac{\partial E}{\partial g_0} = \frac{\partial E}{\partial e_0} \cdot \frac{\partial e_0}{\partial g_0} + \frac{\partial E}{\partial v_0} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial \sigma_0} \cdot \frac{\partial \sigma_0}{\partial g_0}. \quad (\Gamma.30)$$

Подставим формулы (Г.28) – (Г.30) в выражение (Г.27), учитывая при этом равенства (Г.16), (Г.24) и вид производных

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_0}{\partial \sigma_0} = 1, \quad \frac{\partial E}{\partial \sigma} = \frac{\partial v_0}{\partial \sigma_0} = -1, \quad (\Gamma.31)$$

можно записать

$$\frac{\partial l}{\partial g_0} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial g_0} + \frac{\partial v}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial g_0} + \frac{\partial v}{\partial E} \cdot \left(\frac{a}{r} \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial g_0} - \cos F \right) - \frac{\partial \sigma_0}{\partial g_0} \right). \quad (\Gamma.32)$$

Здесь частная производная $\partial \lambda / \partial g_0$ имеет вид

$$\frac{\partial \lambda}{\partial g_0} = \frac{\partial \lambda}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial g_0} + \frac{\partial \lambda_0}{\partial g_0} + \frac{\partial \lambda_0}{\partial F_0} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial g_0} + \frac{\partial E_0}{\partial e_0} \cdot \frac{\partial e_0}{\partial g_0} - \frac{\partial E_0}{\partial v_0} \cdot \frac{\partial \sigma_0}{\partial g_0} \right). \quad (\Gamma.33)$$

Выполнив аналогичные действия, запишем общий вид производной $\partial l / \partial h_0$:

$$\frac{\partial l}{\partial h_0} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial h_0} + \frac{\partial v}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial h_0} + \frac{\partial v}{\partial E} \cdot \left(\frac{a}{r} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial h_0} - \sin F \right) - \frac{\partial \sigma_0}{\partial h_0}. \quad (\text{Г.34})$$

Здесь частная производная $\partial \lambda / \partial h_0$ имеет вид

$$\frac{\partial \lambda}{\partial h_0} = \frac{\partial \lambda}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial h_0} + \frac{\partial \lambda_0}{\partial h_0} + \frac{\partial \lambda_0}{\partial F_0} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial h_0} + \frac{\partial E_0}{\partial e_0} \cdot \frac{\partial e_0}{\partial h_0} - \frac{\partial E_0}{\partial v_0} \cdot \frac{\partial \sigma_0}{\partial h_0} \right). \quad (\text{Г.35})$$

Аналитические выражения для расчета производных, являющихся сомножителями в зависимостях (Г.32) – (Г.35), легко определяются и имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial g_0} &= \frac{h_0}{e_0^2}, & \frac{\partial \sigma_0}{\partial h_0} &= -\frac{g_0}{e_0^2}, & \frac{\partial e}{\partial g_0} &= \frac{g_0}{e_0}, & \frac{\partial e}{\partial h_0} &= \frac{h_0}{e_0}, \\ \frac{\partial v}{\partial e} &= \frac{p}{a} \cdot \sin v, & \frac{\partial a}{\partial g_0} &= \frac{2 \cdot a^2 \cdot g_0}{p}, & \frac{\partial a}{\partial h_0} &= \frac{2 \cdot a^2 \cdot h_0}{p}, & & \\ \frac{\partial E_0}{\partial e_0} &= -\frac{r_0 \cdot \sqrt{a} \cdot \sin v_0}{\sqrt{p^3}}, & \frac{\partial \lambda_0}{\partial h_0} &= -\sin F_0, & \frac{\partial \lambda_0}{\partial g_0} &= \cos F_0, & \frac{\partial \lambda_0}{\partial F_0} &= \frac{r_0}{a}. \end{aligned} \quad (\text{Г.36})$$

Подставив производные из выражений (Г.36), (Г.17), (Г.19) и (Г.25) в равенства (Г.32) – (Г.35) и сделав при этом необходимые преобразования, можно записать

$$\frac{\partial l}{\partial g_0} = a \cdot (b \cdot \sin \sigma - c \cdot \cos \sigma - d \cdot g_0), \quad (\text{Г.37})$$

$$\frac{\partial l}{\partial h_0} = a \cdot (b \cdot \cos \sigma + c \cdot \sin \sigma - d \cdot h_0). \quad (\text{Г.38})$$

В этих равенствах параметры a , b , v_0 и c имеют вид

$$a = \frac{p_0}{r^2 \cdot v_0^2}, \quad b = (\sin E \cdot (r + p_0) - \sin E_0 \cdot (r_0 + p_0)) / v_0, \quad (\Gamma.39)$$

$$c = (r + r_0) \cdot (\cos E - \cos E_0), \quad v_0 = \sqrt{1 - g_0^2 - h_0^2}, \quad (\Gamma.40)$$

а величины σ и d определяются по формулам (1.134) и (Г.22) соответственно.

Сведя все выражения вместе, запишем [60]

$$\frac{\partial l}{\partial p_0} = -\frac{d}{2 \cdot r^2}, \quad \frac{\partial l}{\partial g_0} = a \cdot (b \cdot \sin \sigma - c \cdot \cos \sigma - d \cdot g_0), \quad (\Gamma.41)$$

$$\frac{\partial l}{\partial h_0} = a \cdot (b \cdot \cos \sigma + c \cdot \sin \sigma - d \cdot h_0), \quad \frac{\partial l}{\partial l_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

Достоверность полученных выражений (Г.41) для расчета изохронных производных проверялась автором численным методом двусторонних конечных разностей по формуле (Г.2). Результаты вычислительного эксперимента подтвердили правильность полученных формул.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

(рекомендуемое)

ОЦЕНКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОШИБКИ МАТРИЦАНТА

При решении системы линейных уравнений поправок (см. 1.4) на число итераций существенное влияние оказывает точность вычисления матрицы коэффициентов. Она состоит из градиентной матрицы и матрицы изохронных производных (матрицанта). Относительная ошибка расчета элементов градиентной матрицы находится в пределах от $3 \cdot 10^{-7}$ до $7 \cdot 10^{-5}$ (см. 2.7). Величина относительной ошибки матрицы изохронных производных зависит от метода расчета элементов этой матрицы. Далее такую относительную ошибку будем называть относительной методической ошибкой. Ниже изложим методику оценки относительной методической ошибки матрицанта, а также приведем ее численные значения для некоторых типов орбит, характерных для геодезических спутников.

Для анализа выберем матрицант \mathbf{M} в прямоугольных координатах

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0}, \quad (\text{Д.1})$$

где \mathbf{X} – шестимерный вектор-столбец фазовых координат КА на текущий момент времени $t \in T$;

\mathbf{X}_0 – шестимерный вектор-столбец фазовых координат КА на начальный момент времени $t_0 \in T$.

Этот матрицант универсален в применении. Например, в случае оценивания другого набора \mathbf{S} элементов орбиты КА, матрица коэффициентов $\partial \Psi / \partial \mathbf{S}_0$ системы линейных уравнениях поправок может быть получена по формуле [90]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{S}_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{S}_0}, \quad (\text{Д.2})$$

где ψ – измеряемая функция;

S_0 – вектор других элементов орбиты КА в момент времени t_0 .

В современных алгоритмах дифференциального уточнения орбит спутников используются как аналитические, так и численные методы расчета матрицанта M . Аналитические методы, даже учитывающие вековые возмущения первого порядка от второй зональной гармоники геопотенциала, являются приближенными [10, 146]. Они подвержены ошибкам, обусловленным отличием возмущенного движения КА от невозмущенного. Но затраты машинного времени при реализации аналитических методов расчета матрицантов минимальны. Численные методы, основанные на численном интегрировании дифференциальных уравнений движения КА, требуют больших затрат машинного времени, занимающих иногда до 80 % от общего времени решения измерительной задачи [17].

В целях экономии времени при интегрировании дифференциальных уравнений движения учитывают не все возмущения, что приводит к методическим ошибкам расчета матрицы изохронных производных. Такого рода ошибки возрастают с увеличением отрезка времени T . В результате можно получить смещенные оценки вектора параметров состояния динамической системы, возрастание числа итераций в задаче оценивания и даже отсутствие сходимости итерационного процесса. Для плохо наблюдаемых динамических систем эти явления получают более выраженный характер. По этим причинам на этапе постановки задачи оценивания желательно иметь представление о величине таких ошибок, чтобы для конкретной обрабатываемой орбитальной дуги выбрать наиболее подходящий (в смысле точности и затрат машинного времени) метод расчета матрицанта.

Для оценивания относительных методических ошибок матрицанта на отрезке времени T необходимо иметь его точные значения в моменты $t_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots, n$; n – число моментов). Точные значения матрицантов, которые будем называть эталонами \mathcal{E} (т.е. точность расчета эталонного матрицанта на один-два порядка выше точности расчета матрицанта M), будем получать методом односторонних конечных разностей по формуле (Г.1) с учетом возмущений от несферичности Земли (все

гармоники до 16 порядка), притяжения Луной, Солнцем и прямого светового давления. Для получения фазовых координат \mathbf{X} на текущие моменты времени будет выполняться численное интегрирование дифференциальных уравнений движения КА. Элементы матрицанта \mathbf{M} , полученные по формуле (Д.1) на те же моменты времени каким-либо другим методом, можно сравнить с соответствующими элементами эталонного матрицанта. После чего можно оценить методическую относительную ошибку расчета каждого элемента матрицы \mathbf{M} .

Матрица изохронных производных имеет размерность 6×6 и содержит 36 элементов. С точки зрения технической реализации этот факт усложняет анализ изменения во времени методической относительной ошибки каждого элемента матрицанта. Поэтому удобнее использовать некоторую обобщенную характеристику ошибок расчета всех элементов матрицы.

За такую оценку примем отношение δ евклидовых норм двух матриц [82, 132]

$$\delta = \|\mathbf{M} - \mathbf{\Xi}\|_E / \|\mathbf{\Xi}\|_E, \quad (\text{Д.3})$$

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{\Xi}\|_E = \left(\sum_{K=1}^6 \sum_{j=1}^6 (m_{kj} - \varepsilon_{kj})^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{\Xi}\|_E = \left(\sum_{K=1}^6 \sum_{j=1}^6 (\varepsilon_{kj})^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{Д.4})$$

где m_{kj} и ε_{kj} – элементы матриц \mathbf{M} и $\mathbf{\Xi}$.

Параметр δ , определяемый отношением (Д.3), будем называть относительной методической ошибкой расчета матрицы изохронных производных \mathbf{M} . Если же \mathbf{M} будет сравниваться с матрицантом, полученным другим методом, то параметр δ будем называть относительной разностью двух матрицантов.

Для вычисления параметра δ для заданной последовательности моментов t_i выполнялось численное интегрирование методом Эверхарта дифференциальных уравнений движения. На эти же моменты времени методом односторонних конечных разностей рассчитывались элементы матрицы изохронных производных. Численные значения элементов матрицанта \mathbf{M} на моменты t_i определялись аналитическим методом.

Для исследований выбраны четыре модельные орбиты "С", "Т", "Л" и "И", которые по своим параметрам близки к орбитам геодезических КА. Их начальные условия, заданные в виде кеплеровых элементов, а также период обращения p представлены в таблице Д.1.

Таблица Д.1 – Начальные условия модельных орбит КА

Кеплеровы элементы	С	Т	Л	И
a	7320000 м	8000000 м	12266554 м	42168000 м
e	0,02	0,01	0,0042	0,00031
i	49,8°	90,0°	109,0°	1,0°
Ω	0,0	0,0	221,1	0,0
ω	0,0	0,0	279,3	0,0
ν	0,0	0,0	192,0	0,0
p	1,73 ^h	1,99 ^h	3,76 ^h	23,94 ^h

Моменты времени t_i , на которые рассчитывались матрицанты, подбирались так, чтобы на одном обороте КА было десять точек с интервалом в $0,1 \cdot p$. В этом случае два исходных положения КА в пределах одного оборота находятся на угловом расстоянии примерно в 36°. Кроме того, моменты времени вычислялись не на каждом обороте, а с некоторым пропуском целого числа оборотов. Время полета КА, длина дуги орбиты, число пропускаемых оборотов и общее число n моментов времени для каждой исследуемой орбиты приведены в таблице Д.2.

Таблица Д.2 – Характеристика модельных орбитальных дуг

Характеристика дуги	С	Т	Л	И
Время полёта КА (час)	240,6	237,4	236,6	239,4
Длина дуги (обороты)	139	120	64	10
Число пропускаемых оборотов	5	4	2	0
Общее число моментов времени	240	250	220	100

Эталонные значения матрицантов были получены дважды: со значениями приращений $\Delta \mathbf{X}$ к начальным условиям движения \mathbf{X}_0 , равными $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cdot 10^{-8}$ и $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cdot 10^{-9}$. При этом интегрирование уравнений движения выполнялось с

относительной ошибкой 10^{-10} и с учетом указанных выше возмущений. Относительная разность этих двух эталонов принята в качестве относительной ошибки расчета эталона Э, полученного с приращениями к начальным условиям $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cdot 10^{-9}$. Значения этой ошибки приведены в таблице Д.3.

Таблица Д.3 – Относительная ошибка эталонных матрицантов ($\times 10^{-6}$)

Время полёта КА (час)	С	Т	Л	И
48	3,0	2,6	1,2	1,7
120	6,0	6,1	2,7	4,1
240	11,9	11,0	4,9	8,2

Матрицы изохронных производных \mathbf{M} для каждой модельной орбиты КА рассчитывались на заданные моменты времени t_i различными методами и с учетом различных возмущений. В таблицах Д.4 и Д.5 приведено описание условий формирования исследуемых матрицантов. В качестве аналитического метода реализован метод, который основан на соотношениях невозмущенного движения. Вариационный метод основан на численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений в вариациях. Матрицант варианта 1 в таблице Д.4 принят за эталон Э.

Таблица Д.4 – Численные методы расчёта матрицантов

Вариант	Метод расчёта	Условия расчёта
1 (эталон)	конечных разностей	Значения приращений $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cdot 10^{-9}$. Учтены возмущения от несферичности Земли (все гармоники до 16 порядка), притяжения Луной, Солнцем и прямого светового давления. Относительная точность интегрирования уравнений движения 10^{-10} .
2	конечных разностей	Значения приращений $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cdot 10^{-9}$. Учтено влияние только второй зональной гармоники геопотенциала. Относительная точность численного интегрирования уравнений движения 10^{-10} .
3	конечных разностей	Значения приращений $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cdot 10^{-9}$. Учтено влияние всех гармоник геопотенциала второго порядка. Относительная точность численного интегрирования уравнений движения 10^{-10} .
4	вариаций	С учётом возмущений только от второй зональной гармоники геопотенциала в основной и вариационной системах дифференциальных уравнений.

Таблица Д.5 – Аналитический метод расчёта матрицантов

Вариант	Условия расчёта
5	По траектории, в которой учтены возмущения от несферичности Земли (все гармоники до 16 порядка), притяжения Луной, Солнцем и прямого светового давления.
6	По траектории, в которой учтено влияние всех гармоник геопотенциала второго порядка.
7	По траектории, возмущённой только второй зональной гармоникой геопотенциала.
8	По невозмущённой траектории.

В таблице Д.6 представлены значения ошибки δ для сравниваемых с эталоном Э (вариант 1) различных вариантов расчета матрицанта **М** на интервалах времени полета КА в 48, 120 и 240 часов. В таблице Д.7 приведены значения относительной разности δ между некоторыми матрицантами.

Таблица Д.6 – Значения относительной методической ошибки δ ($\times 10^{-4}$) расчёта матрицанта **М** для модельных орбит

Сравниваемые варианты	Название модельной орбиты			
	С	Т	Л	И
1-2	34	19	2,4	4,2
	82	51	5,8	10,7
	160	102	11,3	23,5
1-3	14	11	–	–
	35	30	–	–
	68	60	–	–
1-4	34	19	2,4	4,2
	82	51	5,8	10,7
	160	102	11,3	23,5
1-5	47	37	22	2
	47	58	23	4
	65	91	23	12
1-6	49	39	–	4
	55	62	–	11
	82	104	–	24
1-7	55	40	23	4
	90	70	24	11
	167	130	27	24
1-8	3080	910	583	13
	6900	2200	1433	34
	12840	4350	2892	68

Таблица Д.7 – Значения относительной разности матрицантов ($\times 10^{-4}$)

Сравниваемые варианты	Название модельной орбиты			
	С	Т	Л	И
2-3	16	9	–	–
	48	22	–	–
	93	43	–	–
2-4	0,017	0,016	–	0,019
	0,035	0,019	–	0,047
	0,063	0,021	–	0,091

Данные, представленные в таблице Д.6, дополнительно иллюстрируются графиками (рисунки Д.1 – Д.12). На этих рисунках показано изменение относительных методических ошибок матрицантов во времени. Обозначение варианта у каждого графика состоит из буквы, соответствующей названий модельной орбиты, и цифр в скобках – номеров сравниваемых вариантов.

Из результатов, представленных в таблице Д.6, видно, что с увеличением высоты полета КА уменьшается относительная методическая ошибка матрицантов. Это объясняется тем, что с ростом высоты полета КА уменьшается возмущающее действие не учитываемых гармоник геопотенциала. Однако в варианте (1–2) таблицы Д.6 ошибка δ для орбиты "И" примерно в два раза больше, чем для орбиты "Л". Это обусловлено тем, что при расчете матрицантов **М** (таблица Д.4, вариант 2) для орбит "Л" и "И" не учитывалось притяжение КА Луной и Солнцем, которое растет с увеличением высоты полета.

Из сравнения вариантов (1–2) и (1–3) таблицы Д.6 следует, что учет кроме второй зональной гармоники еще тессеральных и секториальных гармоник второго порядка повышает точность вычисления матриц изохронных производных примерно в два раза.

Данные вариантов (1–4) таблицы Д.6 и (2–4) таблицы Д.7 показывают, что вариационный метод [102] расчета матрицантов с учетом влияния второй зональной гармоники в основной и вариационной системах дифференциальных уравнений совпадает по точности с методом конечных разностей, также учитывающим только влияние второй зональной гармоники. Но вариационный метод предпочтительнее разностного, так как требует значительно меньших затрат машинного времени.

Как показывают данные таблицы Д.6, при расчете матрицантов аналитическим методом, основанном на зависимостях кеплерова движения, целесообразно применять элементы орбиты, полученные из интегрирования дифференциальных уравнений движения с учетом полного набора возмущений. При этом аналитический метод сопоставим по точности разностному методу, учитывающему влияние второй зональной гармоники. Здесь ошибка $\delta \approx 5 \cdot 10^{-3}$. Этот вывод следует из сравнения вариантов (1–2) и (1–5) таблицы Д.6.

Наибольшую относительную методическую погрешность имеют матрицанты, вычисленные по параметрам невозмущенной орбиты. Это следует из анализа результатов варианта (1–8) таблицы Д.6. Отметим, что во всех вариантах относительная методическая ошибка матрицантов растет вековым образом при увеличении длины орбитальной дуги. Это хорошо видно на представленных графиках изменения ошибки δ .

Обобщая результаты выполненных исследований, можно сделать следующие выводы [84, 134]:

- при реализации аналитического метода, основанного на зависимостях кеплерова движения, необходимо использовать элементы орбиты, полученные из интегрирования дифференциальных уравнений движения с полным набором возмущений;

- аналитический метод расчета матрицанта, основанный на зависимостях невозмущенного движения и использующий элементы орбиты, полученные из интегрирования дифференциальных уравнений движения с полным набором возмущений, совпадает по точности с разностным методом, учитывающим влияние только второй зональной гармоники;

- относительная методическая ошибка матрицантов уменьшается примерно в два раза, если при их расчете учитывать влияние не только второй зональной гармоники геопотенциала, но также тессеральной и секториальной гармоник второго порядка.

- относительная методическая ошибка матрицантов с увеличением длины

орбитальной дуги растет вековым образом. Чтобы уменьшить величину этой ошибки, следует начальную эпоху t_0 при дифференциальном уточнении орбит выбирать в середине мерного интервала T .

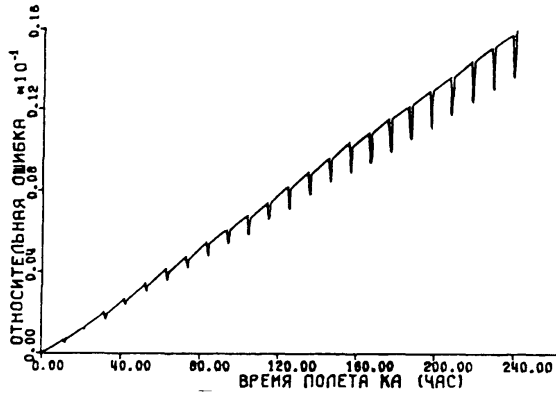


Рисунок Д.1 – Вариант С(1–2)

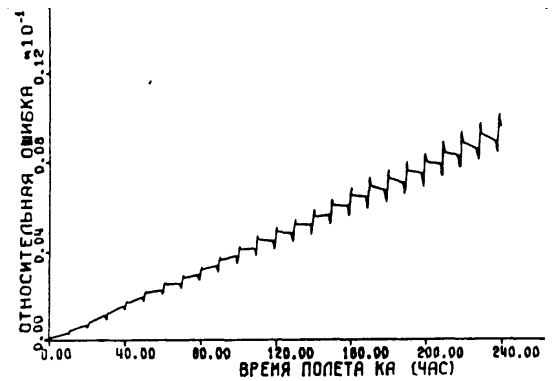


Рисунок Д.2 – Вариант Т(1–2)

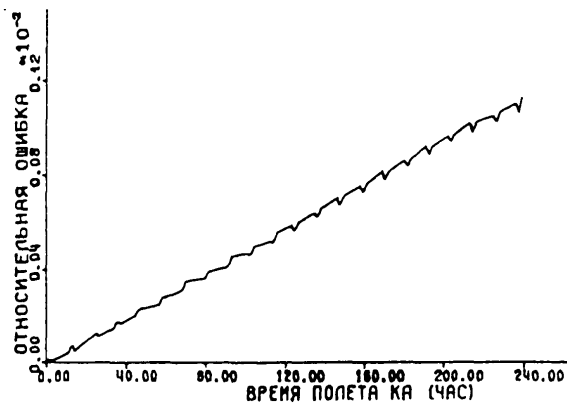


Рисунок Д.3 – Вариант Л(1–2)

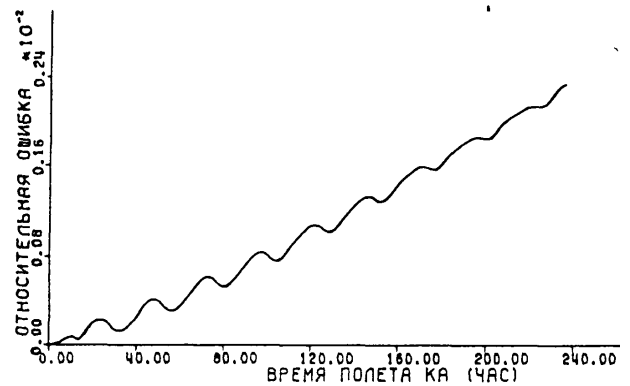


Рисунок Д.4 – Вариант И(1–2)

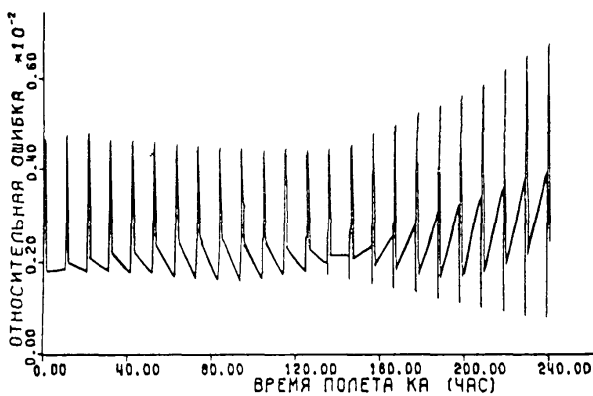


Рисунок Д.5 – Вариант С(1–5)

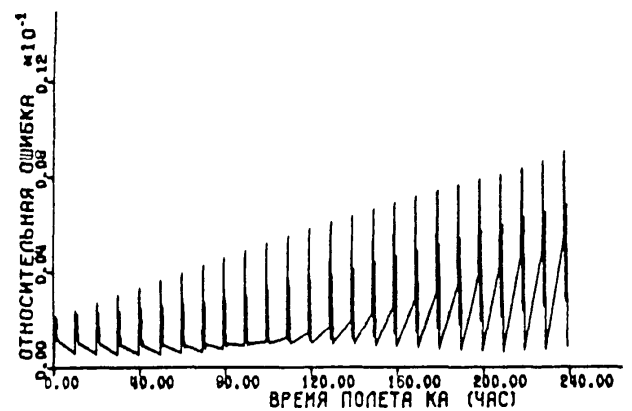


Рисунок Д.6 – Вариант Т(1–5)

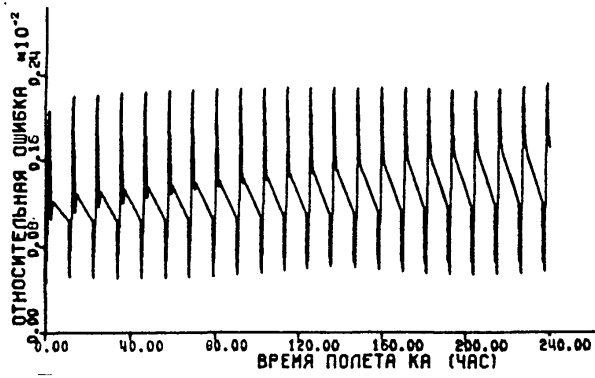


Рисунок Д.7 – Вариант Л(1-5)

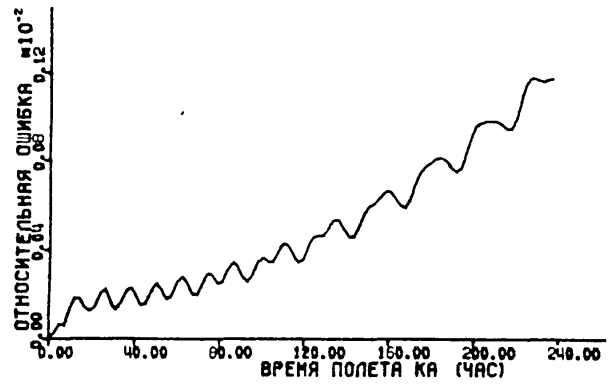


Рисунок Д.8 – Вариант И(1-5)

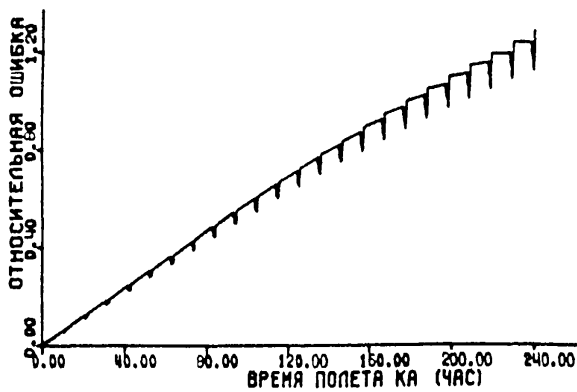


Рисунок Д.9 – Вариант С(1-8)

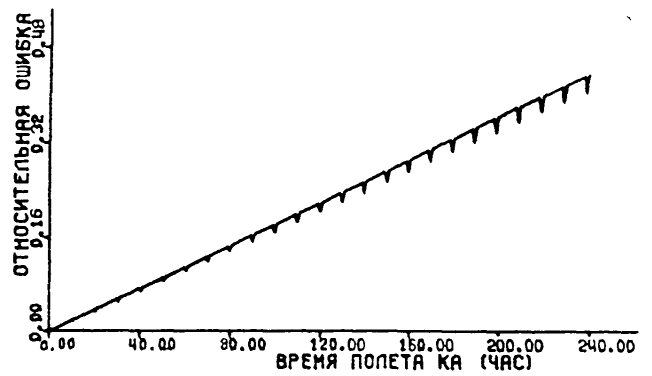


Рисунок Д.10 – Вариант Т(1-8)

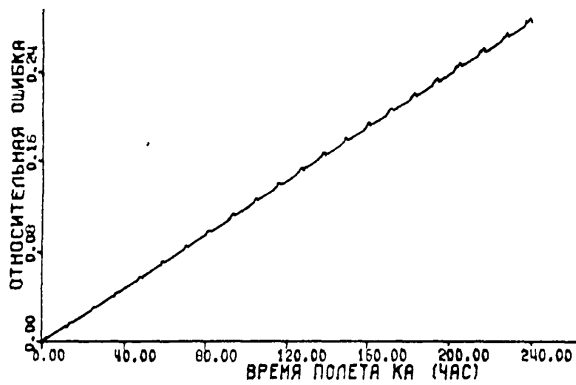


Рисунок Д.11 – Вариант Л(1-8)

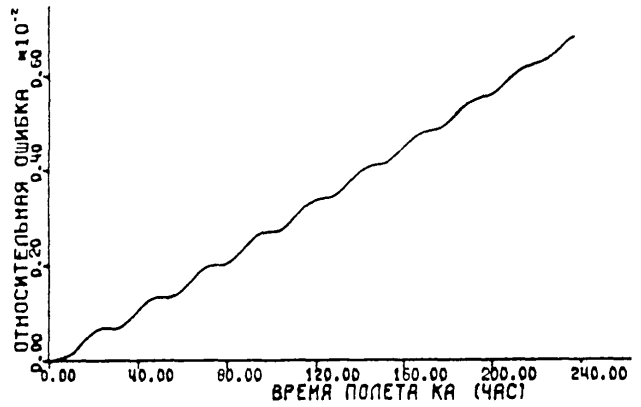


Рисунок Д.12 – Вариант И(1-8)

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

(рекомендуемое)

ВИД И АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРНЫХ
ИЗМЕРЕНИЙ

В приложении приведены характерные математические модели беззапросных радиотехнических траекторных измерений КА. Эти модели представлены в том виде, обозначениях и пояснениями, в котором они записаны в оригинальных работах. Выполнен анализ моделей на предмет их достоверности.

Модель 1. Модель интегральных доплеровских измерений, приведена в обзоре О. М. Булыгиной и В. Т. Залуцкого [22]. Моделируется число колебаний разностной частоты.

$$N_i = (\rho_k - \rho_j) \cdot f_s \cdot C^{-1} + (\tau_k - \tau_j) \cdot (f_G - f_s) + d \cdot (\dot{\rho}_k - \dot{\rho}_j) + (\dot{\rho}_k \cdot T_{3k} - \dot{\rho}_j \cdot T_{3j}) + \Delta a_i + R_i + \Delta_i + n_i. \quad (\text{E.1})$$

Здесь

$$\Delta a_i = -f_s \cdot C^{-1} \cdot (\tau_k^* - \tau_j^*) \cdot \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{\tau_k^* + \tau_j^*}{2}\right)^{-1} \quad (\text{E.2})$$

– поправка за аппроксимацию;

$$\Delta_{1i}^R = -f_s \cdot C^{-2} \cdot (\tau_k^* - \tau_j^*) \cdot \frac{V^2}{2} \quad \text{или} \quad \Delta_{1i}^R = -f_s \cdot C^{-2} \cdot (\tau_k^* - \tau_j^*) \cdot \frac{|\dot{\vec{r}}|^2 - |\dot{\vec{R}}|^2}{2}, \quad (\text{E.3})$$

$$\Delta_{2i}^R = -f_s \cdot C^{-2} \cdot (\tau_k^* - \tau_j^*) \cdot \mu \cdot \frac{|\vec{r}| - |\vec{R}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{R}|} \quad \text{или} \quad \Delta_{2i}^R = -f_s \cdot C^{-2} \cdot (\tau_k^* - \tau_j^*) \cdot \mu \cdot \left(\frac{1}{|\vec{R}|} - \frac{1}{|\vec{r}|}\right) \quad (\text{E.4})$$

– две релятивистские коррекции согласно специальной и общей теориям относительности;

$$\Delta_i = (\bar{\omega} \times \bar{R}) \cdot [\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_j)] \cdot f_s \cdot C^{-2} \quad (\text{E.5})$$

– поправка за вращение Земли (абберационный эффект).

В формулах (E.1 – E.5) обозначено: $\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли; \bar{R} и \bar{r} – геоцентрические радиус-векторы НП и КА; $\tau_k - \tau_j$ – длина интервала интегрирования; d – временная задержка приёмника; $T_{3j,k}$ – временные домеры; ρ и $\dot{\rho}$ – топоцентрическая дальность и радиальная скорость в моменты границ интервалов интегрирования; $R_i = \Delta_{1i}^R + \Delta_{2i}^R$ – суммарная релятивистская коррекция; n_j – представляет остаточные инструментальные и атмосферные эффекты, которые могут моделироваться как случайные; f_s – частота сигнала, излучаемого с борта КА; f_G – частота опорного генератора приёмника; t_k, t_j – моменты передачи временных меток со спутника; C – скорость света в вакууме; τ^* – начало подсчёта числа колебаний в приёмнике; μ – гравитационный параметр Земли.

Предполагается, что измеренное число циклов на этапе предварительной обработки исправляется поправками, учитывающими влияние тропосферной и ионосферной рефракций. Представленная модель записана в ЛСВ.

Модель 2. Модель доплеровских измерений, приведена в работе J. Kouba [186]. Моделируется число колебаний разностной частоты.

$$D_i + \varepsilon_i = (S_k - S_j) \cdot f_0 \cdot C^{-1} + (t_k - t_j) \cdot (f_0 - f_s) + d \cdot (\dot{S}_k - \dot{S}_j) \cdot f \cdot C^{-1} + R_i + \Delta_i + S_i. \quad (\text{E.6})$$

Здесь

$$S_i = |\bar{r}_s(t_i) - \bar{r}_g(\tau_i)| \quad (\text{E.7})$$

– расстояние между наземной станцией с радиус-вектором \bar{r}_g в момент τ_i начала (окончания) накопления циклов в ЛСВ и положением спутника \bar{r}_s в момент t_i передачи временной марки в ССВ;

$$\Delta_i = (\bar{\omega} \times \bar{r}_g) \cdot [\bar{r}_S(t_k) - \bar{r}_S(t_j)] \cdot f_0 \cdot C^{-2} \quad (\text{E.8})$$

– поправка за вращение Земли;

$$R_i = -[\mu \cdot (\frac{1}{r_g} - \frac{1}{r_s}) - (|\dot{\bar{r}}_S|^2 - |\dot{\bar{r}}_g|^2)/2] \cdot (t_k - t_j) \cdot f_0 \cdot C^{-2} \quad (\text{E.9})$$

– релятивистская поправка.

В формулах (E.6 – E.9) обозначено: d – средняя задержка приёмника в прохождении; \dot{S}_i – производная по времени от S_i ; f_0 – частота опорного генератора приемника; f_s – частота сигнала, излучаемого с КА; $\bar{\omega}$ – вектор вращения Земли; ε_i – инструментальные и атмосферные погрешности, которые могут моделироваться как случайные.

На этапе предварительной обработки измеренное число циклов исправляется поправками, учитывающими влияние тропосферной и ионосферной рефракций. Представленная модель записана в ССВ.

Модель 3. Модель доплеровских измерений, приведена в работе W. Schluner и P. Pesec [191]. Моделируется число колебаний разностной частоты.

$$N_i = (r_k - r_j) \cdot f_g \cdot C + (f_g - f_s) \cdot (T_k - T_j) - \frac{\Delta N_{tr}}{100} \cdot dk + \frac{\delta(r_k - r_j)}{\delta t} \cdot d\Delta t + \frac{\delta(r_k - r_j)}{\delta r} \cdot dr. \quad (\text{E.10})$$

Здесь

$$r_i = \sqrt{(X_S(T_i) - \bar{X}_g)^2 + (Y_S(T_i) - \bar{Y}_g)^2 + (Z_S(T_i) - \bar{Z}_g)^2} \quad (\text{E.11})$$

– наклонная дальность до КА с координатами X_S , Y_S , Z_S в момент T_i послышки временной марки;

$$\bar{X}_g = X_g - \omega_\lambda \cdot Y_g, \quad \bar{Y}_g = Y_g + \omega_\lambda \cdot X_g, \quad \bar{Z}_g = Z_g \quad (\text{E.12})$$

– координаты НП на момент t_i начала (окончания) накопления циклов приёмником;

$$\omega_\lambda = \omega \cdot r_i / C \quad (\text{E.13})$$

– угол поворота Земли за период времени $t_i - T$.

В формулах (E.10 – E.13) обозначено: ω – средняя угловая скорость вращения Земли; ΔN_{tr} – тропосферная коррекция; dk – процентная тропосферная коррекция; $d\Delta t$ – ошибка синхронизации; dr – орбитальная коррекция; f_s, f_g – частоты колебаний генераторов КА и НП соответственно.

На этапе предварительной обработки измеренное число циклов исправляется поправкой за влияние ионосферной рефракции и релятивистской поправкой

$$\Delta N_{ref} = f_s \cdot C^{-2} \cdot (V_S^2/2 + \mu \cdot (r_S^{-1} - r_A^{-1})), \quad (\text{E.14})$$

где V_S – относительная скорость движения КА;

r_S и r_A – геоцентрические расстояния до КА и НП соответственно.

Представленная модель записана в шкале времени КА.

Модель 4. Модель доплеровских измерений, приведена в работе E. Grafarend и K. Heinz [181]. Моделируется число колебаний разностной частоты.

$$D = [f_g(t_0) - f_s(t_0)] \cdot T_S + f_g(t_0) \cdot C^{-1} \cdot (S_2 - S_1) + d_1 + d_2 + d_3 + d_4. \quad (\text{E.15})$$

Здесь

$$f_s(t) = f_s(t_0) + \dot{f}_s(t_0) \cdot (t - t_0) \quad (\text{E.16})$$

– текущее значение частоты КА в момент t посылки временной метки, оно является функцией частоты $f_s(t_0)$ опорного генератора спутника и скорости её ухода $\dot{f}_s(t_0)$ в момент синхронизации t_0 ;

$$f_g(t) = f_g(t_0) + \dot{f}_g(t_0) \cdot (t - t_0) \quad (\text{E.17})$$

– текущее значение частоты приёмника в момент t посылки временной метки, оно является функцией частоты $f_g(t_0)$ опорного генератора приёмника и скорости её ухода в момент t_0 ;

$$d_1 = (\dot{f}_g - \dot{f}_s) \cdot [(t_2 + t_1)/2 - t_0] \cdot T_s + \dot{f}_g \cdot C^{-1} \cdot [(t_2 + t_1)/2 - t_0] \cdot (S_2 - S_1) \quad (\text{E.18})$$

– поправка, учитывающая нестабильность опорных генераторов КА и приёмника;

$$d_2 = (f_g - f_s) \cdot (\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1) + C^{-1} \cdot f_s \cdot \left[\frac{dS(t_2)}{dt} \cdot \Delta\tau_2 - \frac{dS(t_1)}{dt} \cdot \Delta\tau_1 \right] \quad (\text{E.19})$$

– поправка, учитывающая дробную часть колебания разностной частоты;

$$d_3 = C^{-1} \cdot f_g \cdot (b_1 \cdot f_s^{-2} + b_2 \cdot f_s^{-4} - b_3 \cdot f_s^{-2} - b_4 \cdot f_s^{-4}) \quad (\text{E.20})$$

– поправка, учитывающая влияние ионосферной рефракции;

$$d_4 = C^{-1} \cdot f_g \cdot (a_2 \cdot \Delta S_2 - a_1 \cdot \Delta S_1) \quad (\text{E.21})$$

– поправка, учитывающая влияние тропосферной рефракции.

В формулах (E.15 – E.21) обозначено: T_s – интервал времени между двумя последовательными посылками временных меток с КА; S – наклонная дальность

между КА и НП; $a_1, a_2, b_1, \dots, b_4$ – неизвестные коэффициенты, численные значения которых находятся после математической обработки измерений; ΔS – поправка в наклонную дальность, обусловленная влиянием тропосферной рефракции.

Представленная модель записана в шкале времени КА.

Модель 5. Модель фазовых радиодальномерных измерений, приведена в работе G. L. Mader [187]. Моделируется разность фаз ΔP колебаний, порождаемых опорными генераторами передатчика КА и приёмника НП.

$$\Delta P = \tau \cdot (f_j - f_i) - f_j \cdot C^{-1} \cdot (R(t_\Gamma, t_G) + \dot{R}(t_\Gamma, t_G) \cdot \tau + R_{TR}), \quad (\text{E.22})$$

где f_i – частота колебаний опорного генератора приёмника;

$\dot{R}(t_\Gamma, t_G)$ – лучевая скорость КА в момент времени t_G ;

t_Γ – момент излучения электромагнитных колебаний частоты f_i с КА (в ССВ);

t_G – момент приёма сигнала аппаратурой НП (в ЛСВ);

τ – различие показаний часов в шкалах времени спутника и приёмника;

R_{TR} – тропосферная поправка в наклонную дальность НП-КА.

Наклонная дальность $R(t_\Gamma, t_G)$ до КА есть модуль вектора

$$R(t_\Gamma, t_G) = \mathbf{r}(t_G) - \dot{\mathbf{r}}(t_G) \cdot R(t_\Gamma, t_G) / C - \mathbf{R}(t_G), \quad (\text{E.23})$$

где $\mathbf{r}(t_G)$, $\dot{\mathbf{r}}(t_G)$, $\mathbf{R}(t_G)$ – геоцентрические радиус-векторы положения и скорости КА, а также положения НП в общеземной системе координат в момент t_G .

Модель 6. Модель фазовых радиодальномерных измерений, приведена в работе М. Век и др. [169]. Моделируется разность фаз Φ колебаний, порождаемых опорными генераторами передатчика КА и приёмника НП.

$$\Phi = -f \cdot C^{-1} \cdot \bar{\rho}, \quad (\text{E.24})$$

$$\bar{\rho} = \rho + C \cdot (\Delta t - \Delta T) + \delta\rho_{in} + \delta\rho_{TR}. \quad (E.25)$$

где f – номинальное значение частоты колебаний опорного генератора спутника;

$\bar{\rho}$ – наклонная псевдодальность до КА;

ρ – наклонная дальность НП-КА;

$\Delta t, \Delta T$ – поправки часов КА и НП, обусловленные уходом частот их опорных генераторов;

$\delta\rho_{in}, \delta\rho_{TR}$ – ионосферная и тропосферная поправки в наклонную дальность до КА.

Модель 7. Модель импульсных радиодальномерных измерений, приведена в работе Е. П. Чурова [159]. Моделируется интервал времени Δt между опорным импульсом и импульсом радиосигнала КА.

$$\Delta t = \rho \cdot C^{-1} + t_1 + t_2 + t_C, \quad (E.26)$$

где ρ – наклонная дальность до спутника;

t_1, t_2 – временные задержки радиоимпульса в передатчике КА относительно модулирующего импульса и в приёмнике НП;

t_C – интервал времени между моментами запуска развёртки бортового индикатора и появления модулирующего импульса, посланного с борта КА.

Результаты анализа моделей доплеровских измерений:

- ни в одном описании не оговаривается точность модели;
- в однотипных моделях учитываются различные поправки, наличие которых не обосновано и вызывает сомнение:

а) релятивистская поправка присутствует в моделях 1, 2 и 3, в модели 4 отсутствует. Эта же поправка имеется в моделях 2 и 3, где события разворачиваются в ССВ, а в модели 1 – в ЛСВ. Как будет показано в разделе 2, релятивистская поправка присутствует в моделях, записанных только в ЛСВ;

б) абберационная поправка, учитывающая вращение Земли за время распространения ЭМВ по линии КА-НП, присутствует в моделях 1, 2 и 3, в модели 4 отсутствует. Как будет показано в разделе 2, эта поправка должна учитываться в моделях, записанных только в ССВ. Если модель записана в ЛСВ, то должна учитываться абберационная поправка, обусловленная движением КА. Отсюда следует, что наличие поправки за вращение Земли в модели 1 ошибочно;

в) поправка за аппроксимацию есть только в модели 1;

г) временная задержка приемника в моделях 1 и 2 присутствует, а в моделях 3 и 4 отсутствует. Только в модели 4 имеется поправка за синхронизацию часов;

д) только в модели 4 учитывается нестабильность опорных генераторов передатчика и приемника;

е) только в моделях 1 и 4 есть поправки, учитывающие дробную часть колебаний, причем вид поправок различен;

– отмечается разночтение моделей:

а) в моделях 1, 2 и 3 различные знаки у релятивистской поправки;

б) различен вид поправок за абберацию в моделях 1, 2 и 3;

в) в моделях 1 и 2 различается вид поправок, учитывающих временную задержку приемника (в модели 1 опущен коэффициент fs/C);

г) в модели 1 у поправки за аппроксимацию опущена вторая степень скорости света;

д) в моделях 1 и 2 различен вид поправок, учитывающих дробную часть колебаний (в модели 1 отсутствует коэффициент fs/C);

е) в модели 2 переменная S является длиной траектории ЭМВ, следовательно, поправка за абберацию здесь не нужна;

– имеются некоторые неудобства и неясности при использовании моделей:

а) в модели 2 положения КА и НП вычисляются на различные моменты времени, что приведет к дополнительным сложностям в составлении машинных алгоритмов;

б) в модели 1 нет пояснения о различии между моментами времени τ и τ^* ,

не понятно также на какой (какие) момент времени вычисляются векторы $\bar{\mathbf{r}}$, $\bar{\mathbf{R}}$ и скорость V в абберационной и релятивистской поправках;

в) в моделях 2 и 3 нет пояснения на какие моменты времени задаются величины r_g , r_s , r_A и V_S в абберационной и релятивистской поправках.

Результаты анализа моделей радиодальномерных измерений:

- в моделях 5, 6 и 7 не учитывается релятивистская поправка;
- в описаниях не оговаривается точность моделей;
- в моделях 5 и 6 отсутствуют внутренние временные задержки приемника и передатчика, в модели 7 они присутствуют;
- в моделях 5 и 7 не учитывается нестабильность опорных генераторов приемной и передающей аппаратуры;
- в моделях 6 и 7 не сказано как определяется дальность ρ . Если это дальность на какой-то единый момент времени, то почему нет поправки за абберацию. Если это длина траектории ЭМВ, то не указано как она вычисляется;
- не установлено в какой шкале времени записаны модели 6 и 7.

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

(обязательное)

ИНТЕГРАЛ КВАДРАТА СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ДЛИНЫ ФАЗОВОГО ПУТИ
ЭМВ

Представим скорость $\dot{\hat{S}}$ в выражении под интегралом (2.71) как

$$\dot{\hat{S}}(\tau) = \dot{\hat{S}}(\tau_0) + a \cdot (\tau - \tau_0),$$

где τ_0 – начальный момент времени;

τ – текущий момент времени.

Коэффициент a является ускорением и определяется по формуле

$$a = (\dot{\hat{S}}(\tau) - \dot{\hat{S}}(\tau_0)) / (\tau - \tau_0). \quad (\text{Ж.1})$$

Теперь можно записать

$$\dot{\hat{S}}^2(\tau) = \dot{\hat{S}}^2(\tau_0) + a^2 \cdot (\tau - \tau_0)^2 + 2 \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_0) \cdot a \cdot (\tau - \tau_0). \quad (\text{Ж.2})$$

Подставив равенство (Ж.2) под интеграл выражения (2.71), получим

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{\tau_j} \dot{\hat{S}}^2(\tau) \cdot d\tau &= \int_{\tau_i}^{\tau_j} \dot{\hat{S}}^2(\tau_0) \cdot d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_j} a^2 \cdot (\tau - \tau_0)^2 \cdot d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_j} 2 \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_0) \cdot a \cdot (\tau - \tau_0) \cdot d\tau = \\ &= \dot{\hat{S}}^2(\tau_0) \cdot (\tau_j - \tau_i) + a^2 \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} (\tau - \tau_0)^2 \cdot d\tau + 2 \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_0) \cdot a \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} \tau \cdot d\tau - 2 \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_0) \cdot a \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} \tau_0 \cdot d\tau = \end{aligned}$$

$$= \dot{\hat{S}}^2(\tau_0) \cdot (\tau_j - \tau_i) + a^2 \cdot \int_{\tau_i}^{\tau_j} (\tau - \tau_0)^2 \cdot d\tau + a \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_0) \cdot (\tau_j^2 - \tau_i^2) - 2 \cdot a \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_0) \cdot (\tau_j - \tau_i) \cdot \tau_0 . \quad (\text{Ж.3})$$

Интеграл в выражении (Ж.3) можно представить как

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} (\tau - \tau_0)^2 \cdot d\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_j} (\tau^2 - \tau_0^2 - 2 \cdot \tau \cdot \tau_0) \cdot d\tau = (\tau_j^3 - \tau_i^3)/3 + \tau_0^2 \cdot (\tau_j - \tau_i) - \tau_0 \cdot (\tau_j^2 - \tau_i^2) . \quad (\text{Ж.4})$$

Положив $\tau_0 = \tau$, можно записать

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} (\tau - \tau_0)^2 \cdot d\tau = (\tau_j^3 - \tau_i^3)/3 + \tau_i^2 \cdot (\tau_j - \tau_i) - \tau_i \cdot (\tau_j^2 - \tau_i^2) = (\tau_j - \tau_i)^3 / 3 . \quad (\text{Ж.5})$$

Подставив интеграл из равенства (Ж.5) в выражение (Ж.3), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{\tau_j} \dot{\hat{S}}^2(\tau) \cdot d\tau &= \dot{\hat{S}}^2(\tau_i) \cdot (\tau_j - \tau_i) + a \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_i) \cdot (\tau_j - \tau_i) \cdot (\tau_j - \tau_i - 2 \cdot \tau_i) + a^2 \cdot (\tau_j - \tau_i)^3 / 3 = \\ &= \dot{\hat{S}}^2(\tau_i) \cdot (\tau_j - \tau_i) + a \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_i) \cdot (\tau_j - \tau_i)^2 + a^2 \cdot (\tau_j - \tau_i)^3 / 3 = \\ &= (\tau_j - \tau_i) \cdot (\dot{\hat{S}}^2(\tau_i) + a \cdot \dot{\hat{S}}(\tau_i) \cdot (\tau_j - \tau_i) + a^2 \cdot (\tau_j - \tau_i)^2 / 3) . \end{aligned} \quad (\text{Ж.6})$$

Теперь с учетом переменной “ a ” из формулы (Ж.1) интеграл в выражении (Ж.6) определится как

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} \dot{\hat{S}}^2(\tau) \cdot d\tau = (\tau_j - \tau_i) \cdot (\dot{\hat{S}}^2(\tau_i) + \dot{\hat{S}}(\tau_i) \cdot (\dot{\hat{S}}(\tau_j) - \dot{\hat{S}}(\tau_i)) + (\dot{\hat{S}}(\tau_j)\tau_j - \dot{\hat{S}}(\tau_i))^2 / 3) . \quad (\text{Ж.7})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ И

(рекомендуемое)

ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИОНОСФЕРНОЙ И ТРОПОСФЕРНОЙ ПОПРАВКИ

Таблица И.1 – Максимальные значения ионосферных поправок первого и второго порядков

Высота КА над горизонтом	Ионосферная поправка первого порядка (метры) для различных значений частот f_s (ГГц)					Ионосферная поправка второго порядка (метры) для частоты $f_s=400$ МГц
	$f_s=0,15$	$f_s=0,40$	$f_s=2,3$	$f_s=5,0$	$f_s=8,1$	
0°	3230	454	13,7	2,9	1,15	0,34
2°	3210	452	13,7	2,9	1,15	0,34
10°	2910	409	12,4	2,6	1,00	0,31
40°	1640	230	6,9	1,5	0,60	0,17
70°	1220	171	–	–	–	0,12
90°	1150	162	4,9	1,0	0,40	0,12

Примечание – Таблица составлена по данным работ [177, 186].

Таблица И.2 – Значения тропосферных поправок в наклонную дальность и лучевую скорость КА

Высота КА над горизонтом	Метеоданные: $T=293^\circ$, $P=1013$ мбар, $e=11$ мбар			
	Поправка в дальность (м)		Поправка в лучевую скорость (см/с)	
	С	Х	С	Х
5°	23,751	24,890	-62,92	-79,92
6°	20,818	21,400	-53,77	-60,80
8°	16,393	16,604	-35,84	-37,64
10°	13,419	13,520	-24,56	-25,21
12°	11,335	11,392	-17,65	-17,94
13°	10,516	10,560	-15,20	-15,40
15°	9,189	9,218	-11,57	-11,68
20°	7,003	7,016	-6,588	-6,623
25°	5,686	5,694	-4,203	-4,217
45°	3,412	3,414	-1,185	-1,187
65°	2,664	2,666	-0,432	-0,433
80°	2,452	2,454	-0,151	-0,150
90°	2,415	2,417	0,000	0,000

Таблица И.3 – Значения тропосферных поправок в наклонную дальность и лучевую скорость КА

Высота КА над горизонтом	Метеоданные: $T=273^\circ$, $P=1013$ мбар, $e=11$ мбар			
	Поправка в дальность (м)		Поправка в лучевую скорость (см/с)	
	С	Х	С	Х
5°	23,841	25,046	-63,28	-80,50
6°	20,893	21,531	-54,02	-61,21
8°	16,449	16,704	-35,98	-37,88
10°	13,464	13,600	-24,65	-25,37
12°	11,373	11,459	-17,71	-18,05
13°	10,551	10,623	-15,25	-15,49
15°	9,220	9,273	-11,61	-11,75
20°	7,026	7,057	-6,610	-6,662
25°	5,705	5,727	-4,217	-4,242
45°	3,423	3,434	-1,189	-1,194
65°	2,673	2,682	-0,434	-0,435
80°	2,460	2,468	-0,151	-0,151
90°	2,423	2,431	0,000	0,000

В таблицах И.2 и И.3 символ “С” означает, что в расчетах использовались формулы (2.189) и (2.203), а символ “Х” означает, что в расчетах использовались формулы (2.190) и (2.198).

Таблица И.4 – Значения тропосферной поправки TR в разность дальностей

Высота КА над горизонтом	Поправка в дальность δr_T (м)		Поправка в разность дальностей TR (м)	
	С	Х	С	Х
9,4°	14,245	14,406	-2,783	-2,856
11,9°	11,462	11,550	-2,004	-2,036
14,6°	9,458	9,514	-1,531	-1,548
17,6°	7,927	7,966	-1,186	-1,195
20,9°	6,741	6,771	-0,994	-1,001
24,8°	5,747	5,770	-0,798	-0,803
29,2°	4,949	4,967	-0,670	-0,673
34,4°	4,279	4,294	-0,554	-0,556
40,5°	3,725	3,738	-0,462	-0,465
47,9°	3,263	3,273	-0,362	-0,363
56,6°	2,901	2,910	-0,267	-0,268
66,9°	2,634	2,642	-0,161	-0,161
78,5°	2,473	2,481	-0,047	-0,047
87,3°	2,426	2,434	—	—

Примечание – Таблица составлена при $T_G = 30$ с для орбит спутников типа TRANZIT, а символы “С” и “Х” в ней означают, что в расчетах использовались формулы (2.189) и (2.190) соответственно.

ПРИЛОЖЕНИЕ К

(обязательное)

ВИД НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УРАВНЕНИЯХ ПОПРАВOK

В этом приложении приведем вывод аналитических выражений наиболее проблемных производных в уравнениях поправок, рассматриваемых в 2.7.

При взятии производных $\frac{\partial \Delta_G}{\partial \delta \Phi}$, $\frac{\partial \Delta_G}{\partial \delta f_s}$, $\frac{\partial \Delta_s}{\partial \delta \Phi}$ и $\frac{\partial \Delta_s}{\partial \delta f_s}$ для матриц \mathbf{E}_G и \mathbf{E}_s (2.221) в выражениях (2.131) и (2.132), определяющих сингулярные ошибки Δ_G и Δ_s , вместо ухода частоты δf_G приемника согласно равенству (2.68) примем

$$\delta f_G = \delta \Phi + \delta f_s. \quad (\text{K.1})$$

Для определения вида производной $\frac{\partial \Delta_s}{\partial \delta \tau}$ в выражении (2.132) следует выполнить замену

$$\delta t_s = \delta \tau - \delta \tau_G \quad (\text{K.2})$$

согласно равенству (2.136). Теперь можно записать

$$\frac{\partial \Delta_s}{\partial \delta \tau} = \frac{\partial \Delta_s}{\partial \delta t_s} \cdot \frac{\partial \delta t_s}{\partial \delta \tau} = n_j \cdot V(t_{\Gamma_j}) - n_i \cdot V(t_{\Gamma_i}). \quad (\text{K.3})$$

Для определения вида производных $\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \tau}$ и $\frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \tau}$ в выражениях (2.146) и (2.147) следует выполнить замену

$$\delta \tau_G = \delta \tau - \delta t_s. \quad (\text{K.4})$$

Тогда получим

$$\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \tau} = \frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \tau} = C - m \cdot V(\tau). \quad (\text{K.5})$$

Для определения вида производных $\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \Phi}$, $\frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \Phi}$, $\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \dot{\Phi}}$ и $\frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \dot{\Phi}}$ воспользуемся зависимостями (2.146), (2.147) для сингулярных ошибок Δ_τ , Δ_φ и (2.38) для временной задержки $\delta \tau_c$. Теперь можно записать

$$\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \Phi} = \frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \tau_c} \cdot \frac{\partial \delta \tau_c}{\partial \delta \Phi}, \quad (\text{K.6})$$

$$\frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \Phi} = \frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \tau_c} \cdot \frac{\partial \delta \tau_c}{\partial \delta \Phi}, \quad (\text{K.7})$$

$$\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \dot{\Phi}} = \frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \tau_c} \cdot \frac{\partial \delta \tau_c}{\partial \delta \dot{\Phi}}, \quad (\text{K.8})$$

$$\frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \dot{\Phi}} = \frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \tau_c} \cdot \frac{\partial \delta \tau_c}{\partial \delta \dot{\Phi}}. \quad (\text{K.9})$$

Дифференцирование выражения (2.38) по параметрам $\delta \Phi$ и $\delta \dot{\Phi}$ дает

$$\frac{\partial \delta \tau_c}{\partial \delta \Phi} = (\tau - \tau_0) / f_G^0, \quad (\text{K.10})$$

$$\frac{\partial \delta \tau_c}{\partial \delta \dot{\Phi}} = (\tau - \tau_0)^2 / 2 / f_G^0. \quad (\text{K.11})$$

Дифференцируя выражения (2.146) и (2.147) по параметру $\delta \tau_c$, используя при этом формулу (2.55) для масштабирующего коэффициента m , получим

$$\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \tau_c} = \frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \tau_c} = C \cdot m + C^{-1} \cdot \dot{\gamma}^2(\tau) = C - \dot{\gamma}(\tau) + C^{-1} \cdot \dot{\gamma}^2(\tau) = C - \dot{\gamma}(\tau) \cdot m. \quad (\text{K.12})$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \delta \Phi} = \frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \delta \Phi} = (C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0) / f_G^0, \quad (\text{K.13})$$

$$\frac{\partial \Delta_\tau}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \dot{\Phi}} = (C - m \cdot \dot{\gamma}(\tau)) \cdot (\tau - \tau_0)^2 / 2 / f_G^0. \quad (\text{K.14})$$

Чтобы получить производные в матрице $\frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{X}} = [\frac{\partial \Lambda'}{\partial \mathbf{r}} \quad \frac{\partial \Lambda'}{\partial \dot{\mathbf{r}}}]$, воспользуемся следующими зависимостями:

$$V(\tau) = \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau), \quad (\text{K.15})$$

$$\rho^2(\tau) = \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau), \quad (\text{K.16})$$

$$\boldsymbol{\rho}(\tau) = \mathbf{r}(\tau) - \mathbf{R}(\tau), \quad (\text{K.17})$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) = \dot{\mathbf{r}}(\tau) - \dot{\mathbf{R}}(\tau), \quad (\text{K.18})$$

$$\delta \rho_G = \rho(\tau_j) - \rho(\tau_i), \quad (\text{K.19})$$

$$\delta \rho_S = \rho(t_{\Gamma_j}) - \rho(t_{\Gamma_i}), \quad (\text{K.20})$$

где $V(\tau)$ – лучевая скорость КА в момент времени τ ;

$\rho(\tau)$ – топоцентрическое расстояние до КА;

$\boldsymbol{\rho}(\tau)$ – топоцентрический радиус-вектор КА;

$\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)$ – вектор топоцентрической скорости КА;

$\mathbf{r}(\tau)$ – геоцентрический радиус-вектор КА;

$\mathbf{R}(\tau)$ – геоцентрический радиус-вектор НП;

$\dot{\mathbf{r}}(\tau)$ – вектор геоцентрической скорости КА;

$\dot{\mathbf{R}}(\tau)$ – вектор геоцентрической скорости НП.

Продифференцируем лучевую скорость КА и разность дальностей по векторам $\mathbf{r}(\tau)$ и $\dot{\mathbf{r}}(\tau)$

$$\frac{\partial V(\tau)}{\partial \mathbf{r}(\tau)} = \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial \rho(\tau)} \cdot \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau)} + \frac{\partial V(\tau)}{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau)} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau)}{\partial \mathbf{r}(\tau)}, \quad (\text{K.21})$$

$$\frac{\partial V(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(\tau)} = \frac{\partial V(\tau)}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(\tau)}, \quad (\text{K.22})$$

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial \mathbf{r}(\tau)} = \frac{\partial \rho(\tau_j)}{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau_j)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau_j)}{\partial \mathbf{r}(\tau_j)} + \frac{\partial \rho(\tau_i)}{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau_i)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau_i)}{\partial \mathbf{r}(\tau_i)}, \quad (\text{K.23})$$

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial \dot{\mathbf{r}}(\tau)} = \frac{\partial \rho(\tau_j)}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau_j)} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau_j)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(\tau_j)} + \frac{\partial \rho(\tau_i)}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau_i)} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau_i)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(\tau_i)}. \quad (\text{K.24})$$

Здесь частные производные имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\tau)}{\partial \rho(\tau)} &= -\rho^{-2}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau), & \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau)} &= \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau), \\ \frac{\partial V(\tau)}{\partial \boldsymbol{\rho}(\tau)} &= \rho^{-1}(\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau), & \frac{\partial V(\tau)}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)} &= \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau), \\ \frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \mathbf{r}(\tau)} &= \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(\tau)} = \mathbf{E}, & \frac{\partial V(\tau)}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)} &= \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau), \end{aligned} \quad (\text{K.25})$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размерности 3×3 .

Теперь можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\tau)}{\partial \mathbf{r}(\tau)} &= -\rho^{-2}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) + \rho^{-1}(\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) = \\ &= \rho^{-1}(\tau) \cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - \rho^{-2}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau)) = \rho^{-1}(\tau) \cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - V(\tau) \cdot \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau)) = \\ &= \rho^{-1}(\tau) \cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - \mathbf{V}(\tau)), \end{aligned} \quad (\text{K.26})$$

$$\frac{\partial V(\tau)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(\tau)} = \rho^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau), \quad (\text{K.27})$$

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial \mathbf{r}(\tau)} = \rho^{-1}(\tau_j) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau_j) - \rho^{-1}(\tau_i) \cdot \boldsymbol{\rho}^T(\tau_i), \quad (\text{K.28})$$

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial \dot{\mathbf{r}}(\tau)} = 0. \quad (\text{K.29})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Л

(обязательное)

ОШИБКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭВО

Таблица Л.1 - Абсолютные ошибки углов поворота $\delta\omega$ и вектора смещения δdR в случае абсолютных ГНСС-измерений

Фигура	Средняя длина линии 2,5 км			Средняя длина линии 5 км			Средняя длина линии 10 км			Средняя длина линии 20 км			Средняя длина линии 40 км			Средняя длина линии 80 км		
	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\delta\omega$	δdR	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\delta\omega$	δdR	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\delta\omega$	δdR	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\delta\omega$	δdR	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\delta\omega$	δdR	$\mu(A)$ $\times 10^9$	$\delta\omega$	δdR
Треуголь- -ник	35	1,74	27,2	22	1,74	27,2	11	1,73	27,2	4,7	1,73	26,1	2,6	1,72	27,1	1,3	1,70	27,0
		0,69	43,0		0,69	43,0		0,68	42,9		0,68	42,8		0,68	42,5		0,67	42,0
		0,55	32,0		0,55	32,0		0,56	32,0		0,56	32,0		0,56	31,9		0,56	31,7
3 луча	38	1,74	27,2	20	1,74	27,2	11	1,73	27,1	4,7	1,73	27,0	2,8	1,73	26,9	1,4	1,71	26,6
		0,69	43,0		0,68	43,0		0,68	42,9		0,68	42,8		0,68	42,6		0,67	42,2
		0,54	32,0		0,56	32,0		0,56	32,0		0,55	32,0		0,55	31,9		0,54	31,9
4 луча	29	1,74	27,4	17	1,74	27,4	7,8	1,74	27,2	4,0	1,74	27,1	2,1	1,73	27,1	1,0	1,72	27,0
		0,68	43,1		0,68	43,0		0,68	43,0		0,68	42,9		0,68	42,8		0,68	42,6
		0,57	32,0		0,57	32,0		0,56	32,0		0,56	32,0		0,56	32,0		0,56	32,0
Четырех- угольник	37	1,79	25,6	18	1,79	25,6	8,2	1,79	25,7	4,1	1,78	25,8	2,0	1,78	26,0	1,0	1,76	26,5
		0,66	44,5		0,66	44,4		0,66	44,4		0,66	44,3		0,67	44,1		0,67	43,7
		0,51	32,7		0,50	32,7		0,51	32,7		0,51	32,6		0,52	32,5		0,54	32,3

Примечания

1 Численные значения $\delta\omega$ представлены в угловых секундах.2 Численные значения δdR представлены в метрах.

Таблица Л.2 - Абсолютные ошибки углов поворота $\delta\omega$ в случае относительных ГНСС-измерений

Фигура	Средняя длина линии 2,5 км		Средняя длина линии 5 км		Средняя длина линии 10 км		Средняя длина линии 20 км		Средняя длина линии 40 км		Средняя длина линии 80 км	
	$\mu(A)$	$\delta\omega$	$\mu(A)$	$\delta\omega$	$\mu(A)$	$\delta\omega$	$\mu(A)$	$\delta\omega$	$\mu(A)$	$\delta\omega$	$\mu(A)$	$\delta\omega$
Треугольник	$2,1 \cdot 10^3$	2,234	$4,0 \cdot 10^3$	3,488	$7,1 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^4$	13,427	$2,8 \cdot 10^4$	26,66	$5,7 \cdot 10^4$	55,50	
		1,560		4,088			12,603		24,91		49,52	
		1,181		3,058			9,243		19,76		37,09	
3 луча	$9,3 \cdot 10^2$	211,4	$1,5 \cdot 10^2$	1,499	83	67	0,179	66	0,127	66	0,106	
		131,7		1,755			0,168		0,118		0,096	
		109,6		1,316			0,124		0,087		0,071	
4 луча	2,8	0,002	3,4	0,001	3,1	3,3	0,001	3,4	0,001	3,4	0,001	
		0,006		0,002			0,001		0,001		0,001	
		0,002		0,001			0,000		0,000		0,000	
Четырехугольник	$7,4 \cdot 10^2$	137,14	$2,8 \cdot 10^2$	6,778	$2,2 \cdot 10^2$	$1,9 \cdot 10^2$	0,752	$1,4 \cdot 10^2$	0,273	$1,3 \cdot 10^2$	0,086	
		1,068		0,083			0,011		0,005		0,002	
		0,660		0,037			0,003		0,001		0,001	
Четырехугольник (1 диагональ)	2,2	0,003	2,2	0,003	2,2	2,4	0,003	2,3	0,003	2,3	0,003	
		0,000		0,000			0,000		0,000		0,000	
		0,000		0,000			0,000		0,000		0,000	
Четырехугольник (2 диагонали)	1,6	0,000	1,6	0,000	1,5	1,4	0,000	1,4	0,000	1,4	0,000	
		0,000		0,000			0,000		0,000		0,000	
		0,000		0,000			0,000		0,000		0,000	

Примечание - Численные значения $\delta\omega$ представлены в угловых секундах

ПРИЛОЖЕНИЕ М

(обязательное)

ОШИБКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТ НАЗЕМНЫХ ПУНКТОВ

Таблица М.1 – Распределение абсолютных ошибок высоты по сеансам измерений для наземного пункта 1

Угол отсечки	Абсолютные ошибки высоты (м)	Среднее значение абсолютной ошибки (м)
10°	42,1 13,6 30,8 16,5 29,6 27,8 19,9 20,3 16,4 15,1	23,2
12°	41,0 16,2 30,7 18,8 32,5 27,8 18,7 21,9 16,4 15,5	24,0
14°	41,8 15,0 28,5 28,4 33,8 27,0 18,8 27,3 16,4 17,0	25,4
16°	44,9 14,7 28,5 28,0 32,4 24,5 24,2 30,9 17,8 18,9	26,5
18°	45,1 10,4 27,6 16,1 29,4 20,3 27,9 32,0 20,9 20,4	25,0
20°	49,3 13,2 25,8 13,6 25,1 0,2 27,5 24,3 28,1 15,1	22,2
22°	48,9 13,0 29,0 7,1 2,9 0,2 32,4 21,0 32,3 12,2	19,9
24°	43,1 17,1 27,5 9,0 11,3 24,2 25,0 18,0 37,9 7,0	22,0
26°	44,4 20,0 23,8 10,8 18,9 13,4 18,0 26,7 55,3 4,5	23,6
28°	38,5 12,2 32,9 1,7 26,8 14,1 24,3 30,3 40,7 6,9	22,8
30°	30,8 0,0 31,5 0,5 22,4 12,4 24,9 33,2 41,4 1,7	19,9
32°	25,1 10,5 22,7 11,7 13,1 21,2 32,2 24,9 17,6 3,6	18,3
34°	27,1 23,7 15,8 17,6 1,3 21,2 3,9 23,4 1,8 5,4	14,1
36°	32,6 15,8 24,2 21,2 1,8 2,0 10,8 29,7 7,9 4,4	15,0
38°	28,6 8,9 24,9 4,7 14,5 33,2 6,2 51,6 35,9 0,2	20,9
40°	24,8 9,2 42,8 0,0 0,6 15,5 9,8 62,2 39,1 6,6	21,1
42°	31,6 16,8 – 8,0 3,1 25,1 3,7 – 44,4 59,8	24,1
44°	43,3 28,8 – 48,4 6,5 24,3 8,6 – 74,0 66,2	37,5

Таблица М.2 – Распределение абсолютных ошибок высоты по сеансам измерений для наземного пункта 2

Угол отсечки	Абсолютные ошибки высоты (м)								Среднее значение абсолютной ошибки (м)
10°	8,7	28,2	22,0	27,2	21,4	7,0	0,4		16,4
12°	4,1	29,2	21,2	31,9	21,4	6,4	1,4		16,5
14°	7,4	30,0	22,1	28,7	21,4	2,9	2,0		16,4
16°	7,4	28,1	16,5	23,9	20,4	4,7	0,1		14,4
18°	1,1	22,3	19,7	27,2	18,5	0,8	1,9		13,1
20°	1,1	25,7	25,4	22,6	16,4	3,3	14,1		15,5
22°	1,1	25,7	28,8	19,3	17,9	5,7	18,6		16,7
24°	3,2	28,9	34,7	15,5	14,9	3,8	23,4		17,8
26°	9,6	25,4	27,5	21,3	5,7	4,6	30,3		17,8
28°	11,5	22,2	21,7	29,3	7,2	8,0	30,6		18,6
30°	17,0	12,9	9,2	34,7	9,5	15,6	32,3		18,7
32°	23,2	8,2	6,0	30,0	15,5	25,4	46,4		22,1
34°	35,1	3,8	10,8	23,5	6,2	19,0	48,3		21,0
36°	61,0	4,4	13,6	14,8	8,7	3,9	15,5		17,4
38°	46,6	2,4	15,9	7,2	14,6	7,0	5,7		14,2
40°	57,7	2,2	13,2	4,2	0,4	2,4	5,7		12,3
42°	44,0	7,0	26,9	9,4	16,3	2,1	2,4		15,4
44°	13,7	0,6	8,1	21,2	23,1	20,2	12,8		14,2

ПРИЛОЖЕНИЕ Н
(рекомендуемое)
ПРОТОКОЛ УТИЛИТЫ "Baselines"

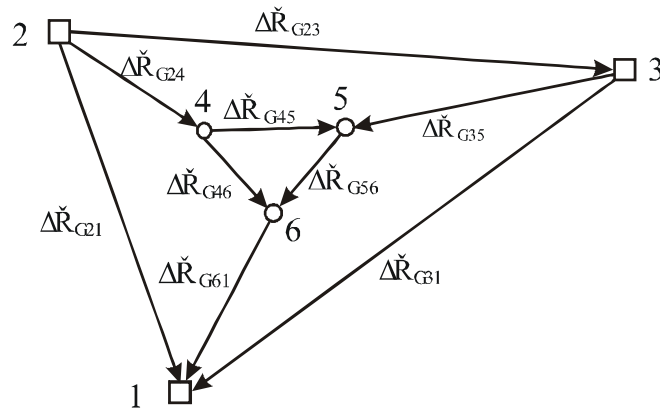
Project Name:	Samburg					
Processed:	10 July 2003 22:35					
	WAVE 2.35					
Solution Output File (SSF):	00000156.SSF					
From Station:	1278					
Data file:	12780001.DAT					
Antenna Height (meters):	1.320 True Vertical					
Position Quality:	Point Positioning					
WGS 84 Position:	66° 41' 01.648603" N	X	555518.862			
	77° 19' 28.300651" E	Y	2469961.349			
	11.506	Z	5834555.876			
To Station:	1481					
Data file:	14810000.DAT					
Antenna Height (meters):	1.181 True Vertical					
WGS 84 Position:	66° 41' 06.489756" N	X	555290.749			
	77° 19' 44.835337" E	Y	2469871.936			
	12.614	Z	5834616.250			
Start Time:	16.06.03 12:58:45,00 GPS	(1223	133125.00)			
Stop Time:	16.06.03 14:20:15,00 GPS	(1223	138015.00)			
Occupation Time	Meas. Interval (seconds):	01:21:30,00	15.00			
Solution Type:	L1 fixed double difference					
Solution Acceptability:	Passed ratio test					
Ephemeris:	Broadcast					
Met Data:	Standard					
Baseline Slope Distance	Std. Dev. (meters):	252.339	0.000346			
		Forward	Backward			
Normal Section Azimuth:	53° 32' 05.022988"	233° 32' 20.207455"				
Vertical Angle:	0° 15' 01.954936"	-0° 15' 10.095274"				
Baseline Components (meters):	dx	-228.112	dy	-89.413	dz	60.373
Standard Deviations (meters):		0.000299		0.000800		

ПРИЛОЖЕНИЕ П

(рекомендуемое)

ПРИМЕР ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПОПРАВК

В качестве примера на простой схеме геодезической сети (рисунок П.1) рассмотрим последовательность формирования системы линейных уравнений поправок вида (4.36). Будем полагать, что в этой сети измерены базовые векторы $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,4}$, $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G3,5}$, $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G6,1}$, $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G4,5}$, $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G4,6}$ и $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G5,6}$.



□ – исходный НП; ○ – определяемый НП

Рисунок П.1 – Схема геодезической сети

Для этой сети система линейных уравнений поправок будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}'_{41} \cdot \delta\omega + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_5 - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G6,1} - \Delta\mathbf{R}'_{G6,1} + \mathbf{V}_1, \\
 \mathbf{D}'_{42} \cdot \delta\omega + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G2,4} - \Delta\mathbf{R}'_{G2,4} + \mathbf{V}_2, \\
 \mathbf{D}'_{43} \cdot \delta\omega + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G3,5} - \Delta\mathbf{R}'_{G3,5} + \mathbf{V}_3, \\
 \mathbf{D}'_{44} \cdot \delta\omega - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G4,5} - \Delta\mathbf{R}'_{G4,5} + \mathbf{V}_4, \\
 \mathbf{D}'_{45} \cdot \delta\omega + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_4 - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G5,6} - \Delta\mathbf{R}'_{G5,6} + \mathbf{V}_5, \\
 \mathbf{D}'_{46} \cdot \delta\omega - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_4 + \mathbf{0} \cdot \delta\mathbf{R}_5 + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{R}_6 &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G4,6} - \Delta\mathbf{R}'_{G4,6} + \mathbf{V}_6.
 \end{aligned} \tag{П.1}$$

Приближенные значения измеренных значений базовых векторов для данной сети можно получить следующим образом. Сначала вычисляются приближенные значения пространственных координат определяемых НП (геоцентрические радиус-векторы \mathbf{R}'_{Γ_4} , \mathbf{R}'_{Γ_5} и \mathbf{R}'_{Γ_6} в референцной системе) по известным координатам опорных НП и измеренным значениям $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{2,4}}$, $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{3,5}}$ и $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{6,1}}$ базовых векторов (с учетом их направленности) по формулам

$$\mathbf{R}'_{\Gamma_4} = \mathbf{R}_{\Gamma_2} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{2,4}}, \quad \mathbf{R}'_{\Gamma_5} = \mathbf{R}_{\Gamma_3} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{3,5}}, \quad \mathbf{R}'_{\Gamma_6} = \mathbf{R}_{\Gamma_1} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{6,1}}. \quad (\text{П.2})$$

Затем при $\omega'=0$ вычисляются значения базовых векторов $\Delta\mathbf{R}'_G$ как

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{R}'_{G_{6,1}} &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{6,1}}, & \Delta\mathbf{R}'_{G_{3,5}} &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{3,5}}, & \Delta\mathbf{R}'_{G_{2,4}} &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{G_{2,4}}, & (\text{П.3}) \\ \Delta\mathbf{R}'_{G_{4,5}} &= \mathbf{R}'_{\Gamma_5} - \mathbf{R}'_{\Gamma_4}, & \Delta\mathbf{R}'_{G_{4,6}} &= \mathbf{R}'_{\Gamma_6} - \mathbf{R}'_{\Gamma_4}, & \Delta\mathbf{R}'_{G_{5,6}} &= \mathbf{R}'_{\Gamma_6} - \mathbf{R}'_{\Gamma_5}. \end{aligned}$$

Далее, на основе измеренных компонент базовых векторов $\Delta\tilde{\mathbf{R}}$, формируются матрицы \mathbf{D}'_{41} , ..., \mathbf{D}'_{45} , \mathbf{D}'_{46}

$$\mathbf{D}'_{41} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\tilde{Z}_{G_{6,1}} & \Delta\tilde{Y}_{G_{6,1}} \\ \Delta\tilde{Z}_{G_{6,1}} & 0 & -\Delta\tilde{X}_{G_{6,1}} \\ -\Delta\tilde{Y}_{G_{6,1}} & \Delta\tilde{X}_{G_{6,1}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{D}'_{46} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\tilde{Z}_{G_{4,6}} & \Delta\tilde{Y}_{G_{4,6}} \\ \Delta\tilde{Z}_{G_{4,6}} & 0 & -\Delta\tilde{X}_{G_{4,6}} \\ -\Delta\tilde{Y}_{G_{4,6}} & \Delta\tilde{X}_{G_{4,6}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.4})$$

После решения системы линейных уравнений (П.1) по формулам (4.29) находятся уточненные численные значения радиус-векторов \mathbf{R}_{Γ_i} определяемых НП, то есть

$$\mathbf{R}_{\Gamma_4} = \mathbf{R}'_{\Gamma_4} + \delta\mathbf{R}_4, \quad \mathbf{R}_{\Gamma_5} = \mathbf{R}'_{\Gamma_5} + \delta\mathbf{R}_5, \quad \mathbf{R}_{\Gamma_6} = \mathbf{R}'_{\Gamma_6} + \delta\mathbf{R}_6. \quad (\text{П.5})$$