

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

На правах рукописи



Некрасова Ольга Игоревна

Уточненная методика определения гравитационных
характеристик локальных природных и техногенных объектов

25.00.32 – Геодезия

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
технических наук

Научный руководитель –
доктор технических наук
Мазуров Борис Тимофеевич

Новосибирск – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ОСНОВНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ.....	8
1.1 Гравитационное поле Земли и потенциал силы тяжести.....	8
1.2 Значения силы тяжести.....	11
1.3 Редуцирование измеряемого гравитационного поля и аномалий силы тяжести	14
1.4 Потенциал силы тяжести	15
1.5 Нормальный потенциал и нормальное поле.....	17
1.6 Сила тяжести и высота	19
1.7 Уклонение отвеса и составляющие уклонений отвесных линий.....	20
1.8 Роль и основные направления исследований в геодезии в настоящее время, использующие данные о поле силы тяжести.....	26
1.9 Влияние изменений силы тяжести вблизи водохранилищ.....	27
1.10 Движения земной коры и сила тяжести.....	32
1.11 Выводы.....	36
2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	37
2.1 Прямая и обратная задачи	37
2.2 Гравитационное поле и распределение плотности.....	38
2.3 Решение прямых задач.....	39
2.4 Вариации гравитационного потенциала и его характеристик.....	47
2.5 Потенциалы правильных гравитирующих тел.....	49
2.6 Двухмерные задачи гравиметрии.....	51
2.7 Трехмерные задачи гравиметрии.....	55
2.8 Примеры использования аналитических моделей при обработке геодезических измерений на природных и техногенных объектах.....	61
2.9 Построение физико-математической модели динамики земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области.....	67
2.10 Модели водохранилища.....	70
2.11 Выводы.....	73

3	ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИРОДНЫХ И ТЕХНОГЕННЫХ ОБЪЕКТОВ.....	74
3.1	Аппроксимационные модели.....	74
3.2	Одноточечная и пятиточечная модели аппроксимации гравитационного влияния конуса и их сравнительный анализ.....	76
3.3	Детализированная конечно-элементная модель аппроксимации гравитационного влияния конуса.....	82
3.4	Влияние уклонений отвесной линии на измеряемые величины.....	88
3.5	Конечно-элементное моделирование для определения гравитационных характеристик природных и техногенных объектов с использованием цифровых моделей рельефа локального масштаба....	92
3.6	Выводы.....	115
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	116
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	117
	ПРИЛОЖЕНИЕ А (справочное) ПОТЕНЦИАЛ КОНУСА.....	130
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б (справочное) ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕННЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ МАСС НА ПОТЕНЦИАЛ.....	131
	ПРИЛОЖЕНИЕ В (справочное) ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕННЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ МАСС НА СИЛУ ТЯЖЕСТИ.....	132
	ПРИЛОЖЕНИЕ Г (справочное) ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕННЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ МАСС НА УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ.....	133
	ПРИЛОЖЕНИЕ Д (справочное) ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕННЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ МАСС НА АНОМАЛИЮ ВЫСОТЫ.....	134
	ПРИЛОЖЕНИЕ Ж (обязательное) АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА НА ПРИМЕРЕ ПОВЕРХНОСТИ ГОРНЫХ ХРЕБТОВ НА ПОЛУОСТРОВЕ КАМЧАТКА...	135

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Определение гравитационного поля Земли, изменение его в пространстве и во времени является одной из важнейших областей исследований в геодезии.

Достигнутая к настоящему времени точность геодезических и гравиметрических измерений позволяет детализировать представление о пространственно-временной структуре гравитационного поля Земли. Вариации поля силы тяжести уже используются для выявления природных и техногенных геодинамических явлений. Подробные данные о структуре гравитационного поля необходимы для повышения точности и объективности геодинамического мониторинга состояния территорий с потенциально опасными процессами и явлениями для уменьшения риска возникновения кризисных ситуаций.

Локальные и региональные деформации земной поверхности происходят не только по природным причинам, но и из-за техногенной деятельности человека. Сила тяжести изменяется в связи с техногенными перераспределениями масс на земной поверхности, имеет локальный характер, зависит от объема и плотности перемещаемых масс. Соответственно, для выполнения корректной обработки и интерпретации геодезических измерений существует необходимость комплексного учета сложной пространственной и плотностной структуры гравитирующих тел.

При этом важна роль соответствующих корректных методов анализа гравитационного поля и используемых математических моделей. Сложность форм гравитирующих тел и их различные свойства являются одной из причин внимания к математическому обоснованию методов учета их гравитационного влияния. Существующие аналитические модели гравитационного влияния для определения гравитационных характеристик применимы лишь для ограниченного класса пространственных масс. Поэтому технологически рациональным является использование конечно-элементного метода при численном моделировании пространственных форм реальных природных и техногенных объектов, напри-

мер конуса. Таким образом, совершенствование методики, позволяющей детально определять гравитационные характеристики этих объектов, является актуальным.

Степень разработанности темы. Научные исследования гравитационного поля имеют трехвековую историю. За это время произошли кардинальные изменения методов измерений, их обработки и интерпретации. Использованию данных о гравитационном поле для решения задач геодезии посвящены исследования русских ученых: Красовского Ф. Н., Казанского И. А., Молоденского М. С., Пеллинена Л. П., Еремеева В. Ф., Юркиной М. И., Бровара В. В., Бровара Б. В. и др. Вклад этих ученых был значительным для фундаментальной науки периода недостаточной информационной, компьютерной поддержки и инфраструктуры.

Научные исследования в области определения гравитационного поля Земли, как в России, так и за рубежом, охватывают глобальный, региональный и локальный масштаб территорий. Однако теоретическая и аналитическая основы учета гравитирующих масс правильной формы не являются в настоящее время универсальными. Они не соответствуют современному уровню геодезических и гравиметрических измерений. Кроме того, существующие методики конечно-элементной аппроксимации, в основном, подразумевают использование точечных масс. Объединение известных аналитических моделей, конечно-элементного метода и развитой системы цифровых моделей объектов позволит методически улучшить и практически реализовать определение гравитационных характеристик природных и техногенных объектов.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка и исследование методики и алгоритмов определения гравитационных характеристик природных и техногенных объектов на основе аналитических, конечно-элементных и цифровых моделей.

Для достижения поставленной цели были решены следующие основные задачи:

– анализ методик моделирования гравитационного влияния пространственных тел, обоснование целей и задач исследований;

– моделирование конусообразных элементов локальных природных и техногенных объектов;

– разработка методики и технологического решения определения гравитационных характеристик локальных природных и техногенных объектов с использованием их цифровых моделей;

– выполнение исследований разработанной методики на реальных моделях с целью определения гравитационных характеристик смоделированных и реальных природных объектов с учетом их различной плотности.

Научная новизна результатов исследования состоит в следующем:

– уточнена методика определения гравитационных характеристик локальных природных и техногенных объектов на основе комплексирования аналитических, конечно-элементных и цифровых моделей, что позволяет автоматизировать вычисления и повысить точность определения параметров;

– в результате исследований предложенного подхода на основе разбиения конечно-элементными кольцевыми секторами конусообразных форм рельефа выявлено, что использование данной модели позволяет с высокой точностью описать гравитационные характеристики объекта для учета их в геодезических и гравиметрических измерениях.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы заключается в математическом обосновании методик определения гравитационных характеристик на основе детализации локальных природных и техногенных объектов.

Практическая значимость работы состоит в возможности детального определения гравитационного влияния природных и техногенных объектов с использованием аналитических моделей, конечно-элементного метода и цифровых моделей объектов. Это позволяет повысить достоверность интерпретации результатов геодезических, астрономических и гравиметрических измерений, выполнить оптимизацию проектирования геодезических построений.

Методология и методы исследования. Использовались теория и методы определения внешнего поля силы тяжести Земли, методы статистики и теория по-

грешностей, метод статистического и аналитического моделирования. Для численной детализации влияния гравитирующих объектов применялись их цифровые модели и метод конечных элементов.

Положения, выносимые на защиту:

– алгоритмы и методика определения детальных гравитационных характеристик локальных природных и техногенных объектов на основе комплексного использования конечно-элементного метода, аналитических и цифровых моделей обеспечивают достоверность интерпретации и повышение точности аппроксимации влияния гравитирующих объектов;

– модели разбиения конечными элементами, как кольцевыми секторами, так и вытянутыми параллелепипедами, конусообразных форм природных и техногенных объектов позволяют с высокой точностью описать гравитационные характеристики объектов для учета их в геодезических и гравиметрических измерениях и выполнить более точную аппроксимацию их гравитационного влияния;

– реализация технологических и методологических решений с использованием смоделированных и реальных природных объектов подтверждает новизну разработанной методики определения гравитационных характеристик.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность полученных результатов подтверждена вычислительными экспериментами по обработке модельных и реальных цифровых моделей рельефа (ЦМР) различных объектов.

Основные положения диссертации и результаты исследований докладывались и обсуждались на Международных научных конгрессах «ГЕО-Сибирь» (2010 г., 2011 г., г. Новосибирск), «Интерэкспо ГЕО-Сибирь» (2012 г., 2013 г., г. Новосибирск).

Результаты диссертационной работы внедрены в учебный процесс федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий».

1 ОСНОВНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1.1 Гравитационное поле Земли и потенциал силы тяжести

Земное гравитационное поле является результирующим силовым полем, которое создаётся вращением Земли, земными массами и массами космических тел.

Глобальное перераспределение масс оказывает влияние на изменения гравитационного поля, на скорости вращения Земли, на изменения положений геоцентра [7].

Проблема нестабильности гравитационного поля Земли привлекает большой круг специалистов и затрагивает интересы различных наук [10]. В работе [25] приводят вывод аналитических выражений, которые учитывают влияние изменения гравитационного поля Земли на движение искусственного спутника.

Чтобы определить гравитационное поле и поверхность Земли привлекаются результаты измерений, таких как геометрическое нивелирование; триангуляция и полигонометрия; астрономические определения; измерение зенитных расстояний; измерения силы тяжести; наблюдения искусственных спутников Земли (ИСЗ) и космических объектов.

Гравитационное поле Земли (ГПЗ) и его характеристики определяются потенциалом силы тяжести W ($\text{м}^2\text{с}^{-2}$), его важно вычислять для определения фигуры Земли. Потенциал представляет собой работу, которая необходима для перемещения единичной массы в поле силы тяжести. Потенциал силы тяжести находят, как сумму потенциалов силы притяжения V и центробежной силы Q

$$W=V + Q. \quad (1)$$

В связи с тем, что во внешнем пространстве потенциал притяжения удовлетворяет уравнению Лапласа [72], а во внутреннем – уравнению Пуассона, тогда потенциал силы тяжести будет равен:

во внешнем пространстве

$$\Delta W = 2\omega^2, \quad (2)$$

во внутреннем пространстве

$$\Delta W = -4\pi f \Delta \rho + 2\omega^2. \quad (3)$$

Разности потенциалов силы тяжести можно определить из результатов измерения силы тяжести вдоль нивелирных линий и геометрического нивелирования.

Для изучения гравитационного поля Земли представляют гравитационное поле ее как функцию сферических координат, в виде конечной суммы сферических гармоник. С помощью таких математических моделей можно получить параметры гравитационного поля Земли, причем в любой точке внешнего пространства Земли и на конкретный момент времени [89]. На основе линейной аппроксимации аномального потенциала и его трансформант создают различные математические модели ГПЗ, которые можно использовать в автоматизированных системах изыскания и проектирования [106]. Полученная информация о гравитационном поле Земли используется в различных науках [4].

Аномальное гравитационное поле отражают суммарным действием гравитирующих масс, которые могут быть расположены на различных глубинах в верхней мантии и в земной коре. Чтобы однозначно решить вопрос о природе аномалий, гравитационные поля необходимо разделять на региональные и локальные. Региональные гравитационные поля создаются глубоко залегающими массами, а локальные гравитационные поля создаются местными геологическими неоднородностями разреза.

В зависимости от исходной информации математическими моделями ГПЗ на земной поверхности являются: планетарные, локальные и комбинированные. Планетарные модели описывают волновую структуру всей Земли в целом, но для

описания ГПЗ требуются высокие степени и порядки математических моделей. Локальные модели позволяют описать структуру поля на участке земной поверхности благодаря моделированию высокочастотной части спектра гравитационного поля более низкими степенями и порядками. Комбинированные методы являются более универсальными и экономичными. Комбинированные модели представляются планетарной моделью ГПЗ, которая дополнена отдельными более высокими планетарными сферическими гармониками.

Развитие современных технологий проектирования и изысканий связано с применением геодезической информации и математических моделей внешнего ГПЗ. Растущий прогресс инструментальных методов в изучении ГПЗ благоприятствует созданию новых глобальных и региональных моделей ГПЗ с повышением точности и детальности модели. Метод сферических гармоник и метод цифровых моделей, являются распространенными методами моделирования ГПЗ. В работе [106] освещен вопрос, как новые модели ГПЗ способствуют развитию автоматизированных систем изысканий и проектирования. В различные годы использовалось множество моделей.

Запуск искусственных спутников Земли, расширил возможности изучения гравитационного поля Земли и других планет [19].

Для решения задач связанных с созданием геофизических и геодинамических моделей для больших регионов земной поверхности, с определением орбит ИСЗ, необходимы глобальные модели гравитационного поля. Указанные модели основаны на разложении в ряд по шаровым функциям аномалий силы тяжести Δg или возмущающего потенциала T .

Решение задач, с помощью моделей ГПЗ, находят по вычислению главных трансформант аномального гравитационного потенциала T . Таких как, аномалия высоты ζ , аномалия силы тяжести Δg и составляющие уклонения отвесных линий ξ, η [68].

1.2 Значения силы тяжести

Измерения значения силы тяжести выполняют на физической поверхности земли, под земной поверхностью и под водой.

Приведем формулы, применяемые для определения значения нормальной силы тяжести. Силу тяжести на поверхности уровенного эллипсоида по формуле Сомильяна определяют, как

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (4)$$

где a и b – большая и малая полуоси уровенного эллипсоида;

B – геодезическая широта;

γ_p – нормальная сила тяжести на полюсе эллипсоида;

γ_e – нормальная сила тяжести на экваторе.

Формула (4) в конечной форме выражает закон изменения силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида вращения [27, 64, 95].

Первая формула Клеро имеет вид

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B), \quad (5)$$

что выражает закон распределения нормальной силы тяжести на уровенном эллипсоиде. Сравнивая значения нормальной силы тяжести γ с действительными значениями g , можно получить аномалии силы тяжести ($g - \gamma$), значение которых необходимо в теории фигуры Земли, геофизике, разведке полезных ископаемых. Формула (6) называется второй формулой Клеро, она имеет большое значение, поскольку позволяет определить сжатие земного эллипсоида, формула (7)

$$\alpha + \beta = (5/2) q, \quad (6)$$

$$\alpha = (5/2) q - \beta. \quad (7)$$

Формула (8) нормальной силы тяжести описывает функцию геодезической широты B и геодезической высоты h для определенной модели Земли (эллипсоида) [90]. Зависимость от широты задается в формулах в виде ряда (5), члены порядка f^2 удерживаются

$$\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (8)$$

где β - гравиметрическое сжатие,

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}. \quad (9)$$

Величина β_1 связанная со сжатием f и величиной m выражением

$$\beta_1 = (-1/8)f^2 + (5/8)fm, \quad (10)$$

$$f = \frac{a-b}{a}, \quad (11)$$

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e}. \quad (12)$$

В таблице 1 приведены коэффициенты формул нормальной силы тяжести, используемых для вычисления гравитационных аномалий [90].

Таблица 1 – Коэффициенты формул нормальной силы тяжести

Наименование	$\gamma_e, \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	β	β_1	f
Гельмерт, 1901 г.	9,780 30	0,005 3020	0,000 007	1 : 298,3
Береговая и геодезическая съемка США (Боуи, 1917 г.)	9,780 39	0,005 2940	0,000 007	1 : 297,4

Продолжение таблицы 1

Наименование	$\gamma_e, \text{м}\cdot\text{с}^{-2}$	β	β_1	f
Международная формула (нормальной) силы тяжести (Кассинис, 1930 г.)	9,780 49	0,005 2884	0,000 0059	1 : 297,0
Геодезическая референц-система 1967 г. (МАГ, 1971 г.)	9,780 318 *	0,005 3024	0,000 0059	1 : 298,247
Геодезическая референц-система 1980 г. (Мориц, 1984 г.)	9,780 327 *	0,005 3024	0,000 0058	1 : 298,257
* С учетом массы атмосферы.				

В 1967 г. международным геодезическим и геофизическим союзом рекомендовано для вычисления нормальной силы тяжести использовать формулу (13)

$$\gamma_0 = 978,031846(1 + 0,005279 \sin^2 B + 0,000023 \sin^4 B), \quad (13)$$

где угловая скорость вращения Земли $\omega = 0,000072921151 \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 1:298,24717$.

Зависимость нормальной силы тяжести от высоты $(\partial\gamma/\partial h)_0 = -3\,086 \text{ н}\cdot\text{с}^{-2} = -3,086 \text{ мкм}\cdot\text{с}^{-2}/\text{м}$.

В [45] приводится уравнение силы тяжести на поверхности для сфероида в следующем виде:

$$\gamma = c_1 + c_2 \sin^2 B + c_3 \sin^3 B + c_4 \sin^2 2B + c_5 \sin(L - c_6) \cos B, \quad (14)$$

где γ – теоретическая величина ускорения силы тяжести для широты B и L долготы;

c_1 – (константа) истинное среднее значение ускорения силы тяжести на экваторе;

c_2 – (константа) центробежное ускорение на экваторе. Так как $\sin^2 B$ возрастает у полюсов до 1, а на экваторе равен 0, то ускорение силы тяжести на экваторе меньше, чем у полюсов, на величину центробежного ускорения;

c_3 – (константа) полуразность полярных радиусов;

c_4 – (константа) учитывает, что плотность Земли неоднородна и резко возрастает с глубиной;

c_5 – (константа) среднестатистическая разность между повышенными и пониженными значениями силы тяжести на соответствующих меридианах;

c_6 – (константа) долгота гравитационного минимума в районе Шри-Ланки.

Таким образом, в [45], фигура Земли является сплюснутым эллипсоидом, но уже не эллипсоидом вращения.

1.3 Редуцирование измеряемого гравитационного поля и аномалий силы тяжести

Разделение силы тяжести на этапе обработки результатов гравиметрических измерений называется редуцированием гравитационного поля. Основная его цель состоит в определении аномалий силы тяжести, которые представляют гравитационный эффект нормальной модели Земли, с помощью вычитания некоторой нормальной величины из исходного гравитационного поля. Нормальное гравитационное поле, это гравитационное поле идеальной Земли, которая имеет простую форму уровенной поверхности, принятой для удобства, а потенциал – нормальным потенциалом. Выделять из земного гравитационного поля его основную часть и рассматривать малые разности элементов действительного и нормального полей позволяет построение нормального поля. В этом случае, задача определения фигуры Земли будет заключаться в изучении отступлений ее физической поверхности от поверхности «модели». Тогда, задача определения потенциала W сводится к определению следующих величин

$$T=W-U, \quad (15)$$

где U – нормальный потенциал Земли или потенциал силы тяжести эллипсоида;

T – возмущающий потенциал Земли, который образует аномальное гравитационное поле, возникающее из-за отличия нормального поля и поля реальной Земли.

В [46] построена и приведена модель силы тяжести с использованием наземных и спутниковых измерений, а также приведены результаты. Точность определения аномалий силы тяжести по этой модели составляет приблизительно 4 мГал – на равнине, 7 мГал – на море и 10 мГал – в горной местности.

В работе [15] приведен алгоритм определения аномалий силы тяжести и аномалий высот, и приведены формулы нормальной силы тяжести, аномалии силы тяжести и аномалии высот для территории на которой измерения проводились относительно эллипсоида WGS – 84 (World Geodetic System 1984).

1.4 Потенциал силы тяжести

Теория высот в гравитационном поле основана на понятии потенциала силы тяжести. Определение потенциала по заданному распределению масс с учетом количества и конфигурации распределения является теорией гравитационного потенциала. На решении такой задачи основана теория определения вариаций потенциала притяжения и его характеристик. Данную задачу можно сформулировать как определение функции $V(x,y,z)$, которая регулярна на бесконечности.

Потенциал объемных масс определяется по формуле

$$V(x, y, z) = f \iiint_{\tau} \frac{\Delta\rho(a, b, c)}{r} d\tau, \quad (16)$$

где плотность $\Delta\rho(a, b, c)$ - известная функция координат (a, b, c) , τ – область, занятая телом, а $r = [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}$ – расстояние в принятой системе координат между фиксированной точкой вне тела (или на поверхности a с координатами (x, y, z)) и текущей точкой с координатами (a, b, c) внутри возмущающего тела с из-

вестными значениями плотности $\Delta\rho(a,b,c)$. Значение потенциала $V(x,y,z)$ определяется на поверхности a .

При решении прямой задачи применяют методы численного интегрирования, в связи с тем, что потенциал в виде замкнутой формулы в большинстве случаев практически невозможно получить. Реальные тела, имеющие сложную форму, обычно представляют в виде совокупности простых тел. Вычисляют потенциал и его характеристики, обусловленные такими конечными элементами, затем складывают определяемые функционалы в исследуемой точке.

Таким образом, основан метод математического моделирования динамической составляющей вариаций гравитационного поля планетарного, регионального и локального характера, обусловленного перемещением масс на земной поверхности [9].

Различают неоднородности, которые связаны с изменением нормальной силы тяжести γ и связаны с различием реальной силы тяжести g от нормальной γ , в соответствии с разделением гравитационного поля на нормальное и аномальное.

Существует возможность учета влияния неоднородностей нормального гравитационного поля, в связи с тем, что известны все элементы нормального гравитационного поля. Источниками гравитационного аномального поля являются изостатические не скомпенсированные аномальные массы, находящиеся как на поверхности Земли, так и внутри нее.

Из различных методов решения задачи доминируют в последние годы глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС-технологии). Они дополняют традиционные наземные астрономо-геодезический и гравиметрический методы, как в отношении точности, так и детальности изучения фигуры и гравитационного поля Земли.

В [76] сделано утверждение, о том, что повышение точности определения гравитационного поля Земли может быть достигнуто при использовании принципиально новых космических методов. Это позволит получить информацию об особенностях гравитационного поля над обширными неизученными в гравитаци-

онном отношении районами суши и выявить неуровенность морской топографической поверхности.

1.5 Нормальный потенциал и нормальное поле

Нормальным полем принято называть поле и описывающие его потенциал U силы тяжести или потенциал V_H притяжения. При изучении гравитационного поля Земли используют некое фиктивное поле силы тяжести или поле притяжения, уровенные поверхности которых близки к уровненным поверхностям реального земного поля, но при этом они имеют более простую форму. Действительный потенциал силы тяжести можно записать в виде

$$W = U + T, \quad (17)$$

а потенциал притяжения

$$V = V_H + T. \quad (18)$$

Нормальный потенциал вводят для перехода от изучения потенциала V силы притяжения или W силы тяжести реальной Земли к изучению малой величины, формула (15).

В прикладной геодезии и топографии Землю часто представляют в виде плоскости. А нормальное поле представляют в виде поля притяжения системы материальных точек, такое представление удобно для решения задач космической геодезии.

В геодезии используют нормальную Землю в качестве идеальной планеты, имеющей форму эллипсоида вращения, такая поверхность является уровенной поверхностью ее потенциала силы тяжести. Потенциал притяжения нормальной Земли, если ее считать шаром с центрально симметричным распределением плотности или материальной точкой, имеет вид

$$V_H = \frac{GM}{r}, \quad (19)$$

где r – расстояние от центра шара или от материальной точки до той точки, в которой вычисляют потенциал.

Также используют нормальное поле, которое создаётся системой материальных точек. Для того чтобы более полно приблизиться к реальному полю переходят к точечным массам, которые распределены внутри или на поверхности Земли в соответствии с ее гравитационным полем. Потенциал притяжения представляет собой потенциал системы материальных точек. При аппроксимации нормального поля точечными массами понятие нормальной Земли не используется.

Результаты выполненных исследований в определении вековых изменений потенциала силы тяжести, а также некоторых параметров фигуры Земли, полученные в [21, 22, 33, 36] показали, что вековое изменение поля силы тяжести и фигуры Земли обусловлены совместным влиянием векового изменения скорости вращения Земли, движением полюсов и литосферных плит, а также должно учитываться при геодинамических исследованиях.

В работе [99] предложен метод, позволяющий определять поправки ускорения силы тяжести по данным измерений ее вертикальных градиентов, а также по этим данным выполнять оценку влияния внешней среды на силу тяжести.

Поправки за гравитационное влияние рельефа местности, могут учитываться практически в любых редукциях исходного гравитационного поля, и изменяются как в плане, так и по высоте нелинейно. Формула поправки за гравитационное влияние рельефа местности

$$\delta g_p^{c\phi}(r_H, r_k) = \delta g_p^{nl}(r_H, r_k) + \Delta \delta g_p^{c\phi}, \quad (20)$$

где r_H, r_k – внутренний и внешний радиусы внешней учитываемой области;

δg_p^{nl} – поправка за рельеф в плоском варианте при исправлении плоскопараллельного слоя Буге на реальный объем топографических масс;

$\Delta\delta g_p^{cf}$ – оператор приведения величины «плоской» поправки к сферическому виду [35].

1.6 Сила тяжести и высота

При создании опорных геодезических сетей и в инженерно-геодезических работах используются нормальные и ортометрические высоты, которые связаны с полем силы тяжести. Гравиметрические поправки вводятся в результаты после выполнения геометрического нивелирования. Методика измерения силы тяжести зависит от характера гравитационного поля, который связан с направлением нивелирного хода, с рельефом и с распределением аномальных масс. Расстояние между пунктами гравиметрической сети принимают равным в горных районах 1 км, в равнинных более 10 км. Чтобы задать отсчетные поверхности при совместном использовании геодезических высот и высот в гравитационном поле, требуются методы аппроксимации локального гравитационного поля. Для этого используются гравиметрические данные: аномалии силы тяжести, астрономо-геодезические отклонения отвеса [109].

По теории М. С. Молоденского нормальная и геодезическая высоты связаны соотношением [66]

$$H = H' + \zeta, \quad (21)$$

где H – геодезическая высота, в настоящее время определяется из GPS-измерений;

H' – нормальная высота, которая определяется из наземного геометрического нивелирования и наблюдения силы тяжести;

ζ – аномалия высоты.

Нормальную высоту H' можно определить методом спутникового нивелирования. Это требует разработки эффективного метода нахождения аномалии высоты ζ .

1.7 Уклонение отвеса и составляющие уклонений отвесных линий

Понятие уклонения отвеса является важным в физической геодезии и теории фигуры Земли. Уклонение отвеса это угол между касательными к силовым линиям реального и нормального полей силы тяжести.

Астрономо-геодезические уклонения отвесной линии, вычисляют по данным наземной геодезии и астрономических определений по формулам (22).

Для того чтобы получить уклонения отвесной линии с максимально высокой точностью необходимо подобрать оптимальную длину линии. Для коротких расстояний ошибка мала и на нее не влияют поправки за не параллельность силовых линий нормального поля и поправки за аномалии силы тяжести, что особенно важно в горных районах [30].

Составляющие уклонения отвесной линии в плоскости меридиана ξ и плоскости первого вертикала η в топоцентрической системе координат, связаны с производной от возмущающего потенциала T_c по формулам:

$$\begin{aligned}\xi &= \varphi - B = -\frac{1}{\gamma} T_x, \\ \eta &= (\lambda - L) \cos B = -\frac{1}{\gamma} T_y.\end{aligned}\tag{22}$$

где φ, λ – астрономические широта и долгота пункта;

B, L – геодезические широта и долгота пункта;

$T_x = \partial T / \partial x$ и $T_y = \partial T / \partial y$.

Уклонение отвесной линии, вызванное притяжением топографических масс, называют топографическим уклонением отвеса. Их используют в предгорных и горных районах, так как там аномалии гравитационного поля в значительной степени обусловлены топографическими массами. В равнинных районах топографические уклонения отвеса малы, а их вариации вызываются неоднородностью строения земной коры.

Топографические уклонения отвеса вычисляют методом численного интегрирования с применением топографических карт.

Метод аппроксимации точечными массами предусматривает аппроксимацию аномального поля потенциалом системы точечных масс, которые вычислены по формулам для уклонения отвесных линий в виде

$$\begin{cases} \xi \\ \eta \end{cases} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^N \frac{GM_i}{r_i^3} \begin{cases} x_i - x \\ y_i - y \end{cases}, \quad (23)$$

где N – число точечных масс;

M_i – значение i -й точечной массы;

x_i, y_i – плоские прямоугольные координаты i -й точечной массы;

r_i – расстояние от определяемой точки до i -й точечной массы.

Метод точечных масс позволяет получить компактные модели возмущающего потенциала Земли и вычислить составляющие аномального ускорения с наименьшей затратой времени.

В связи с тем, что исходным аномалиям соответствует огромное множество реализаций систем точечных масс, то достаточно сложно определить параметры точечных масс. Способы решения этой задачи предложены в [69].

Возмущающий потенциал Земли методом аппроксимации точечными массами представляется в виде суммарного потенциала притяжения системы масс согласно формуле

$$T = \sum_{t=1}^n \frac{GM_t}{r_t}, \quad (24)$$

где $r_t = \sqrt{(X - X_t)^2 + (Y - Y_t)^2 + (Z - Z_t)^2}$ – расстояние до притягиваемой точки X, Y, Z – прямоугольные геоцентрические координаты точки внешнего пространства;

X_t, Y_t, Z_t – прямоугольные геоцентрические координаты точечной массы с номером t ;

M_t – значение точечной массы с номером t ;

n – число точечных масс [85].

Возмущение силы тяжести можно определить, зная положение точки P в пространстве и нормальную силу тяжести γ_P

$$\delta g = g_P - \gamma_P, \quad (25)$$

где g_P – сила тяжести измеряемая на поверхности земли гравиметром;

γ_P – вычисляемая нормальная сила тяжести.

Указанные в формуле (25) величины определены спутниковыми методами для искусственных спутников Земли и точек земной поверхности. В геодезии плановое положение точек земной поверхности определяется геодезическими координатами B, L , а отметки задаются нормальной высотой H' или ортометрической высотой H .

Аномалия силы тяжести в формуле (27), задана на поверхности Земли и называется смешанной аномалией в свободном воздухе. По определению Молоденского она определяется без гипотез о строении Земли, а по нормальной силе тяжести γ_Q и по измеренной величине g_P . Нормальная сила тяжести может быть найдена по нормальной высоте H' , точки Q над эллипсоидом [90].

Смешанная аномалия силы тяжести

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q. \quad (26)$$

Точка Q имеет такое геометрическое место, в котором нормальная сила тяжести совпадает с силой тяжести на поверхности Земли.

В сферическом приближении формула (26) имеет вид, без учета отклонение отвеса

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q = -\frac{\partial T}{\partial r} - 2\frac{T}{r} = \delta g - \frac{2\gamma}{r}\zeta, \quad (27)$$

где r – расстояние между текущей и определяемой точками.

Среднее значение нормальной силы тяжести вдоль силовой линии реального гравитационного поля Земли между точками уровенной поверхности и геоида вычисляется по формуле

$$\gamma_V = \gamma_0 - 0,1543H, \quad (28)$$

где H – высота текущей точки;

γ_0 – нормальная сила тяжести [29].

Поправка за высоту в нормальное значение силы тяжести равна

$$\Delta\gamma = -0,30855(1 + 0,00071 \cos 2B)H' + 0,0723(H')^2 \cdot 10^{-6}. \quad (29)$$

Если нормальная высота дается в метрах, то поправка за высоту в нормальное значение силы тяжести будет выражаться в миллигалах [72].

По формуле введенной Антоновым Ю. В. в [3] ведется редуцирование гравиметрических наблюдений для того чтобы исключить ложные аномалии

$$\Delta g = g_{\text{набл}} - g_0 + 0,3086H - 0,0419 \Delta\rho H, \quad (30)$$

где Δg – аномальные значения силы тяжести;

$g_{\text{набл}}$ – наблюдаемые значения силы тяжести;

g_0 – нормальные значения силы тяжести;

H – ортометрическая высота пункта наблюдения;

$\Delta\rho$ – плотность промежуточного слоя;

0,3086 – значение нормального градиента силы тяжести, выражаемое в мГал/м;

0,0419 – коэффициент, определяемый притяжением плоско-параллельного слоя.

При вычислении топографических аномалий наблюдаемое значение силы тяжести, сравнивается с нормальным значением силы тяжести γ .

Влияние на силу тяжести всех топографических однородных по плотности масс Земли или только влияние топографических масс некоторой области учитывается топографической редукцией

$$\Delta g_T = (g - \gamma) - kH_Q + \Delta g_P, \quad (31)$$

где $k = 2\pi f \Delta \rho$, мГал/м;

$\Delta \rho$ – плотность топографической массы;

G – постоянная тяготения;

Δg_P – поправка за рельеф местности, которая учитывает отступление формы земной поверхности от плоскости.

В горной местности поправка может достигать нескольких десятков миллигал.

Редукция Пряя показывает изменение силы тяжести при погружении в глубь Земли и вычисляют ее следующим образом

$$\Delta g_n = +0,3086h - 2 \times 0,0418 \Delta \rho h, \quad (32)$$

где h – глубина точки.

Аномалии Буге получают, если принять топографические массы равными притяжению плоского бесконечного слоя и если исправить этой поправкой наблюдаемое значение g

$$(g - \gamma)_B = g - 2\pi f \Delta \rho H' + \Delta g_P - \gamma_0 + 0,3086 H'. \quad (33)$$

Сумма поправок называется поправкой или редукцией Буге

$$\Delta g_B = -2\pi f \Delta \rho H' + 0,3086 H'. \quad (34)$$

Аномалия Фая вычисляется по формуле

$$(g - \gamma)_F = g + \Delta g_p + 0,3086 H' - \gamma_0. \quad (35)$$

Редукцией Фая называется сумма поправок за высоту и за рельеф

$$\Delta g_F = 0,3086 H' + \Delta g_p. \quad (36)$$

Переход от аномалий Буге к аномалиям в свободном воздухе осуществляется по формуле

$$(g - \gamma)_{\text{св.в.}} = (g - \gamma)_B + 2\pi f \Delta \rho H'. \quad (37)$$

Аномалии в свободном воздухе существенно зависят от рельефа местности и в условиях сложного рельефа, например в горном районе, изменяются интенсивно [72]. Их получают из обработки специальных измерений силы тяжести по гравиметрическим картам, либо по трассе нивелирования. Иногда применяют интерполяцию аномалий в свободном воздухе через аномалии Буге Δg_B

$$g - \gamma = \Delta g_B + kh, \quad (38)$$

где $k = 0,0418 \cdot \Delta \rho$ мГал/м – коэффициент редукции Буге;

$\Delta \rho$ – принятая плотность горных пород в г/см³.

Наиболее часто встречаются такие значения, как:

$$\Delta \rho = 2,67 \text{ и } k = 0,1117 \text{ мГал/м,}$$

$$\Delta \rho = 2,3 \text{ и } k = 0,0962 \text{ мГал/м.}$$

Аномалии Буге лучше интерполируются между гравиметрическими пунктами, чем аномалии в свободном воздухе. Непосредственно по измерениям силы тяжести составляют карты аномалий Буге.

Действие притягивающих топографических масс является одной из главных причин, которая вызывает изменения аномалий силы тяжести. Данные массы находятся в слое ограниченном снизу поверхностью нормального поля силы тяжести, а сверху физической поверхностью Земли. В работе [22] приведены исследования, которые показали, что необходимо учитывать сжатие земного эллипсоида при вычислениях аномалий силы тяжести, так как при замене сфероидической поверхности на сферическую погрешность может составлять более 1 мГал.

1.8 Роль и основные направления исследований в геодезии в настоящее время, использующие данные о поле силы тяжести

Действующий в настоящее время паспорт научной специальности «Геодезия» обозначает содержанием специальности определение формы и размеров Земли, ее гравитационного поля, пространственных характеристик природных и техногенных объектов, явлений и процессов на ее поверхности. К областям данных исследований отнесено, в частности, следующее:

- определение параметров земного эллипсоида, геоида и гравитационного поля Земли, изменение их в пространстве и во времени;
- геодезическое обеспечение геодинамического мониторинга состояния окружающей среды, в первую очередь, опасных процессов и явлений, способствующих возникновению кризисных ситуаций;
- геодезический мониторинг напряженно-деформированного состояния земной коры и ее поверхности, зданий и сооружений, вызванного природными и техногенными факторами, с целью контроля их устойчивости, снижения риска и последствий природных и техногенных катастроф, в том числе землетрясений.

Перечисленные направления и многие другие в науках о Земле активно используют данные о гравитационном поле различного масштаба.

1.9 Влияние изменений силы тяжести вблизи водохранилищ

Создание водохранилищ приводит к нарушению геодинамических процессов, что выражается в существенной трансформации экзогенных и в активизации эндогенных процессов.

Изменение гравитационного поля проявляется в результатах геодезических измерений, а именно в изменениях широт, долгот и нормальных высот пунктов наблюдений.

Чтобы произвести оценку изменения координат B , L , H' при изменении уровня воды в водохранилище необходимо знать вариации потенциала притяжения ΔV и его первых производных по координатам Δg_x , Δg_y , Δg_z :

$$\Delta V(P) = G\Delta\rho \iiint_{\tau} \frac{d\tau}{r^3}, \quad (39)$$

$$\Delta g_i(P) = G\Delta\rho \iiint_{\tau} \frac{i - i_p}{r^3} d\tau, \quad (40)$$

$$r = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}, \quad (41)$$

где $i = \{x, y, z\}$;

τ – область аномальных массы воды;

$i_p = \{x_p, y_p, z_p\}$ – координаты результирующей точки P , в которой оцениваются вариации силы тяжести;

r – расстояние от P до текущей точки в объеме τ ;

G – гравитационная постоянная;

$\Delta\rho$ – плотность воды, равная 1 г/см^3 .

В работах [29, 82, 92] приведена динамическая модель водных масс, которая была построена с помощью метода аппроксимации объема водохранилища системой элементарных параллелепипедов $\Delta\tau_i$, с гранями параллельными координатным плоскостям. Точнее выполнить аппроксимацию объема позволяет уменьшение размеров параллелепипедов $\Delta\tau_i$, но бесконечное уменьшение размеров $\Delta\tau_i$ затрудняет выполнение исследований. Следовательно, необходимо решать вопрос о

размерах параллелепипедов $\Delta\tau_i$, для конкретных случаев персонально, в соответствии с имеющимися исходными данными, расположением области τ , возможностями используемых вычислительных средств и точностью решаемых задач.

В работе [82] приведены результаты исследований вариаций высоты, на модели водных масс Саяно-Шушенского водохранилища с разбивкой его на элементарные параллелепипеды. При анализе результатов установлены максимальные размеры элементарных параллелепипедов.

Вариации гравитационного поля, обусловленные изменением массы, вызывают изменение значений отметок и координат, а результаты геодезических измерений искажаются ошибками измерений и зависят от влияния внешних факторов таких вариаций.

Детальные вариации гравитационного потенциала и его характеристик определяются с целью учета их влияния на результаты повторных высокоточных нивелирных измерений и высокоточных гравиметрических измерений выполняемых для изучения вертикальных движений земной поверхности и деформаций.

Для изучения влияния крупных водохранилищ, мест добычи полезных ископаемых, горных хребтов на изменения гравитационного потенциала и его основных характеристик различают следующие факторы:

Разовые изменения, которые обусловлены сосредоточением больших масс в районе водохранилищ, карьеров (отвалов) руды на небольшой территории. Это приводит к изменению локального и регионального гравитационного поля и учитывается при сравнении гравиметрических измерений в этих районах, при сравнении результатов высокоточного нивелирования, выполненных до их образований и после, а также при гравиразведке, как возмущающий фактор. Совместное влияние на земной поверхности, в различных ее частях, большого количества, как крупных водохранилищ, так и карьеров (отвалов), должно оцениваться при построении моделей гравитационного потенциала и фигуры Земли в планетарном масштабе.

При выполнении повторного высокоточного нивелирования и гравиметрических измерений необходимо учитывать изменения гравитационного потенциала и его характеристик, которые обусловлены сезонными изменениями [114].

В работе [82] выполнены исследования вариаций гравитационного потенциала и его характеристик для Саяно-Шушенского водохранилища, которые показывают, что в окрестности водохранилища создаются возмущающие поля аномалий высот и силы тяжести, которые необходимо учесть при выполнении высокоточных геодезических и гравиметрических работ, а также при объяснении результатов.

Результаты вычислений, приведенные в работах [13, 80] показали, что изменение уровня водохранилища Саяно-Шушенской ГЭС на несколько десятков метров может вызвать вариации силы тяжести, достигающие по абсолютной величине $(1-2) \cdot 10^{-5}$ м/с², а изменение нормальных высот отметок от 1 до 15 мм, что входит в допустимую погрешность.

Распространенным методом определения осадок марок и реперов является геометрическое нивелирование. При выполнении геометрического нивелирования на каждой станции измеряют расстояние dh между уровенными поверхностями потенциала силы тяжести $W_A(T_0)$ и $W_B(T_0)$, проходящими через точки A и B стояния рек в момент T_0 . $W_A(T_0)$, $W_B(T_0)$ – это уровенные поверхности в точках A и B в момент T_0 , $W_A(T_1)$, $W_B(T_1)$ – уровенные поверхности в точках A и B в момент T_1 (рисунок 1).

Чтобы выполнить большое количество циклов геометрического нивелирования необходимо иметь неизменное положение уровенных поверхностей и отвесной линии AI_0 с течением времени. Тогда превышение точки B над точкой A в момент T_0 будет равно

$$dh = \frac{W_A(T_0) - W_B(T_0)}{\gamma_{cp}}, \quad (42)$$

где γ_{cp} – среднее значение нормальной силы тяжести по линии AB .

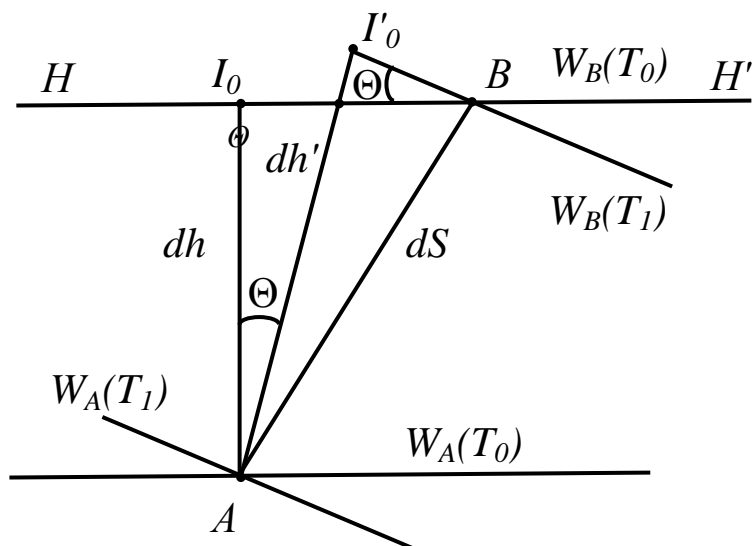


Рисунок 1 – Схема геометрического нивелирования при переменном гравитационном поле

Вариации потенциала в точках A и B приводят к изменению нормальных высот точек A и B на величины

$$\Delta H_A^\gamma = \frac{W_A(T_0) - W_A(T_1)}{\gamma_{cp}} = \frac{\Delta W_A}{\gamma_{cp}}, \quad (43)$$

$$\Delta H_B^\gamma = \frac{W_B(T_0) - W_B(T_1)}{\gamma_{cp}} = \frac{\Delta W_B}{\gamma_{cp}}, \quad (44)$$

В момент T_1 превышение точки B над точкой A будет равно

$$dh' = dh + \delta h, \quad (45)$$

где $\delta h = \frac{\Delta W_A - \Delta W_B}{\gamma_{cp}}$ – поправка в элементарное превышение за влияние вариаций гравитационного поля, которые обусловлены изменением уровня водохранилища [14, 41, 82].

В результате изменения поля силы тяжести, в момент времени T_1 значение потенциалов силы тяжести в точках A и B будут равны

$$W_A(T_1) = W_A(T_0) + \Delta W(A, T_1), \quad (46)$$

$$W_B(T_1) = W_B(T_0) + \Delta W(B, T_1), \quad (47)$$

где $\Delta W(A, T_1)$ и $\Delta W(B, T_1)$ – вариации потенциала силы тяжести.

Формулы, которые в основном основаны на дифференциальных свойствах потенциала силы тяжести, используют для вычисления поправки за влияние вариаций гравитационного поля в нивелирные превышения. Используют формулу (48) для вычисления изменений элементарного превышения на станции

$$\delta h = -\frac{1}{\gamma}(\delta_x dx + \delta_y dy + \delta_z dz), \quad (48)$$

$$\delta_x = g_x(T_1) - g_x(T_0); \quad \delta_y = g_y(T_1) - g_y(T_0); \quad \delta_z = g_z(T_1) - g_z(T_0), \quad (49)$$

где $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – вариации составляющих вектора силы тяжести, они обусловленные изменением уровня объема за промежуток времени $\Delta t = T_1 - T_0$.

По формулам (48), (49) определяют поправки за влияние вариаций гравитационного поля в элементарные нивелирные превышения, в процессе измерений. Найденные оценки в работе [75] показали, что поправки δh необходимо учитывать при обработке нивелирования I и II классов, а в горной местности и III класса. Их достаточно получать с миллиметровой точностью, а также с соответствующей точностью надо знать величину $\gamma_{\text{ср}}$. От сложности гравитационного поля, от величины превышений и от точности нивелирования зависит частота гравиметрических пунктов вдоль нивелирной линии.

На примере гидротехнического сооружения ГЭС в работе [28], рассмотрен порядок величин возможного влияния ГЭС на отклонения отвеса. Горизонтальная составляющая вектора силы тяжести, обусловлена массой сооружения и вычислена в некоторой точке O . Для решения такой задачи «разрезают» водохранилище

на горизонтальные бруски бесконечно малого сечения и начало координат местной системы помещают в некоторую точку O .

1.10 Движения земной коры и сила тяжести

Еще Молоденский М. С. [66, 67] обратил внимание на то, что при изучении фигуры Земли необходимо различать горизонтальные и вертикальные смещения точек земной поверхности, изменения направлений отвеса и смещения уровенных поверхностей. В основном изменения высот реперов при геометрическом нивелировании объясняют вертикальными движениями данных реперов, а изменения в астрономических долготах объясняют горизонтальными смещениями астрономических пунктов.

Изменения во времени характеристик гравитационного поля Земли, координат и высот играют достаточно важную роль в решении фундаментальной проблемы современных движений земной коры [84].

Чтобы из повторного геометрического нивелирования рассматривать влияние изменений гравитационного поля на вертикальные движения земной коры необходимо включить высокоточные повторные астрономические определения и геодезические связи. Повторные геодезические связи необходимы, чтобы исключить влияние смещения рассматриваемых точек из изменений астрономических координат. Эти связи должны быть межконтинентальными.

На основе обработки результатов измерений повторного нивелирования и полученных данных о смещении отвеса относительно земной поверхности, можно сделать статистически достоверный вывод о существовании вертикальных движений.

Наблюдения наклонов грунта, с помощью непрерывно фиксирующих изменение угла между отвесом и грунтом наклономеров, которые непосредственно сравнимы с результатами повторного нивелирования.

Точность непрерывных наклономеров за короткие промежутки времени высока, но результаты длительного наклономерного наблюдения подвержены ис-

кривлениям смещениями нуля пункта. Чтобы снизить искажения необходимо совместно использовать непрерывные наклономерные наблюдения и повторное нивелирование. Особенно данные виды наблюдений необходимо применять в тех местах, где непрерывные наклономеры указывают на значительные наклоны грунта.

При обработке повторных триангуляционных измерений, которые выполняются для изучения горизонтальных движений земной коры, следует иметь в виду возможность смещений отвеса относительно земной поверхности, особенно при значительных наклонах визирных лучей [29].

Одним из наиболее важных видов геодезических работ являются нивелировки, дающие представление о значении потенциала силы тяжести на поверхности Земли. Отсутствие единого подхода в геодинاميке и геодезии, проявляется в игнорировании при изучении вертикальных движений земной коры нивелиром, изменений гравитационного поля. Даже изменение влажности грунта может вызвать изменение гравитационного поля.

Суммы нивелирных превышений зависят от пути нивелирования, так как земное гравитационное поле является нецентральным, а невязка в полигоне отлична от нуля. Используя данные о силе тяжести вдоль линий нивелирования, определяются разности потенциалов.

Совместная обработка результатов повторных нивелировок с измерениями силы тяжести позволяет определить вертикальные движения точек земной поверхности и изменения земного гравитационного поля [96]. Спутниковые наблюдения, повторное нивелирование и повторные измерения силы тяжести являются основными методами определения вертикальных движений земной коры и изменений гравитационного поля [7].

В случае возрастания интенсивности современных деформационных процессов повторное нивелирование проводится не реже 1 раза в месяц. Результаты локального и зонального мониторинга используют для определения прогностических признаков сейсмических событий, локальных просадок и аномальной активизации разломов.

Так как установка нивелира производится по отвесу, а отвес изменяет свое первоначальное положение при изменении гравитационного поля, то по теории Фоглера, превышения изменяются без вертикальных движений.

На физической поверхности Земли геодезические измерения связаны с направлением отвесной линии. На физической поверхности Земли направление отвесной линии совпадает с направлением нормали к уровенной поверхности потенциала силы тяжести $W(x,y,z)$, проходящего через точку $P(x,y,z)$.

Перераспределение масс на поверхности Земли вызывается изменением кривизны уровенных поверхностей напряжённости гравитационного поля, и вызывает изменения положений отвесных линий и уровенных поверхностей. Изменения уровенных поверхностей и отвесных линий появляющиеся в результатах геодезических измерений объясняют вертикальные и горизонтальные движения поверхности Земли. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф. и Юркина М. И. в [29] указывали на то, что в действительности таких движений нет или они малы, но иногда они больше получаемых по результатам повторных геодезических измерений.

С помощью повторных гравиметрических наблюдений можно выявить влияние притяжения масс на геодезические измерения. Однако по результатам повторных гравиметрических измерений не всегда можно выявить вариации силы тяжести с достаточной точностью. Если объём и форма переменной массы известны, то можно получить потенциал притяжения и его производные в любой точке $P(x,y,z)$, вызванные этими массами, с более высокой точностью и с меньшими затратами труда, чем в результате повторных гравиметрических измерений.

Нельзя судить однозначно только по результатам повторных гравиметрических наблюдений, изменяется ли гравитационное поле, так как причиной изменений силы тяжести могут быть смещения измерительных точек по высоте относительно центра масс Земли. Однако и по результатам только повторного геометрического нивелирования нельзя судить есть ли относительные вертикальные смещения реперов, так как причиной изменения превышений может быть изменение

гравитационного поля – повороты отвесов относительно грунта при его неподвижности [97].

Актуальной задачей геодезии и геофизики является совместное определение параметров движений земной коры и временных изменений гравитационного поля. Одной из основных проблем в рамках наук о геодезии и геодинамике является познание закономерностей движений геодинамических систем (ГДС) физической поверхности Земли (ФПЗ) и внешнего гравитационного поля Земли (ВГПЗ). В геодинамике необходимо знание закономерностей движений для того, чтобы изучать глубинные силы и процессы, возникающие в результате эволюции Земли, планеты и обуславливающих движение вещества внутри Земли. А в геодезии – для того, чтобы решать задачи редуцирования во времени результатов измерений как астрономо-геодезических так и гравиметрических на выбранную эпоху [30].

Природные и техногенные геодинамические явления различным образом влияют на результаты геодезических измерений. Как через изменения положения геодезических пунктов, так и через изменения гравитационного поля [40]. Их мониторинг является основным геодезическим вкладом в геодинамические исследования.

Как уже было отмечено, изменения поверхности Земли и поля силы тяжести характеризуются наклонами уровенной поверхности относительно физической поверхности Земли или изменением отвесной линии, деформациями физической поверхности, величиной и скоростью изменения силы тяжести. При перемещении масс внутри Земли и изменении формы рельефа поле силы тяжести меняется, изменения силы тяжести вызывают новые деформации Земли. Изменение поверхности Земли и вариации поля силы тяжести взаимосвязаны [71]. Временные изменения силы тяжести происходят вследствие перераспределения масс в теле Земли.

Повторные гравиметрические наблюдения приводят к обнаружению изменений силы тяжести в локальных масштабах, которые связаны с геодинамическими и техногенными процессами в близповерхностных слоях (добыча ископаемых, промышленное строительство и т. п.). При таких исследованиях локальные перемещения масс являются возмущающими эффектами [90].

Определение изменений силы тяжести в результате техногенных воздействий является частью комплексных исследований на геодинамических полигонах. Цель создания таких полигонов заключается в получении характеристик деформаций и движений земной поверхности в районах интенсивной деятельности человека на основе результатов повторных геодезических наблюдений, свободных от влияния изменений гравитационного поля, обусловленного перераспределением масс [82].

Временные вариации силы тяжести, обнаруженные из повторных измерений, дают важную информацию о глобальных, региональных и локальных перемещениях земных масс [90]. Глобальные изменения силы тяжести (более 10^4 км) вызываются перемещениями масс в теле Земли, изменением гравитационной постоянной и изменением суточного вращения Земли. Региональные изменения силы тяжести (от 10^2 до 10^4 км) происходят одновременно с тектоническими процессами и накоплением осадочных пород. Глобальные и региональные изменения носят вековой характер. Локальные изменения (от 1 до 10^2 км) связаны в основном с сейсмотектоническими процессами, с землетрясениями, с вулканическими процессами, с движениями в зонах разломов земной коры [100]. В [5, 72] рекомендуется выполнять учет влияния уклонений силы тяжести и их изменений на точность прогноза движений земной коры.

1.11 Выводы

Сделан обзор гравитационных характеристик объектов глобального, регионального и локального масштабов, отмечена важность исследований поля силы тяжести и их развитие в последние столетия.

Отмечена роль знаний о гравитационных характеристиках объектов на земной поверхности для учета их во многих науках о Земле и, в частности, в геодезии. Одними из важных научных и практических результатов данных исследований являются повышение точности данных, получаемым по геодезическим измерениям, и достоверности их интерпретации. Приведены примеры.

2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

2.1 Прямая и обратная задачи

Прямая и обратная задачи тесно связаны, но их решения имеют принципиальное различие. Прямая задача сводится к определению характера аномалий гравитационного поля и эффекта тел, составляющих модель в зависимости от заданных форм, глубин, размеров, физических свойств, плотности тел объекта. Эта задача всегда решается однозначно, имея устойчивое решение [98].

Обратная задача сводится к определению параметров аномалиеобразующих тел их формы, размеров, глубины залегания, плотности аномальных масс по измеренным параметрам поля и по гравитационным аномалиям, и приводит к интегральному уравнению, для которого не существует единственного решения [103]. Обратные задачи, как правило, неустойчивы. Решения обратных задач могут и не иметь физических аналогов, но несоответствие результатов измерений достаточно высокой точности структуры априорной модели является основанием, чтобы ее отвергнуть [30, 92].

Решить прямую задачу – означает определить соответствующие элементы поля по заданным распределениям физических параметров, которые характеризуют определенные свойства изучаемой среды. При использовании этих методов появляется возможность учета влияния тел, осуществление анализа вычисленных компонент полей и решения обратных задач используя методы моделирования.

Задание источников поля должно обладать хорошими аппроксимационными свойствами, которые бы позволяли наиболее адекватно описывать строение реальных геологических тел и структур и должна быть обеспечена высокая скорость вычисления с требуемой точностью решения [79].

2.2 Гравитационное поле и распределение плотности

Измеренные во внешнем пространстве элементы гравитационного поля служат важным источником информации, элементы рассматриваются как функции распределения земных масс. Измерения в гравиметрии можно проводить на суше, на море и в воздухе, что является преимуществом данного метода. Полученные дискретные данные о гравитационном поле обладают высоким разрешением.

Специальной обработки требуют результаты измерения гравитационного поля и физических полей перед их интерпретацией. Получение аномальных значений поля является итогом этой обработки.

В связи с активным поиском месторождений различных полезных ископаемых существенно возросла актуальность получения аномалий силы тяжести, которые в минимальной степени были бы осложнены влиянием препятствующих факторов, ослабляющих гравитационный эффект объектов поиска.

Аномалия силы тяжести является наиболее важной возмущаемой величиной, связанной с гравитационным полем. Также используют и другие величины, которые вычисляют при трансформациях поля силы тяжести.

Результаты измерений аномалии силы тяжести отражают суммарное влияние всех земных масс, что существенно осложняет интерпретацию аномального поля силы тяжести. При использовании информации, такой как, топографическая, геологическая и геофизическая, влияние известных масс, как правило, учитывают с помощью поправок.

Согласно теорем Стокса о гравитационном поле уровненного эллипсоида появляется неоднозначность обратной задачи. Для созданного распределением масс поля аномалий можно выбрать огромное количество эквивалентных распределений масс. Но однозначно определяется только общая масса тела, а не плотность слоя поверхности Земли и плановое расположение центра масс.

На практике же, при решении обратной задачи переходят к прямой задаче гравиметрии, так как эта задача имеет единственное решение по закону всемирно-

го тяготения. Аномалия силы тяжести в местной декартовой системе координат определяется формулой

$$\Delta g(r) = G \iiint_v \frac{\Delta \rho(r')(z' - z)}{|r' - r|^3} dv, \quad (50)$$

где $\Delta \rho$ – разность плотностей возмущающего тела и окружающего вещества;
 $dv = dx'dy'dz'$ – элемент объема [81].

Обратная задача гравиразведки (в наиболее важной для практики формулировке) состоит в нахождении распределений масс по заданному гравитационному полю этих масс.

На начальном этапе планирования гравиметрической съемки принято выбирать подходящее расположение пунктов и находить нужную точность вычисления аномалий. В этом случае наиболее выгодным является соотношение между притяжением тел простой формы и их глубиной. Рассмотрим методы решения прямых задач гравиметрии для типовых аппроксимирующих элементов.

2.3 Решение прямых задач

Созданию эффективных методов решения прямых задач посвящено достаточно много работ. Приближенные алгоритмы решения прямых задач для тел с экспоненциальной плотностью приведены в работах [70, 90, 110, 112]. В [110, 112] тело разбивалось системой полосок, также как и в [70], где гравитационный эффект аппроксимирующего тела определили путем набором полосок. В [90] тело представлялось конечными элементами и цифровыми моделями. В [88] получено аналитическое решение прямой задачи гравиметрии для многоугольников с криволинейными сторонами. Алгоритмы решения прямых задач гравиметрии для сферических тел приведены в работах [86, 87, 108]. В [87] получено решение задачи для прямоугольного параллелепипеда, в [108] – для сферического многогранника, а в [86] приведен алгоритм решения задачи для сферической призмы.

При решении задач регионального масштаба необходимо учитывать сферичность Земли, а в качестве аппроксимирующих элементов использовать сферические тела. Сферический многогранник целесообразно использовать для интерпретации данных морских и спутниковых измерений, а сферическую треугольную призму – для данных наземной съемки.

Некоторые методы редукции основываются на расчете притяжения плоского диска (рисунок 2) [19].

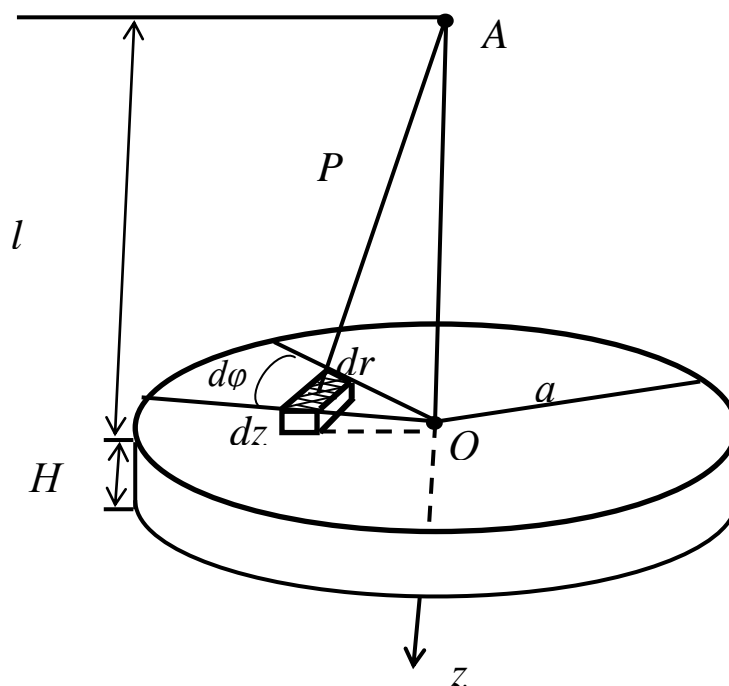


Рисунок 2 – Притяжение плоского диска

Потенциал диска в точке A равен

$$V = -G \frac{dm}{\sqrt{(l+z)^2 + r^2}}. \quad (51)$$

Притяжение точки элементом диска равно

$$\delta g = \frac{G(l+z)dm}{((l+z)^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (52)$$

$$dm = \Delta\rho r d\varphi dr dz. \quad (53)$$

Притяжение точки всем диском равно

$$\Delta g = 2\pi G \Delta\rho \left[-\sqrt{(l+H)^2 + a^2} + \sqrt{l^2 + a^2} + H \right], \quad (54)$$

где $l=OA$ – высота точки A ;

H – толщина диска;

a – радиус диска;

$\Delta\rho$ – однородная плотность.

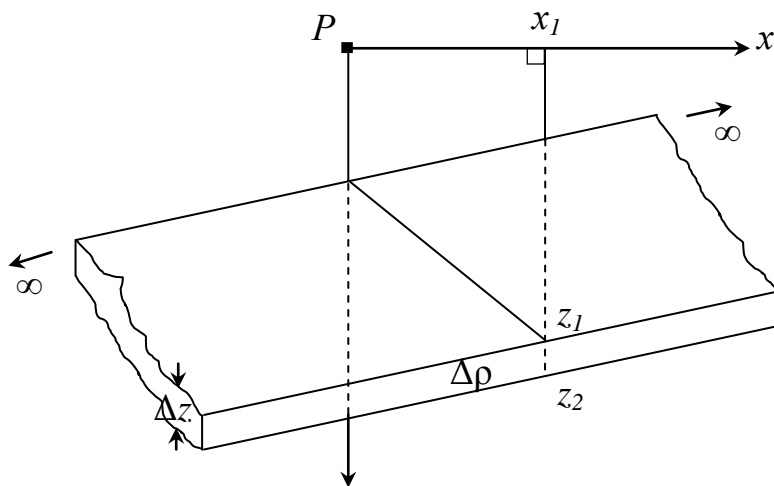


Рисунок 3 – Двумерный горизонтальный слой

Рельеф границ, которые лежат горизонтально, можно определять по формуле для гравитационной аномалии. Эта аномалия вызывается двумерной горизонтальной пластиной толщиной Δz на глубине z_1 . Для точки P на поверхности (рисунок 3), где $\Delta\rho$ разностная плотность.

При $x_1 \rightarrow \infty$ найдем

$$\Delta g = \pi G \Delta\rho \Delta z. \quad (55)$$

Выражение (55) имеет название – притяжение полупластины Буге. На большом горизонтальном расстоянии приведенное притяжение будет равно максимальной величине

$$\Delta g = 2\pi G \Delta \rho \Delta z. \quad (56)$$

При гравиметрической съемке расстояние между пунктами может меняться зависимо от размеров аномального тела и его глубины залегания, на величину от километров до метров. Шаг съемки должен иметь размеры меньше глубины аномального тела. Точность аномалий Буге зависит от точности введенных поправок.

Интеграл (50) имеет замкнутую форму для тел простой формы и постоянной плотности. Если начало координат находится в точке поверхности, тогда для шара радиуса R в плоскости xu с постоянной плотностью или же состоящего из концентрических слоев применяется формула

$$\Delta g = \frac{4}{3} \pi G R^3 \Delta \rho \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (57)$$

где x, y, z – координаты центра шара.

Приведем максимальное значение аномалии, порождаемой шаром

$$\Delta g = \frac{4}{3} \pi G \Delta \rho \frac{R^3}{t^2}, \quad (58)$$

и горизонтальным двумерным цилиндром с бесконечным простираем вдоль оси y

$$\Delta g = 2\pi G \Delta \rho \frac{R^2}{t}, \quad (59)$$

где R – радиус;

t – глубина залегания центра шара, используя формулу (57).

Существует возможность представить тела с неправильной формой и неоднородной плотностью суммой элементарных тел. Среди элементарных тел интерес представляют однородные шары и прямоугольные параллелепипеды.

Решить прямую задачу можно, определив гравитационный эффект $\Delta g_{\text{ш}}$. Представим однородный шар с радиусом R , с объемом V , и с плотностью σ расположенный на глубине h .

Предположим, что аномалия силы тяжести над шаром совпадает с аномалией точечной массы, которая помещена в его центр, ссылаясь на закон всемирного тяготения

$$\Delta g_{\text{ш}} = G\Delta\rho V \frac{h}{r^3} = \frac{GMh}{(x^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (60)$$

где $\Delta g_{\text{ш}}$ – аномалия над шаром;

$M = \Delta\rho V$ – избыточная масса шара.

Также можно решить прямую задачу, определив гравитационный эффект $\Delta g_{\text{ц}}$. Представим горизонтальный круговой цилиндр с радиусом R , с сечением S и с плотностью $\Delta\rho$ расположен вдоль оси Y на глубине h . Поскольку притяжение цилиндром будет таким же, как притяжение вещественной линии, то для точек наблюдения вдоль оси X ($y = z = 0$) можно привести следующее выражение

$$\Delta g_{\text{ц}} = G\Delta\rho R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{2G\rho_{\text{лин}}h}{x^2 + h^2}, \quad (61)$$

где $\rho_{\text{лин}}$ – линейная плотность цилиндра [7, 23, 82].

Для учета влияния рельефа часто применяют метод, в котором всю окружающую местность представляют в виде криволинейных призм, допустим, толщина призмы будет постоянной. Общее влияние рельефа получается как сумма всех влияний отдельных призм.

Для точки на оси вертикального цилиндра в системе координат r, α, z можно получить соотношение

$$\Delta g_{\text{ц}} = G\Delta\rho(\alpha_2 - \alpha_1) \left(\sqrt{r_2^2 + z_1^2} + \sqrt{r_1^2 + z_2^2} - \sqrt{r_2^2 + z_2^2} - \sqrt{r_1^2 + z_1^2} \right), \quad (62)$$

где $z = r \cos\alpha$, $y = r \sin\alpha$, а r_1, r_2 и α_1, α_2 – предельные значения радиуса и азимута.

В работе [19] приведен пример притяжения призмы $abcd a'b'c'd'$, которая вырезана из кругового цилиндра (рисунок 4), на точку A .

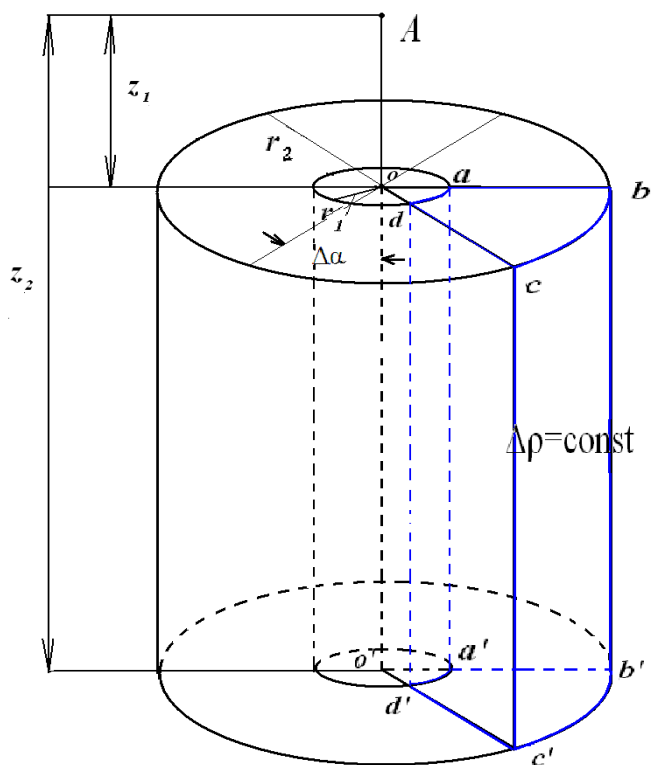


Рисунок 4 – Элементарное притягивающее тело в виде цилиндрической призмы

Получим притяжение кольца из притяжения цилиндра

$$\Delta g = 2\pi G\Delta\rho \left[-\sqrt{(z_2 + z_1)^2 + r_2^2} + \sqrt{z_1^2 + r_2^2} + \sqrt{(z_2 + z_1)^2 + r_1^2} - \sqrt{z_1^2 + r_1^2} \right]. \quad (63)$$

В том случае, когда точка лежит на призме, $r_1=0$, то

$$\Delta g = 2\pi G\Delta\rho \left[\sqrt{z_2^2 + r_1^2} - \sqrt{z_2^2 + r_2^2} + r_2 - r_1 \right]. \quad (64)$$

Если необходимо из притяжения кольца выделить гравитационное влияние призмы, которая составляет $1/n$ часть всего кольца, то

$$\Delta g = \frac{2\pi G\Delta\rho}{n} \left[-\sqrt{(z_2 + z_1)^2 + r_2^2} + \sqrt{z_1^2 + r_2^2} + \sqrt{(z_2 + z_1)^2 + r_1^2} - \sqrt{z_1^2 + r_1^2} \right]. \quad (65)$$

Для прямоугольного параллелепипеда с координатами вершин $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ (рисунок 5) имеем [111]

$$\Delta g_{\text{пар}} = G\Delta\rho \left[-x \ln(y+r) - y \ln(x+r) + z \arctg \frac{x}{z} \frac{y}{r} \right]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2}, \quad (66)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

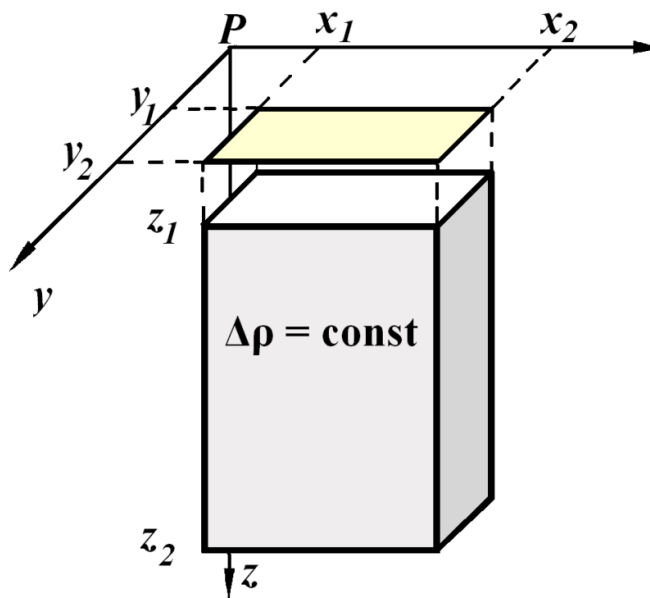


Рисунок 5 – Элементарное притягивающее тело в виде параллелепипеда

В. М. Гордин [17] получил приближенные формулы для определения вертикальной составляющей притяжения части параллельного слоя, который заключен в круговой зоне, эта зона ограничена внешним и внутренним произвольными и фиксированными радиусами r_1 и r_2 .

Предполагается при учете поправок за рельеф определение влияния реального промежуточного слоя между поверхностью Земли и уровнем относимости значений γ_0 . Если область учета рельефа местности ограничена неким радиусом R_B , то нет смысла учитывать промежуточный слой как плоскопараллельный за его пределами.

Например, аномалии будут искажены из-за недоучета эффекта масс во впадинах или учета влияния излишних масс на точках возвышения рельефа. В расчетах для территории Джунгарского Алатау показано, что искажения в аномалиях при $R_B = 2000$ км достигают 0,5 мГал [38].

В связи с этим, вместо притяжения плоскопараллельного бесконечного слоя при детальном гравиметрических съемках рекомендуется учитывать влияние конечного горизонтального слоя, ограниченного радиусом (R_B). Величина R_B , определяется, исходя из того, что случайная составляющая влияния изменений не учитываемых поправок за рельеф и промежуточного слоя, не превосходили на участке съемки заданную величину.

Возможна замена квадратной области круговой и наоборот при условии, что площадь круга и квадрата равны ($r_{\square} = 2d/\sqrt{\pi}$), где r_{\square} – радиус, d – горизонтальное расстояние от результирующей точки до стороны квадрата. При этом практическая точность будет выше, в связи с тем, что объем масс, которые учитываются при определении поправок за рельеф во внутренней области, меньше объема цилиндра или параллелепипеда.

На аппроксимации поверхностями рельефа простой геометрической формы основано большинство способов учета влияния рельефа во внутренней области [17]. Большинство авторов представляют часть рельефа в виде конуса или наклонной плоскости, при разделении исследуемой области на квадраты или цилиндрические сектора участок представляют набором плоских площадок или ги-

перболических и конических поверхностей. Это делают для упрощения вычислительных операций, которые при сложных условиях горной местности являются трудоемкими и дорогостоящими.

В связи с тем, что вычисления поправок за рельеф внешней области выполняют на ЭВМ, гравитирующие массы можно представлять в виде набора вертикальных параллелепипедов. Одно основание такого параллелепипеда совпадает с высотой уровня результативной точки, а другое основание совпадает с высотой конкретной точки цифровой модели местности (ЦММ) для исследуемой зоны [38].

2.4 Вариации гравитационного потенциала и его характеристик

Возмущающие массы воды, заключенные в определенные области, для вычисления вариаций гравитационного потенциала и его характеристик в некоторых случаях аппроксимируют математической моделью. Их строят из однородных прямоугольных параллелепипедов. Из каждого однородного прямоугольного параллелепипеда получают элементарные значения вариаций гравитационного потенциала и его производных, затем суммируют и определяют их значения в исследуемой точке. Вариации гравитационного потенциала и его характеристики, создаются моделью возмущающих масс.

Элементарные прямоугольные параллелепипеды размещают параллельно координатным плоскостям условной прямоугольной системы координат $OXYZ$ (рисунок 6). Точка P – это точка в которой вычисляют вариации гравитационного потенциала и его производные, ось z совпадает с направлением вектора силы тяжести в точке; x, y, z – координаты точки P ; $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ – координаты вершин параллелепипеда.

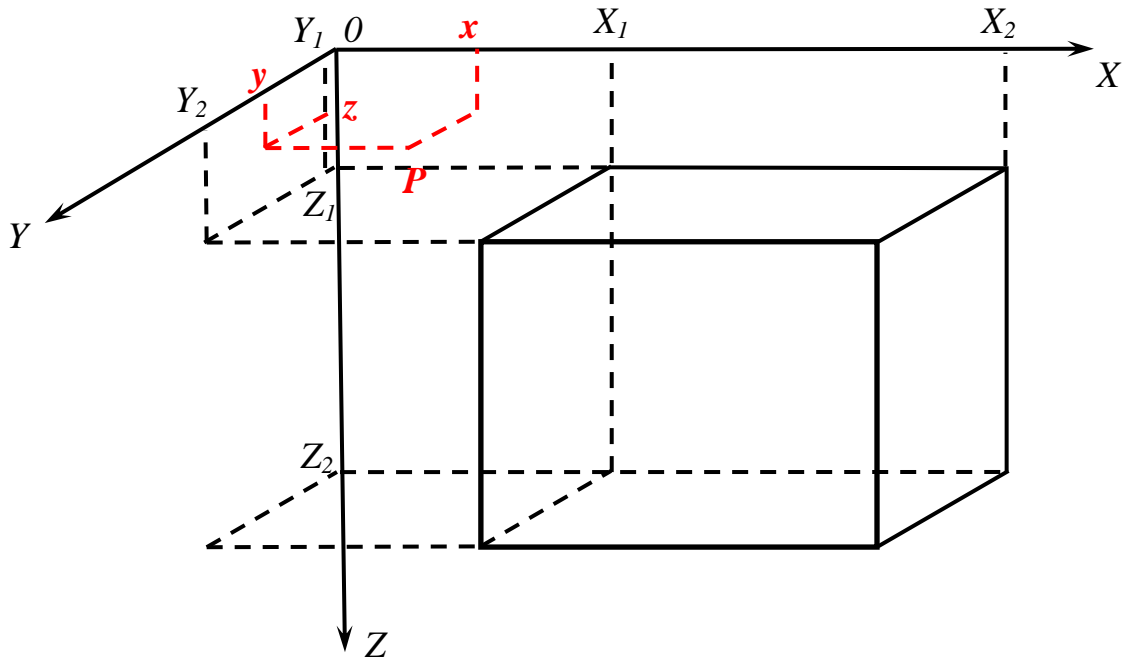


Рисунок 6 – Расположение элементарного прямоугольного параллелепипеда относительно принятой условной системы координат

Данная система состоит из однородных прямоугольных параллелепипедов $k = m \times n$, $(T) = \{X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2\}$, $\Delta\rho$ – плотность масс однородного параллелепипеда T ; G – гравитационная постоянная и вычисляется по формулам:

$$R = (X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^{1/2}; \quad (67)$$

$$X - x = X', Y - y = Y', Z - z = Z';$$

$$V(P) = G\Delta\rho \iiint_T \frac{dXdZdY}{R}, \quad (68)$$

где $V(P)$ – потенциал притяжения параллелепипеда T .

Формулы вертикальных и горизонтальных составляющих притяжения параллелепипеда, градиентов силы притяжения параллелепипеда T по осям приведены в работах [28, 82]. А также приведены интегрированные по X' , Y' , Z' выражения для вычисления потенциала притяжения однородного прямоугольного параллелепипеда T в точке P и его производных.

Также однородные тела сложной конфигурации можно аппроксимировать совокупностью горизонтальных слоев, ограниченных многоугольником [113] или

многогранником [101]. К поверхностному интегралу, формула (50), от объемного позволяет перейти интегральная формула (66) Гаусса.

В работе [94] приведен пример использования протяженного тела T . Разбив T на маленькие кусочки ΔT с массой Δm . Символом Δ обозначаем приращение, а Q это точка пространства. Определение потенциала V и его градиента w выражается в виде

$$V(Q) = \int_T \frac{dm}{s}, \quad (69)$$

$$w(Q) = - \int_T \frac{\mathbb{S}}{s^3} dm, \quad (70)$$

где dm – элемент массы тела T ,

$$\mathbb{S} = r - r', s = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

r и r' – радиус-векторы от центра системы координат до притягиваемой точки Q и до притягивающей точки Q' соответственно.

При $Q \notin T$ потенциал называется внешним, а при $Q \in T$ – внутренним.

2.5 Потенциалы правильных гравитирующих тел

Потенциал одномерных тел.

Потенциал материальной кривой T (рисунок 7) в силу (68) определяется криволинейным интегралом

$$V(Q) = V(x, y, z) = \int_T \frac{\alpha(x', y', z') ds}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}, \quad (71)$$

где ds – элемент длины T ;

α (кг/м) – линейная плотность в \mathbb{R}^3 (пространство согласно закону Ньютона).

Притягивающий элемент $Q'Q''$ обладает массой $dm = \alpha(Q)ds$, $ds = |Q'Q''|$; точка Q' имеет координаты (x', y', z') ; $|Q'Q''| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$. Интеграл (71) элементарен для широкого класса плотностей.

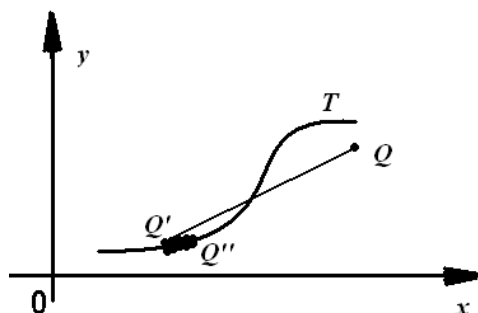


Рисунок 7 – Потенциал кривой T в точке $Q(x, y, z)$

Отрезок.

В данном случае T , это отрезок оси z , который расположен между точками $Q_1(0,0,a)$ и $Q_2(0,0,b)$, при условии $a < b$. Линейная плотность отрезка $\alpha(z)$, масса $M = \int_a^b \alpha(z)dz$.

Потенциал в цилиндрических координатах R, φ, z зависит от R, z и согласно формулы (70) равен

$$V(Q) = V(R, z) = \int_a^b \frac{\alpha(z')dt}{\sqrt{R^2 + (z'-z)^2}}. \quad (72)$$

Окружность.

Рассмотрим окружность $x = a \cos\varphi$, $y = a \sin\varphi$, $z = 0$ с линейной плотностью $\alpha(\varphi)$. В цилиндрических координатах элемент массы равен $dm = a \alpha(\varphi)d\varphi$.

Получим

$$V = \frac{2a}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} \int_{\pi}^{\pi+2} \frac{\alpha(2t + \varphi + \pi)dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad (73)$$

где $k = \sqrt{\frac{4aR}{(a+R)^2 + z^2}}$, $t_2 - t_1 = \pi$, $t_1 = -\frac{\pi + \varphi}{2}$, $t_2 = \frac{\pi - \varphi}{2}$, $0 \leq k \leq 1$, причем $k = 0$ на оси z (при $R = 0$), $k = 1$ на самой окружности T ($R = a, z = 0$).

2.6 Двухмерные задачи гравиметрии

Плоскость.

Потенциал материальной поверхности T с поверхностной плотностью β в пространстве \mathbb{R}^3 в силу уравнения (68) определяется двойным поверхностным интегралом

$$V(Q) = V(x, y, z) = \iint_T \frac{\beta(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}}. \quad (74)$$

Поверхностная плотность β измеряется кг/м². T – область в плоскости xu . Потенциал $V(Q)$ непрерывен во всем пространстве \mathbb{R}^3 .

В качестве аппроксимирующего элемента, возможно, использовать трапеции с вертикальными боковыми сторонами (рисунок 8), а также с основаниями в виде сегментов парабол (рисунок 9) (B) и (H), это верхнее и нижнее основания, которые произвольно расположены [79].

Под прямой задачей гравиметрии для рассматриваемых тел понимают определение вертикальной составляющей гравитационного потенциала, которая имеет вид

$$V_z(x, z) = 2f \iint_S \rho(\xi, \zeta) \frac{(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta, \quad (75)$$

где x и z – координаты точки расчета;

f – константа гравитации;

ξ и ζ – переменные интегрирования;

S – область интегрирования;

$\rho(\xi, \zeta)$ – распределение плотности.

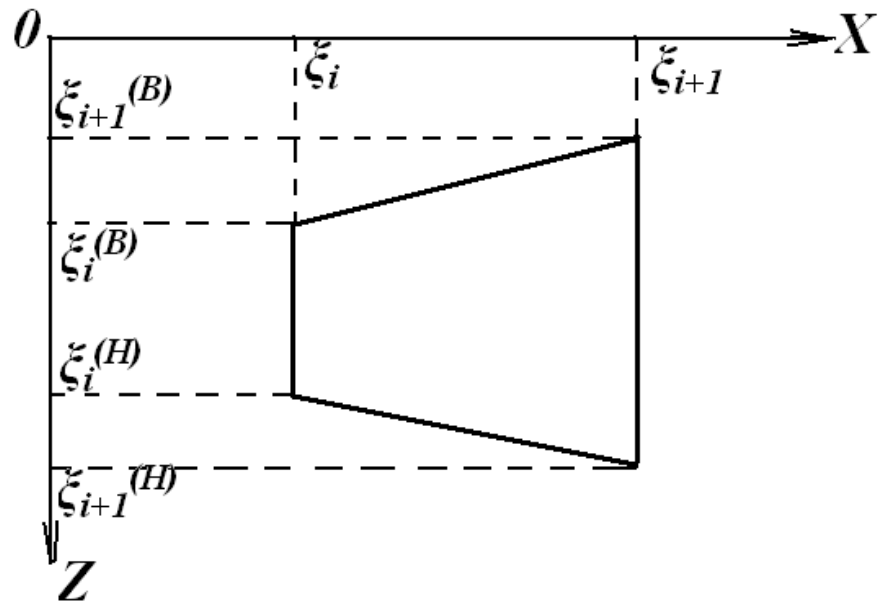


Рисунок 8 – Трапеция с вертикальными боковыми сторонами

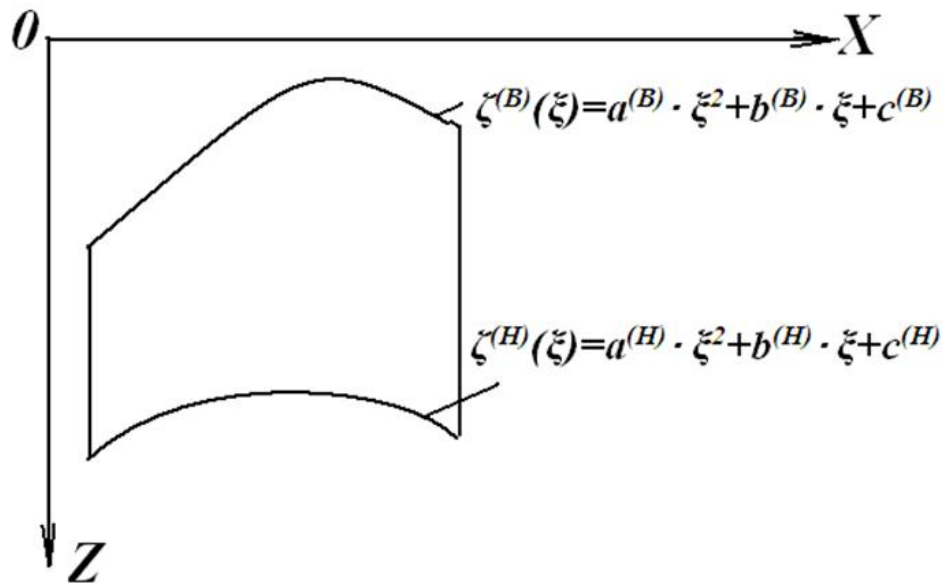


Рисунок 9 – Трапеция с параболическими основаниями

Часто $\rho(\xi, \zeta) = const$, а моделируемый объем среды представляется набором кусочно-однородных аппроксимирующих тел конечных элементов.

Однородный прямоугольник.

Представим T в виде однородного прямоугольника поверхностной плотности β с вершинами $Q_{ik}(a_i, b_k, 0)$, где $i, k = 1, 2$; $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$.

Тогда получаем

$$V = \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} (F_{ik} + 2zG_{ik}), \quad (76)$$

где $F_{ik} = (a_i - x) \ln(b_k - y + s_{ik}) + (b_k - y) \ln(a_i - x + s_{ik})$,

$$G_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{z(b_k - y)}{\left(\sqrt{(a_i - x)^2 + z^2} + a_i - x \right) \left(\sqrt{(a_i - x)^2 + z^2} + s_{ik} \right)},$$

$$s_{ik} = \sqrt{(a_i - x)^2 + (b_k - y)^2 + z^2}.$$

Однородный треугольник.

Проекция $Q_0(x, y, 0)$ точки $Q(x, y, z)$ попадает внутрь треугольника $Q_1Q_2Q_3$. Необходимо разбить его на три вспомогательных треугольника $T = QQ_iQ_{i+1}$, $i=1, 2, 3$, при индексе $i=3$, принимаем $Q_{i+1} = Q_1$, рисунок 10.

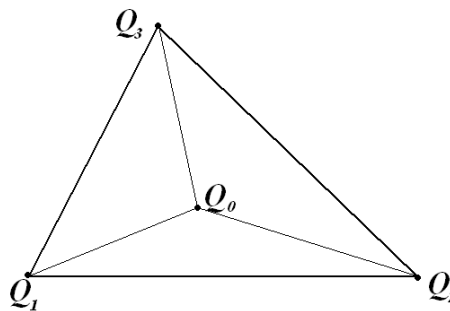


Рисунок 10 – Потенциал треугольника

Потенциал $T(Q)$ равен сумме потенциалов треугольников T_i , тогда

$$\frac{V}{\beta} = -2\pi|z| + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2}}{s_{i+2}} \ln \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}}{r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} + \right. \\ \left. + z \left[\operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2)z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2)z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} \right] \right\}, \quad (77)$$

где $r_i = Q_0 Q_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$;

$s_i = Q_{i+1} Q_{i+2} = \sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (y_{i+2} - y_{i+1})^2}$;

φ_i – угол между векторами $\overrightarrow{Q_0 Q_{i+1}}$ и $\overrightarrow{Q_0 Q_{i+2}}$:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_i &= \frac{(x_{i+1} - x)(x_{i+2} - x) + (y_{i+1} - y)(y_{i+2} - y)}{r_{i+1} r_{i+2}}, \\ \sin \varphi_i &= \frac{(x_{i+1} - x)(y_{i+2} - y) - (y_{i+1} - y)(x_{i+2} - x)}{r_i r_{i+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Однородная сфера

Примем T однородной сферой радиуса a с постоянной поверхностной плотностью β . Масса сферы равна $M = 4\pi a^2 \beta$. θ, φ – угловые переменные. Сферические координаты с началом в центре сферы вычисляются как,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (79)$$

Потенциал в данном случае зависит только от r . Пробная точка имеет декартовы координаты $Q(0, 0, r)$. Элемент площади сферы равен $d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, запишем

$$V(Q) = a^2 \beta \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (80)$$

Окончательно,

$$V(r) = \begin{cases} M / a, & \text{если } r \leq a, \\ M / r, & \text{если } r \geq a. \end{cases} \quad (81)$$

Очевидно, что сфера не притягивает внутренних точек, а внешние притягивает.

2.7 Трехмерные задачи гравиметрии

Потенциал трехмерного тела.

Потенциал трехмерного тела T с плотностью ρ (кг/м³) в пространстве \mathbb{R}^3 можно определить объемным интегралом

$$V(Q) = \iiint_T \frac{\rho(x', y', z') d\tau}{s}, \quad (82)$$

где $s = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$;

$d\tau$ – элемент объема.

Потенциал $V(Q)$ непрерывен во всем пространстве \mathbb{R}^3 .

Для решения таких задач как трехмерные, в качестве аппроксимирующих тел обычно используют вертикальные треугольные призмы (рисунок 11), у которых верхнее и нижнее основания произвольны.

Выражение для вертикальной составляющей гравитационного потенциала имеет вид

$$V_z(x, y, z) = f \iiint_D \rho(\xi) \frac{(\zeta - z)}{P^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad (83)$$

$$P = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}, \quad (84)$$

где x, y, z – координаты точки расчета;

ξ, η, ζ – переменные интегрирования;

D – вертикальная треугольная призма (рисунок 11);

$\rho(\zeta)$ – распределение плотности.

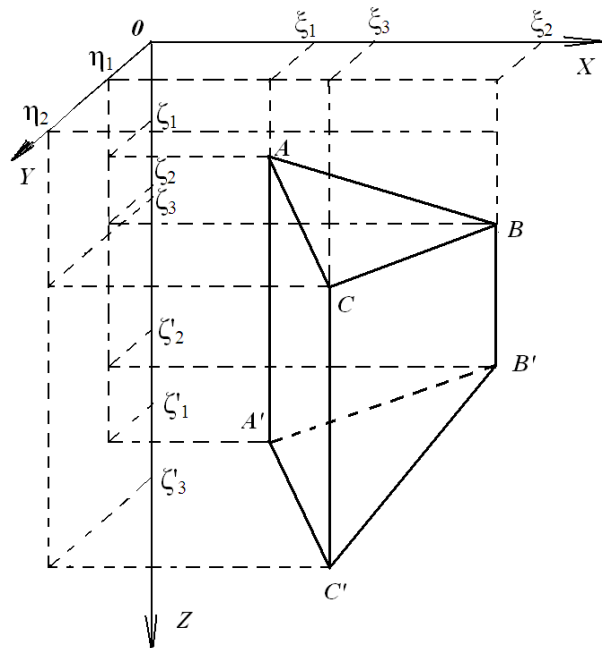


Рисунок 11 – Вертикальная треугольная призма

Сферичность Земли необходимо учитывать при построении моделей крупных геологических объектов. В данном случае элементы аппроксимации удобно использовать в виде сферических тел [86, 87, 108]: многогранников (рисунок 12) и треугольных призм (рисунок 13).

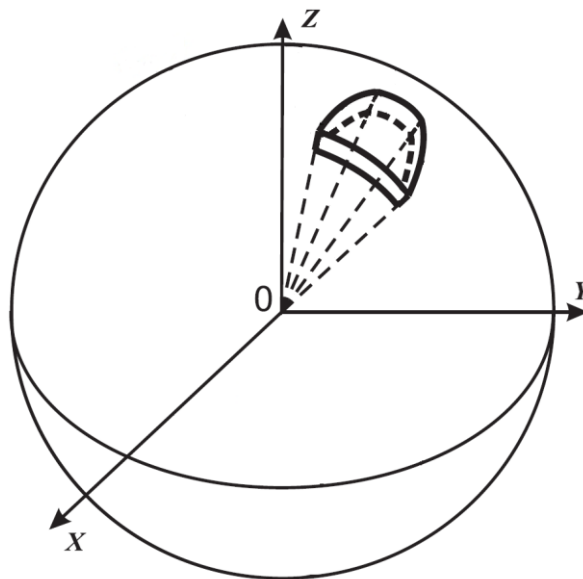


Рисунок 12 – Сферический многогранник

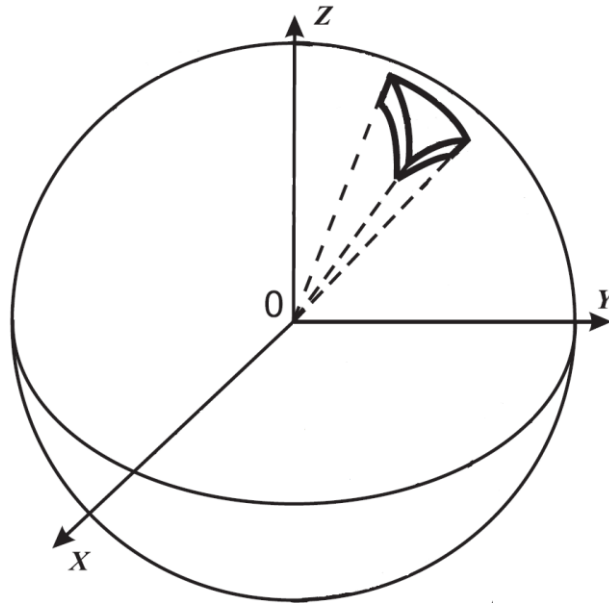


Рисунок 13 – Сферическая треугольная призма

Определения сферического многогранника и сферической треугольной призмы описаны в [79].

Однородный тетраэдр с потенциалом в вершине.

Примем T однородным тетраэдром $Q_1Q_2Q_3Q_4$, (рисунок 14), который обладает правой ориентацией. Плоскость, содержащая точки $Q_1Q_2Q_3$ принята за ориентированную плоскость $x'y'$. Точка Q_4 лежит в верхнем полупространстве $z' > 0$.

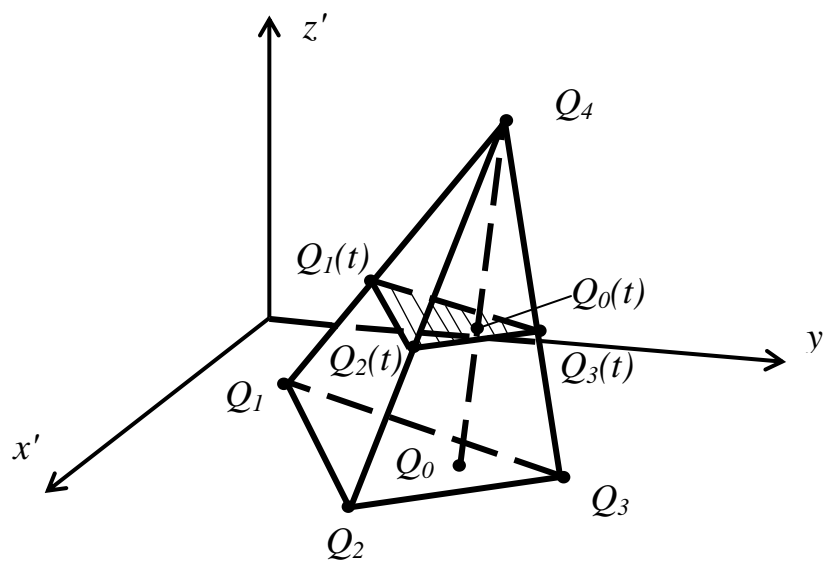


Рисунок 14 – Тетраэдр

Координаты Q_i для $i = 1, 2, 3$ обозначаем через $(x_i, y_i, 0)$ и для $i = 4$ через (x, y, z) , $z > 0$. Необходимо разбить тетраэдр на бесконечно тонкие слои с толщиной zdt плоскостями $z' = (1 - t)z$.

Потенциал слоя равен потенциалу треугольника $Q_1(t)Q_2(t)Q_3(t)$, а потенциал в точке Q_4 определен формулой

$$\begin{aligned} \frac{2V(Q_4)}{\rho z} = & -z(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2}}{s_{i+2}} \ln \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}}{r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} + \right. \\ & \left. + z \left[\operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2)z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2)z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (85)$$

Однородный тетраэдр.

В данном случае, примем $Q(x, y, z)$ произвольной точкой внутри T . Потенциал в точке Q будет суммой потенциалов четырех правоориентированных тетраэдров T_n : $T_1=Q_2Q_4Q_3Q$, $T_2=Q_3Q_4Q_1Q$, $T_3=Q_1Q_4Q_2Q$, $T_4=Q_1Q_2Q_3Q$.

$$\begin{aligned} \frac{2V(Q)}{\rho} = & -\sum \tilde{z}_n |\tilde{z}_n| \varphi_{mj} + \sum \left\{ \frac{\tilde{z}_n r_{mj} r_{mj} \sin \varphi_{mj}}{s_{ij}} \ln \frac{r_{mj}^2 - r_{mj}^2 + s_{ij}^2 + 2s_{ij} R_j}{r_{mj}^2 - r_{mj}^2 - s_{ij}^2 + 2s_{ij} R_j} + \right. \\ & \left. + \tilde{z}_n^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{(r_{mj}^2 - r_{mj}^2 + s_{ij}^2) \tilde{z}_n}{2r_{mj} r_{mj} R_j \sin \varphi_{mj}} - \operatorname{arctg} \frac{(r_{mj}^2 - r_{mj}^2 - s_{ij}^2) \tilde{z}_n}{2r_{mj} r_{mj} R_j \sin \varphi_{mj}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (86)$$

где S_n – плоскость, содержащая грань $Q_i Q_j Q_k$ тетраэдра T_n ;

Q_{n0} – проекция Q на S_n , ρ – плотность, $s_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$,

$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_i - z)^2}$, $\xi_{ijk} = (y_j - y_i)(z_k - z_j) - (y_k - y_i)(z_j - z_i)$,

$\eta_{ijk} = (z_j - z_i)(x_k - x_j) - (z_k - z_i)(x_j - x_i)$, $\zeta_{ijk} = (x_j - x_i)(y_k - y_j) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)$,

$\lambda_{ijk} = \sqrt{\xi_{ijk}^2 + \eta_{ijk}^2 + \zeta_{ijk}^2}$, $\tilde{z}_n = |QQ_{n0}| = \frac{(x - x_i)\xi_{ijk} + (y - y_i)\eta_{ijk} + (z_i - z_j)\zeta_{ijk}}{\lambda_{ijk}}$, $r_{ni} = \sqrt{R_i^2 - \tilde{z}_n^2}$,

$\sin \varphi_{nij} = -\frac{\Psi_{nij}}{r_{ni} r_{nj} \lambda_{ijk}}$, $\cos \varphi_{nij} = \frac{(x - x_i)(x - x_j) + (y - y_i)(y - y_j) + (z - z_i)(z - z_j) - \tilde{z}_n^2}{r_{ni} r_{nj}}$,

$$\begin{aligned} \Psi_{mj} &= (\overline{Q_i Q_j}, \overline{Q_i Q_j}, \overline{Q_i Q_j} \times \overline{Q_i Q_k}) = (\overline{Q_i Q_j} \cdot \overline{Q_i Q_j}) (\overline{Q_i Q_j} \cdot \overline{Q_i Q_k}) - |\overline{Q_i Q_j}|^2 (\overline{Q_i Q_j} \cdot \overline{Q_i Q_k}) = \\ &= [(x - x_i)(x_j - x_i) + (y - y_i)(y_j - y_i) + (z - z_i)(z_j - z_i)] [(x_j - x_i)(x_k - x_i) + (y_j - y_i)(y_k - y_i) + \\ &+ (z_j - z_i)(z_k - z_i)] - [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2] [(x - x_i)(x_k - x_i) + (y - y_i)(y_k - y_i) + \\ &+ (z - z_i)(z_k - z_i)]. \end{aligned}$$

Однородный шар.

Внутренний потенциал однородного шара с радиусом a и с постоянной плотностью равен [94]

$$V(r) = \frac{2\pi}{3} \rho (3a^2 - r^2). \quad (87)$$

В работе [19] приведены и выведены формулы потенциала для внешней точки бесконечно тонкого шарового слоя, шарового слоя конечной толщины, шара и для внутренней точки тонкого шарового слоя, шарового слоя конечной толщины, шара. А также приведены формулы для потенциала точки, системы точек, тела, простого слоя, двойного слоя, однородного сферического простого слоя, однородного шара в работе [27].

Шаровая модель была рассмотрена в работах [29]. Модель в виде шара аппроксимирует гору на поверхности плоской Земли. Аномальное поле создано шаром постоянной плотности $\rho = 3$, и радиусом $r_0 = 6$ км, который наполовину погружен в Землю, не вытесняя ее массы, а центр расположен на отсчетной плоскости.

Считая поверхность Земли плоской при однородном поле силы тяжести, так как поверхность горы составляет малую часть Земли, уровенные поверхности нормального потенциала будут представлены параллельными плоскостями, одна из которых, отсчетная (рисунок 15).

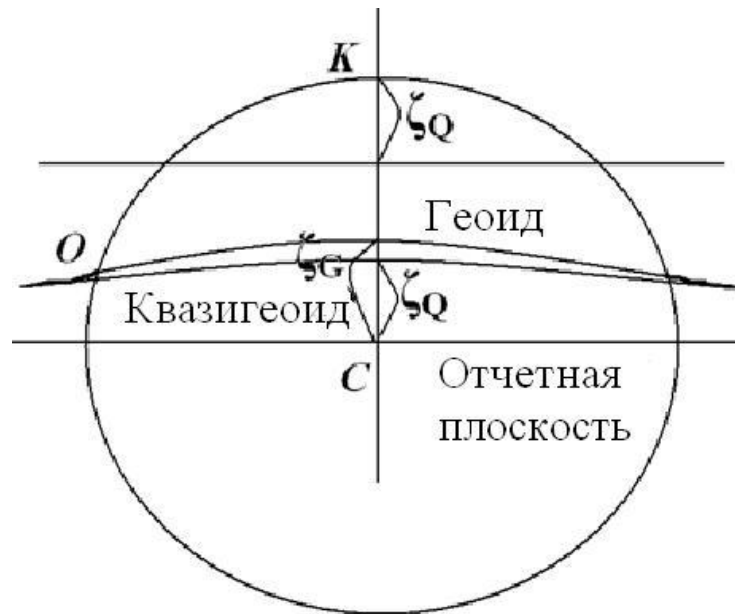


Рисунок 15 – Шаровая модель

Аномалии силы тяжести и уклонения отвеса вдоль линии нивелирования от точки O (уровень моря) до вершины K выражены формулами

$$(g - \gamma) = \Delta g_0 (H/r_0), \quad (88)$$

$$\xi = \Delta g_0 l / \gamma r_0, \quad (89)$$

где H – длина нормали к отсчетной плоскости;

Δg_0 – аномалия силы тяжести в вершине модели (в точке K);

l – проекция расстояния между центром шара (точкой C) и текущей точкой профиля на отсчетную плоскость.

$\gamma = 1004,3068$ Гал, соответствует притяжению шара постоянной плотности $\rho_0 = 6$ и радиуса $R = 6000$ км. $\Delta g_0 = 502,1534$ мГал ($\Delta g_0 / \gamma_0 = 1/2000$).

«Измеренные» высоты могут быть вычислены по формуле астрономического нивелирования земной поверхности

$$dh_\omega = dH + \xi dl. \quad (90)$$

Формула (90) при движении от уровня моря модели к ее вершине при отрицательном dl примет вид

$$H_i(K) = H(K) - \zeta_0 - \frac{\Delta g_0}{2\gamma} r_0 \cos^2 \arcsin \frac{\zeta_0}{r_0} \approx H(K) - \zeta_0 - \frac{\Delta g_0 r_0}{2\gamma} = 5995,5 \text{ м}, \quad (91)$$

где $\zeta_0 = \frac{\Delta g_0 r_0}{\gamma} = 3 \text{ м}$ – высота геоида в начальной точке O .

В [62] описаны некоторые тела простой формы с постоянной плотностью. Они имеют влияние на силу тяготения, которая выражается аналитически в замкнутой форме. Для шара радиуса R с постоянной плотностью или состоящего из концентрических слоев известна формула

$$\Delta g = \frac{4}{3} \pi G R^3 \Delta \rho \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (92)$$

где $\Delta \rho$ – разность плотности возмущающего тела и плотности окружающей его среды, x, y, z – координаты центра шара. Далее будут приведены примеры использования данной аналитической модели.

2.8 Примеры использования аналитических моделей при обработке геодезических измерений на природных и техногенных объектах

Совместная математическая обработка комплексных геодезических и геофизических наблюдений в условиях извлечения и перемещения больших объемов руды и пород.

В работе [56] приведен пример совместной математической обработки и интерпретации пространственно–временных рядов комплексных геодезических и геофизических наблюдений в условиях перемещения больших объемов руды и пород. Этот пример соответствует задаче разделения движений физической поверхности и вариаций во времени внешнего гравитационного поля Земли. Результатом математической обработки наблюдений являются как оценки вертикальных смещений мобильных пунктов геодезической сети, так и оценки параметров ме-

няющегося гравитационного поля с оценкой точности всех определяемых параметров.

В работе [67] обращается внимание, на то, что необходимо различать смещения уровенных поверхностей и вертикальные смещения точек земной поверхности, изменения направления отвеса во времени и горизонтальные смещения этих точек.

Смещения уровенных поверхностей во времени, и значимые вертикальные смещения точек земной поверхности могут возникать, при разработке крупных месторождений полезных ископаемых. На территории России имеются месторождения, на которых выполняется перемещение больших масс руд и пород. Ежегодно перемещается и извлекается 160 млн. тонн руд и пород, например, на Хибинском массиве [77] за 60 лет извлечено более 1 млрд. м³ фосфатных руд. При условиях ведения крупномасштабных горных работ на глубине достигающей от 600 до 700 м с откосами стен рудника 35°–40° геомеханическая ситуация усложняется. Следовательно, необходимо выполнять комплексный мониторинг массива горных пород для своевременного прогноза и предотвращения катастрофических явлений. Для мониторинга деформационных процессов земной коры в частности, применяют высокоточные геодезические наблюдения.

Для определения вертикальных движений земной поверхности в районах разработки крупных месторождений полезных ископаемых используют геометрическое нивелирование. При устройстве нивелира в рабочее положение, приводя пузырек уровня в нульпункт, визирная ось зрительной трубы является касательной линией к уровенной поверхности потенциала силы тяжести. Так как в конкретном районе поле силы тяжести зависит от распределения масс внутри Земли, то перераспределение масс вызовет изменение поля силы тяжести. В данном случае визирная ось зрительной трубы нивелира займет другое положение и отсчеты по рейкам изменятся, а как следствие, будет измерено другое превышение. Накопления этих измерений в превышениях по линии нивелирования могут достигать нескольких миллиметров. Эти величины превышают ошибки измерений при высокоточном нивелировании, не учтя влияния перемещенных масс на ре-

зультаты нивелирования можно неверно сделать выводы о картине вертикальных движений.

В работе [74] дана теория метода решения задачи совместной математической обработки и пространственно-временной интерпретации результатов разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений на основе моделирования состояний неоднородностей (масконов) геофизической среды. Масконы, это точечные массы и аномалиеобразующие тела (АОТ) которые удобно использовать для аппроксимации аномального гравитационного поля. Они бывают положительными, нулевыми и отрицательными. Их число может меняться от эпохи к эпохе.

Пространственно-временная структура комбинаций масконов может меняться в процессе опознания в соответствии со структурой неоднородностей геофизической среды, в соответствии с максимальными и минимальными значениями уровня поверхности. Например, комбинации глубинных и поверхностных масконов. К глубинным масконам относятся резервуары очагов вулканов, грунтовые воды, полости выработок объемных масс полезных ископаемых, различные пустоты в земной коре и т. п. К поверхностным масконам относятся перемещенные массы полезных ископаемых (как природные, так и техногенные процессы), конусы вулканов, водохранилища, массы крупных инженерных сооружений и т.п.

При отсутствии априорной информации конфигурация масконов может быть задана в узлах регулярной сетки или вершинами правильных многогранников [42]. Указанные масконы в пространстве и времени могут быть обусловлены как вариациями гравитационного поля, так и изменением физической поверхности Земли во времени.

Поставленная Молоденским М. С. [67] задача разделения движений физической поверхности и вариаций во времени внешнего гравитационного поля Земли как смещений уровневых поверхностей потенциала силы тяжести, так и изменений положений отвесных линий во времени решена в работе [74]. Геодинамическая система (ГДС) моделируется системой двух нелинейных уравнений состояний:

Первое уравнение состояний моделирует закономерности движений и вариаций ГДС, возмущаемых детерминированными и стохастическими воздействиями внешней среды.

Второе уравнение состояний моделирует результаты пространственно-временных разнородных комплексных геофизических и геодезических наблюдений с учетом их ошибок.

Эти уравнения состояний, включают в качестве параметров масконы и решаются совместно по адаптивному рекуррентному алгоритму фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ).

Определить изменения положений отвесной линии, оптимальные оценки координат пунктов физической поверхности Земли и параметры гравитационного поля позволяет метод совместной обработки геодезических и гравиметрических наблюдений в пространстве и во времени с использованием ФКБ. Кроме того, данный метод позволяет разделить оценки движений уровенных поверхностей и движений физической поверхности.

Автором [56] была смоделирована ситуация, которая соответствует добыче и перемещению руды с наличием вертикальных движений в районе месторождения. При данном перемещении руды возникает аномальное гравитационное поле, которое было аппроксимировано системой двух масконов (рисунок 16).

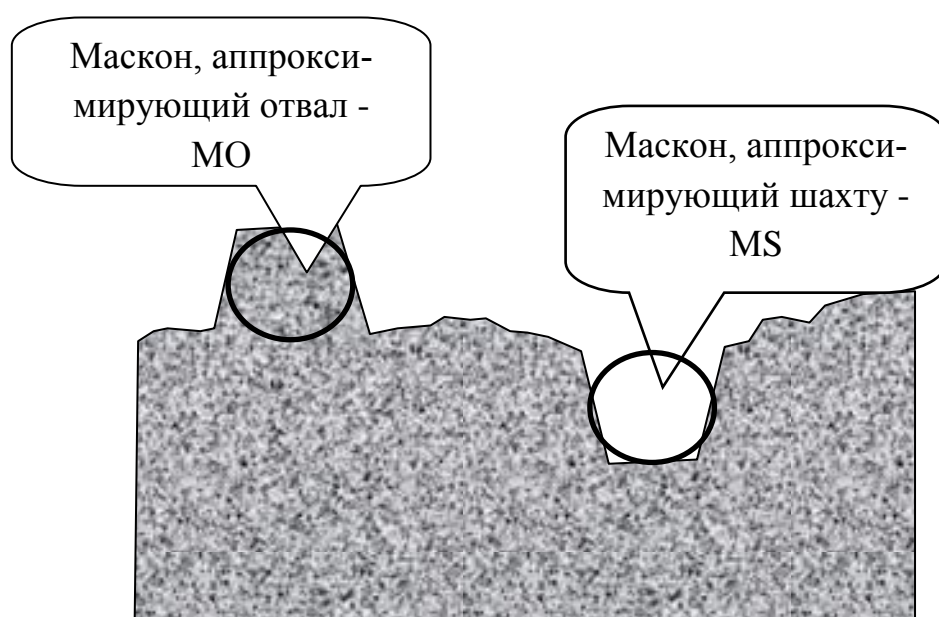


Рисунок 16 – Аппроксимация масконами шахты и отвала пород

Гравиметрические и нивелирные наблюдения включают в систему наблюдений за геодинамическими объектами. Нивелирные наблюдения включают в себя наблюдения семи линий, а гравиметрические наблюдения включают в себя определение абсолютных значений силы тяжести на всех пунктах этой сети (рисунок 17). Нивелирная сеть состоит из двух взаимно неизменных пунктов C_1 и C_2 и трех мобильных пунктов M_1 , M_2 и M_3 .

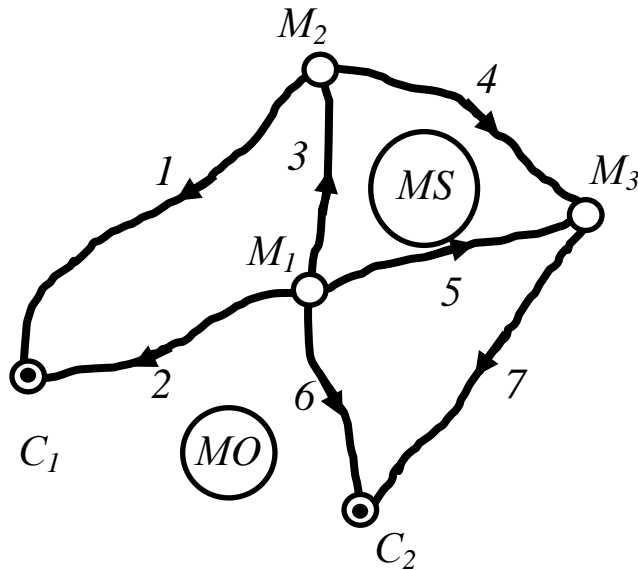


Рисунок 17 – Сеть нивелирования

Отметки мобильных пунктов H_{M_1} , H_{M_2} , H_{M_3} и вертикальные смещения u_{M_1} , u_{M_2} , u_{M_3} , включены в вектор параметров динамической системы, а в качестве характеристик аномального гравитационного поля, выступают значения составляющих аномалии вектора силы тяжести на пунктах $\Delta g_{i,x}$, $\Delta g_{i,y}$, $\Delta g_{i,z}$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

Наблюдения обрабатывались в принятой пространственной топоцентрической астрономической горизонтной системе координат (ПТАГСК). ПТАГСК определяется таким образом, что начало координат совпадает с точкой наблюдения на Земле, ось X направлена на север и лежит на пересечении плоскости астрономического горизонта и плоскости астрономического меридиана точки

наблюдения, ось Y лежит в плоскости астрономического горизонта, ось Z направлена по отвесной линии в сторону увеличения высот.

Гравитационное поле в первую эпоху наблюдений характеризуется значением силы тяжести, вызванной притяжением бесконечной горизонтальной плиты толщиной плиты $dH = 8$ км и шара, аппроксимирующего конус вулкана.

Бесконечная горизонтальная плита плотностью $\Delta\rho$ и толщиной dH создает в точке над плитой аномалию силы тяжести

$$\Delta g = 2 \pi G \Delta\rho dH, \quad (93)$$

где $G = 6,673 \cdot 10^{-8}$ см³/Гал·с² – гравитационная постоянная. При этом аномалия силы тяжести не зависит от высоты точки над плитой.

Для выбранной автором [56] системы координат ПТАГСК учет аномалии силы тяжести при нивелировании ведется только по координате Z . Влияние бесконечной плиты на аномалию силы тяжести в любой точке рассматриваемой нивелирной сети составит 882 158,7 мкГал.

Предполагая, что если перемещение масс от эпохи к эпохе происходит с постоянной скоростью, то за три года влияние такого перемещения на результаты наблюдений нивелирных превышений достигает нескольких миллиметров, при принятой плотности пород $\Delta\rho = 2,63$ г/см³. Для радиуса $RS=300$ м аппроксимирующего шахту шаром, получена масса $MK(t=1) = (4/3)\pi RS^3 \Delta\rho = 2,97 \cdot 10^8$ т. Для радиуса шара $RS = 260$ м, аппроксимирующего отвал, получена масса $MK(t=1) = (4/3)\pi RS^3 \Delta\rho = 1,94 \cdot 10^8$ тонн. Влияние перемещения масс на нивелирные превышения δh в мм для случая расположения пунктов сети и центров аномальных масс, соответствующего рисунку 17, отражено в таблице 2.

Гравитационное поле в каждую эпоху описано дискретно – через значения компонент уклонений отвесной линии ξ , η и силы тяжести g для всех пяти пунктов геодезической сети. Они были вычислены по значениям аномальных масс, координатам пунктов сети и координатам центров аномальных масс.

Таблица 2 – Влияние перемещенных масс на нивелирные превышения

Номер	Ход (кон-нач)	Длина хода, км	δh_s (влияние шахты)	δh_o (влияние отвала)	δh (влияние итоговое)
1	C1–M2	4,2	0,08	– 0,07	0,01
2	C1–M1	3,2	7,77	– 3,91	3,86
3	M2–M1	2,0	– 4,61	2,41	– 2,20
4	M3–M2	2,8	0,00	0,00	0,00
5	M3–M1	2,0	– 4,52	2,36	– 2,16
6	C2–M1	3,0	5,89	– 2,95	2,94
7	C2–M3	3,6	0,03	– 0,03	0,01

В работе [56] смоделирован геодинамический объект, для идентификации которого была проведена совместная математическая обработка пространственно-временных рядов разнородных комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений. На этом объекте производится разработка рудного месторождения, на территории которого происходят одновременно движения физической поверхности Земли и изменения гравитационного поля. Расчеты показали, что перемещение масс вызывает изменения в превышениях в несколько миллиметров. С учетом влияния аномальных масс MO и MS смоделированы эпохи комплексных геодезических и геофизических наблюдений (геометрическое нивелирование и определение абсолютных значений силы тяжести).

2.9 Построение физико-математической модели динамики земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области

В работах [52, 57] был выбран локальный участок области действующего вулкана в качестве физической модели геодинамического объекта (рисунок 18). За данным объектом проводили систему наблюдений, которые включали в себя нивелирные и гравиметрические наблюдения [53, 58].

Пункты C_1 и C_2 , это условно стабильные пункты нивелирной сети, которые имеют неизменное взаимное положение во времени, пункты M_1 , M_2 и M_3 являются мобильными.

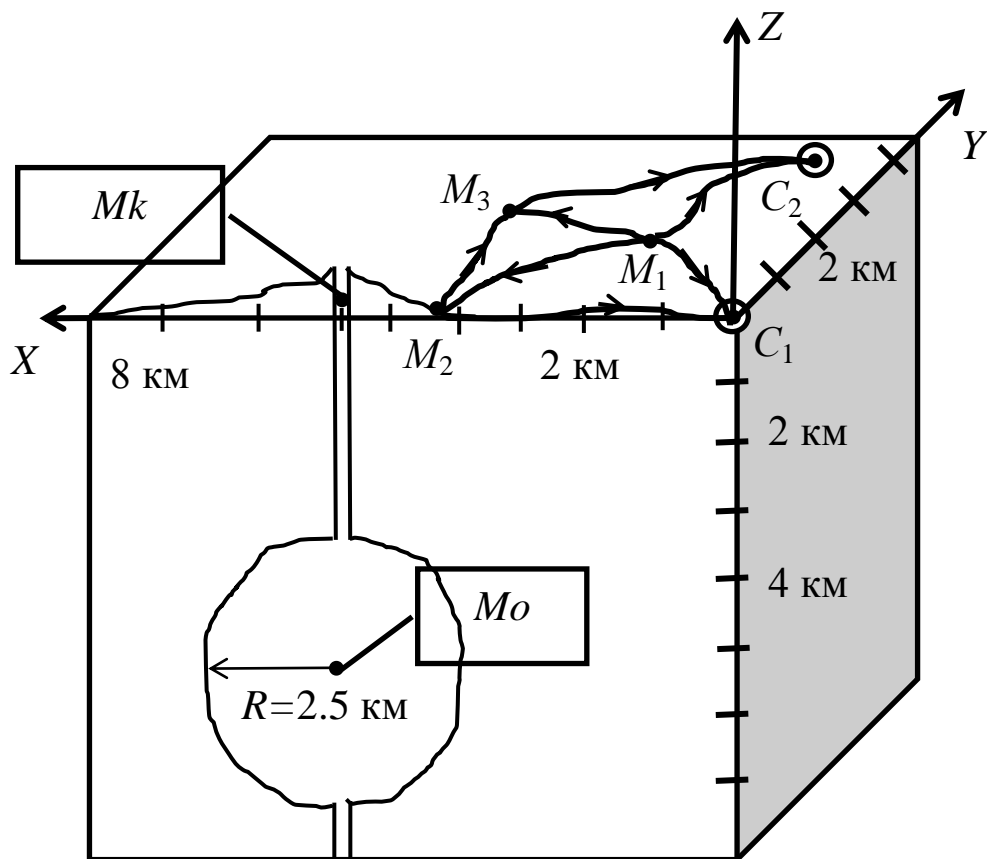


Рисунок 18 – Физическая модель геодинамического объекта и системы наблюдений

При моделировании изменений гравитационного поля Земли и движений физической поверхности был выделен вектор параметров состояний. В связи с тем, что размерность параметров вектора основных трансформант возмущающего потенциала силы тяжести намного больше, чем размерность вектора параметров, то вектор масконов, который входит в определяемые параметры расширенного вектора геодинамической системы, позволил сократить размерность задачи.

В данном случае изменение гравитационного поля на локальном участке местности характеризуется деятельностью вулкана, то есть происходящим перемещением аномальных масс от зоны образования магмы до выхода магмы при извержении вулкана. Значения составляющих уклонов отвесных линий в данном случае выражаются через координаты центров масс и аномальные массы.

При извержении вулкана не все вещество остается на поверхности и в конусе вулкана, если принять, сколько процентов магматического вещества остается в конусе, то можно получить массу конуса вулкана.

Смоделированные массы масконов, позволяют дискретно описать гравитационное поле в каждую эпоху через вычисленные значения уклонений отвесной линии ξ , η и силы тяжести g для всех пяти пунктов геодезической сети.

В работах [57, 58] была описана физико-математическая модель вертикальных движений земной поверхности в области вулкана и изменений гравитационного поля в вулканической области. Корректная идентификация такой модели достигается путем совместной математической обработки пространственно-временных рядов разнородных комплексных как нивелирных, так и гравиметрических наблюдений.

В работе [58] получены оценки вертикальных смещений мобильных пунктов M_1 , M_2 , M_3 , масс масконов с изменением их от эпохи к эпохе, что позволило выдвинуть гипотезы о закономерности движений и изменений масс. Отметки мобильных пунктов меняются с постоянной скоростью, судя по оценкам смещений u_{M_1} , u_{M_2} , u_{M_3} , которые примерно равны в разные эпохи. Сложно подобрать закон изменения во времени масс MK , MO , так как увеличение массы конуса от эпохи к эпохе снижается и это происходит вследствие изменения давления в магматическом очаге, с пропорциональным уменьшением излияния магмы.

Оценка точности в четырех эпохах, оценки отметок мобильных пунктов, вертикальных смещений пунктов, аномалий силы тяжести, компонент уклонений отвесной линии и аномалии высоты на пунктах геодезической сети были получены путем совместной математической обработки и интерпретации смоделированных пространственно-временных рядов комплексных геодезических и гравиметрических наблюдений по алгоритму ФКБ. Адекватные модели изменения масс масконов как глубинных, так и поверхностных и модели движений земной поверхности при совместной обработке гравиметрических наблюдений и нивелирных наблюдений превышений с высокой точностью позволяет повысить точность оценивания.

При массе излившейся магмы равной $8,61 \cdot 10^9$ т, влияние на изменение значений силы тяжести на пунктах составило до 7,8 мГал, а на нивелирные превышения до 25 мм. Что подтверждает возможность выявить аномальные гравитационные и геодезические параметры геодинамических процессов комплексно.

Используя ФКБ автор в [57, 58] определил координаты центра глубинного маскона, который аппроксимирует изменение массы магматического очага в верхней его части и массу конусообразного вулкана. Кроме этого, установлены оптимальные характеристики системы наблюдений, для оптимизации которых настраивается вес гравиметрических наблюдений, точность абсолютных значений силы тяжести и точность измерений превышения. В данном случае вес нивелирных превышений принимается равным: $p_{h_i} = 1 / L_i$, где L_i – длина хода в километрах.

В предложенном в работах [57, 58] вычислительном эксперименте показана эффективность способа моделирования объектов геодинамики, адаптации его коэффициентов и настройки оценки параметров по критерию оптимальности рекуррентного ФКБ.

2.10 Модели водохранилища

В работе [29] модель водохранилища рассматривался как горизонтальный полуцилиндр (рисунок 19).

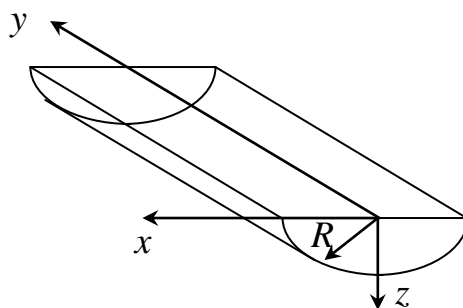


Рисунок 19 – Модель водохранилища

В указанной работе получены формулы для вертикальной составляющей и горизонтальной составляющих силы тяжести

$$g_x = 2G^2\Delta\rho v \lg \left\{ v^{-1} \left[R + (v^2 + R^2)^{1/2} \right] \right\}, \quad (94)$$

$$g_y = G^2\Delta\rho\pi \left[v - (v^2 + R^2)^{1/2} + R \right], \quad (95)$$

где G – гравитационная постоянная;

$\Delta\rho$ – плотность воды;

v – длина водохранилища.

При радиусе водохранилища $R = 100$ м и длине $v = 2,0$ км изменение вертикальной составляющей $g_z = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Гал, горизонтальной составляющей $g_y = 2,1 \cdot 10^{-5}$ Гал.

В работах [13, 29] водохранилище, а так же слой воды между верхним и нижним уровнями, которые образовались при обработке водохранилища, представляют в виде простых геометрических тел и используют методы численного интегрирования.

Полученные результаты на примере Красноярской ГЭС свидетельствуют, что вблизи водохранилища вариации силы тяжести G_x , G_y могут достигать $1 \cdot 10^{-5}$ Гал, а $G_z = 0,1 \cdot 10^{-5}$ Гал.

Вариации уклонов отвесных линий при этом могут составлять $0,2''$. Следовательно, при выполнении высокоточных геодезических измерений ими пренебрегать нельзя.

В работе [28] приближенно оценена зона гравитационного влияния масс водохранилища в точке на гребне плотины. Предлагается водохранилище разрезать вертикальными плоскостями, параллельными плотине, и удаленными друг от друга на расстояние ΔX . А центральную часть водохранилища можно представить прямоугольным параллелепипедом, с боковыми гранями, не пересекающими борта водохранилища выше уровня мертвого горизонта. Таким образом, область водохранилища аппроксимируется набором прямоугольных параллелепипедов

(рисунок 20). Их размер по осям X и Y определяется в зависимости от расстояния до точки, в которой определяется влияние вариаций гравитационного потенциала и его производных, а по оси Z расстоянием между уровнем водохранилища и средней точкой в основании параллелепипеда.

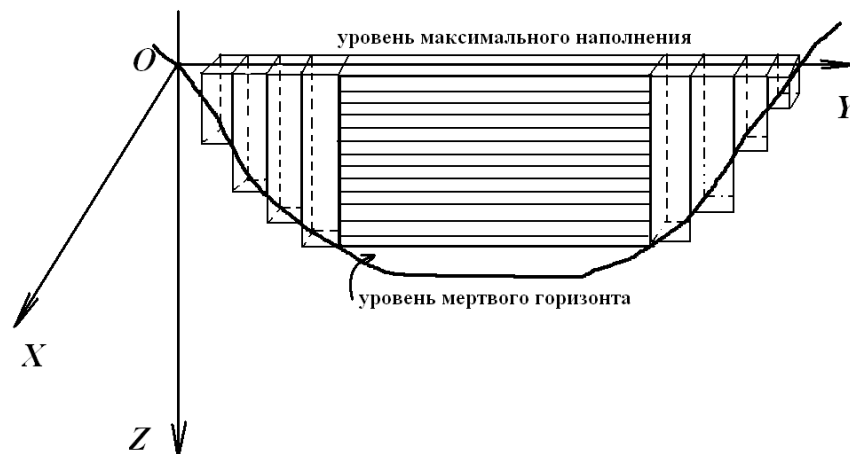


Рисунок 20 – Разрез водохранилища плоскостями YOZ

По результатам численного интегрирования оценивают значение изменения потенциала силы тяжести и его производных. При аппроксимации суммой элементарных объемов параллелепипедов, координаты боковых граней определяются линиями [82].

Для определения вариаций уклонения прямых и обратных отвесов, размещенных в плотине, с точностью $0,01''$, необходимо g_x определять с погрешностью $0,05$ мГал.

$$\theta_x'' = -\frac{g_x}{\gamma} \cdot \rho'' , \quad (96)$$

где θ_x'' – уклонение отвеса;

γ – нормальное значение силы тяжести, которое принято равным $9,8 \cdot 10^5$ мГал.

В итоге в работе [28] было установлено, что в приплотинной области водохранилища аппроксимация бортов параллелепипедами с основанием размером 140×140 м создает дефицит масс около $2,2\%$, что приводит к ошибке интегриро-

вания для величины $\Delta V/\gamma$, равной 0,009 мм, а для величины Δg_x к ошибке равной 0,04 мГал.

2.11 Выводы

Результаты вычислительных экспериментов и исследований гравитационных характеристик реальных природных и техногенных объектов подтверждают их значимое влияние на корректность анализа и интерпретации результатов геодезических и гравиметрических измерений, включая некоторые варианты решения обратных задач.

Использование для учета гравитационного влияния аналитических моделей элементарных пространственных тел возможно исходя из целей исследований, не предусматривающих максимально возможную в настоящее время точность геодезических измерений.

3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИРОДНЫХ И ТЕХНОГЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

3.1 Аппроксимационные модели

При решении прямых и обратных задач физической геодезии большие положительные возможности имеют аппроксимационные модели. Аппроксимацией (приближением) функции называется нахождение такой функции, которая была бы близка к результатам эксперимента. Построение аппроксимирующих моделей неизбежно оправдывается отсутствием сведений о внутреннем механизме сложной системы.

С позиций функционального подхода при создании математической модели выбирается адекватная модель, которая интерпретирует результаты наблюдений наиболее подходящим образом. Так как исходный материал (нивелирные превышения, значения силы тяжести вдоль нивелирных линий) отягощен ошибками измерений и истинные значения высот неизвестны, не всегда можно судить о точности исследуемых формул и преимуществе одних формул перед другими. Для выяснения этих важных вопросов приходится использовать искусственные схемы, например, модели Земли. Это необходимо, поскольку не известна физическая природа процесса и его механизм. При таком действии модель позволяет прогнозировать состояние объекта. Для выполнения распознавания используют априорную информацию об объекте и форму предварительных результатов обработки измерений, опирающихся на опыт информации. Для пространственно-временной аппроксимации аномального гравитационного поля целесообразно использовать понятия аномалиеобразующих тел (АОТ), точечных аномальных масс и масконов [30]. Если модель достаточно полно отражает реальные условия своей формой и размерами, своими аномальными массами, аномалиями силы тяжести, отклонениями отвеса, высотами квазигеоида и т. д., то можно добиться большого эффекта от

оценок на моделях. В противоположном случае результаты могут быть искажены и не иметь никакой ценности.

Использование моделей в геодезии является весьма эффективным методом. Благодаря им появилась возможность численно оценивать исследуемые величины и наглядно выяснить различные обстоятельства. Формулы, которые определяют фигуру Земли, а также основаны на теории потенциала, справедливы для различных предположений о внутреннем строении и форме Земли. Именно поэтому эти формулы можно применить к модели Земли.

Геодезисты два века назад активно начали использовать модели для оценки разного рода аномальных влияний. Оценка модели Земли по отклонениям отвеса приведена австрийским геодезистом Фуксом. Влияние неоднородностей земной коры на несимметричность вертикальных сечений уровенной поверхности на нивелирной станции Фоглер оценил на модели Земли. Гельмертом [104] проведены исследования влияния неоднородной горы на аномалии силы тяжести, и их влияние на нивелирование. Также он оценил влияние континентов, внутренних аномалий и различных форм рельефа на элементы гравитационного поля. Это положение уровенных поверхностей, их отступление от параллельности, радиусы кривизны, отклонения отвеса и сила тяжести. Гельмерт [105] рассчитывал потенциалы притяжения и составляющие силы притяжения от однородных шара, полушара, призмы и цилиндра, установив, что влияния аномалий силы тяжести вполне могут превосходить точность геометрического нивелирования. Кекк подтвердил на моделях Земли вывод указанный Гельмертом, о том, что необходимо учитывать при геометрическом нивелировании аномалии силы тяжести. Представляя модель Земли сложенную из отдельных однородных по плотности кубиков [29].

Как уже говорилось, определение гравитационного потенциала и его трансформант, а так же определение их изменений во времени являются важными задачами геодезии. Для выявления этих изменений периодически проводят повторные измерения характеристик гравитационного поля Земли. Когда известно перемещение масс внутри Земли или на ее поверхности, значения вариаций можно вычислить, используя различные модели, например, точечных масс [95]. А когда

характер перемещения масс не известен, то формируют систему точечных масс по известным значениям трансформант.

Решение задачи системы точечных масс не является единственным. Возможно применить метод регуляризации (подбора) [91], для определения вектора значений точечных масс m .

В работе [63] описан численный эксперимент с использованием метода регуляризации точечных масс, которые выбирались случайным образом. Для такой модели вычисляли значения функции в контрольных точках и сравнивались с измеренными. Затем, выбирали новые модели и повторяли вычисления и сравнения. В результате выбрали оптимальную модель, для которой отклонения минимальны.

3.2 Одноточечная и пятиточечная модели аппроксимации гравитационного влияния конуса и их сравнительный анализ

Точка (сфера, шар, маскон рисунок 21, б) может является моделью аппроксимации гравитационного влияния усеченного конуса (рисунок 21, а). Радиус шара R_M определяется при условии равенства объемов исходного конуса и шара, а центр тяжести шара M совпадает с центром тяжести усеченного конуса. Шаровая модель и формулы для вычисления координаты z_M центра тяжести любого усеченного конуса были рассмотрены в работах [27, 54, 57–60], при аппроксимации гравитационного влияния конуса вулкана.

Для вычисления координат центров тяжести пяти равнообъемных масс, которые аппроксимируют гравитационное влияние усеченного конуса в работе [59] представлена пятиточечная модель (рисунок 22), где аналитически выведены математические формулы.

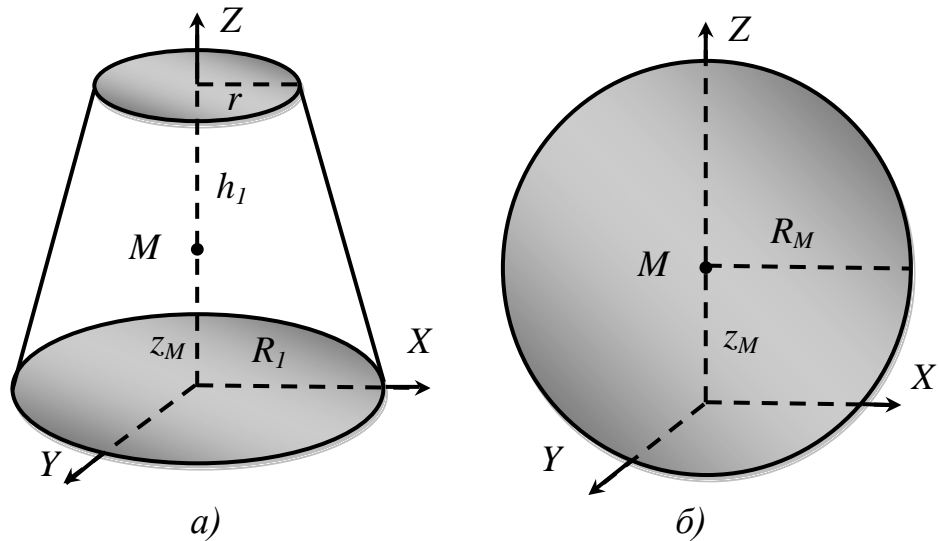


Рисунок 21 – Аппроксимирующие модели: а) усеченный конус;
б) одноточечная (1т)

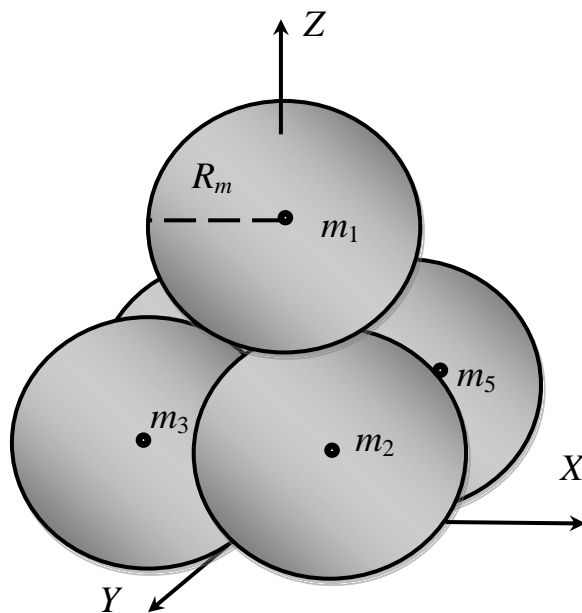


Рисунок 22 – Пятиточечная аппроксимирующая модель

При решении прямых задач в результаты геодезических измерений вводят поправки за уклонение отвесной линии. Для этого гравитирующее тело можно представить совокупностью множества элементарных тел.

В работах [29, 47, 50, 54, 56–60] конусообразные гравитирующие тела аппроксимировались шаром (одной точечной массой). Увеличив количество точеч-

ных масс, можно уточнить аппроксимирующую модель конуса. При этом количество оцениваемых параметров должно быть минимально необходимым, для выполнения требования большей избыточности измерений. Например, оцениваемый параметр – общая масса конуса, рассредоточенная в пространстве (в пяти точках), R_1 – радиус нижнего основания; r – радиус верхнего основания; h_1 – высота конуса (рисунок 21, *a*). Разобьем конус на пять равнообъемных частей и для каждой части найдем координаты центра тяжести.

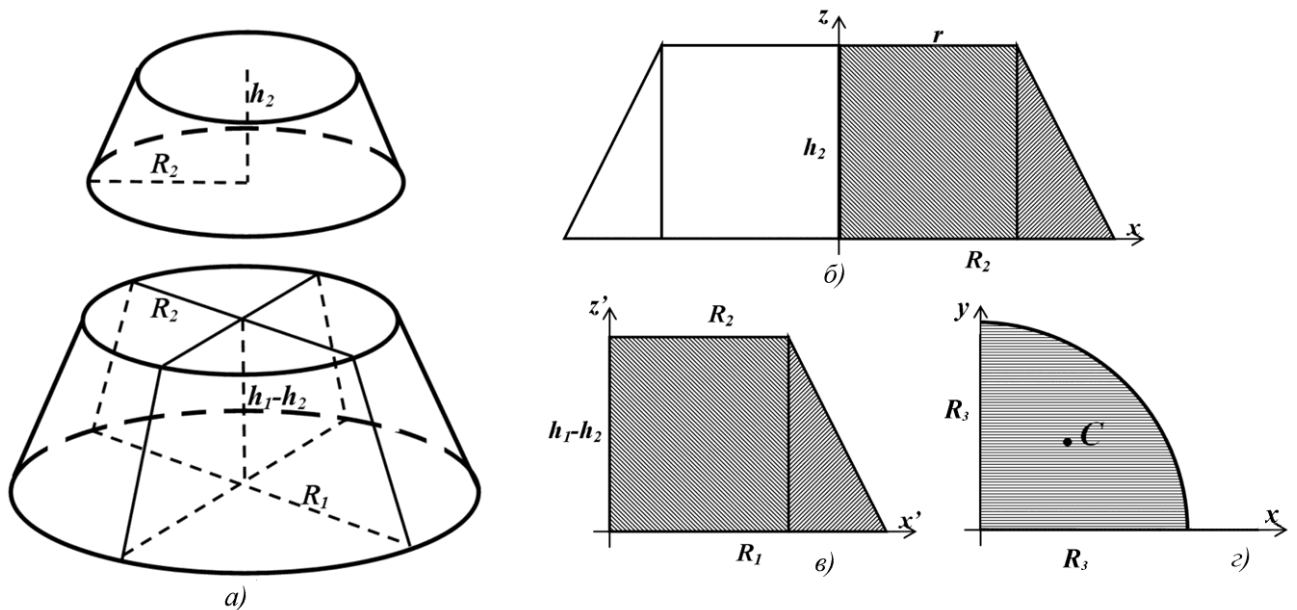


Рисунок 23 – Усеченный конус после разбиения: *a*) на пять равнообъемных частей; *б*) вертикальное сечение верхнего усеченного конуса; *в*) вертикальное сечение нижнего объемного сектора; *г*) горизонтальное сечение нижнего объемного сектора

На рисунке 23, *a* представлен один из вариантов разбиения на пять равнообъемных частей. Горизонтальной плоскостью отсекается верхний усеченный конус, а нижний делится на четыре сектора двумя взаимно перпендикулярными вертикальными плоскостями. Формулы вычисления объема усеченного конуса для исходного V_1 и для верхнего V_2

$$V_1 = \frac{\pi h_1}{3} (R_1^2 + r^2 + R_1 r) ; \quad V_2 = \frac{\pi h_2}{3} (R_2^2 + r^2 + R_2 r) . \quad (97)$$

С учетом того, что $V_2 = \frac{1}{5} V_1$, а $h_2 = h_1 \frac{R_2 - r}{R_1 - r}$, можно найти

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{5}(R_1^3 - r^3) + r^3} . \quad (98)$$

Для аналитического определения координат центра тяжести верхнего усеченного конуса использованы элементарные геометрические фигуры (прямоугольник, треугольник, сектор круга). Вертикальное сечение усеченного конуса представляет собой трапецию, которую представляем сочетанием прямоугольника и треугольника (рисунок 23, б).

Для трапеции на рисунке 23, б центр тяжести будет иметь координаты

$$x = 0; \quad z = \frac{r h_2^2}{2} + \frac{(R_2 - r) h_2^2}{6} / r h_2 + \frac{(R_2 - r) h_2}{2} . \quad (99)$$

Для четырех нижних 90-градусных секторов плоскость симметрии будет проходить под углом 45° . Сечение этой плоскостью является прямоугольная трапеция – сочетание прямоугольника и треугольника из четырех нижних объемных секторов (рисунок 23, в).

Приведем формулы (100) для вычисления площади заштрихованных фигур S_1 – прямоугольника, S_2 – треугольника:

$$S_1 = R_2 (h_1 - h_2); \quad S_2 = \frac{1}{2} (h_1 - h_2) (R_1 - R_2) . \quad (100)$$

Координаты центра тяжести трапеции в целом

$$x' = \frac{S_1 \frac{R_2}{2} + S_2 \left(\frac{R_1 + 2R_2}{3} \right)}{S_1 + S_2}; z' = \frac{S_1 \frac{h_1 - h_2}{2} + S_2 \frac{h_1 - h_2}{3}}{S_1 + S_2}. \quad (101)$$

Радиус горизонтального сечения конуса на высоте, равной z'

$$R_3 = R_1 - (R_1 - R_2) \frac{z'}{h_1 - h_2}. \quad (102)$$

Координаты центра тяжести т. С (рисунок 23, z) с учетом уравнения окружности, и четвертью круга радиусом R_3 , находим по формуле

$$x_c = y_c = \frac{4R_3}{3\pi}. \quad (103)$$

В работах [47, 59] для вычисления координат центров тяжести пяти равнообъемных масс аналитически выведены строгие математические формулы. Использование этих формул для аппроксимации конусообразных тел позволяет уточнить их гравитационное влияние при совместной математической обработке повторных геодезических и гравиметрических наблюдений.

В [47, 61] приведено сравнение однотоочечной (1т) и пятиточечной (5т) моделей, которое получено численным методом суммой влияний 5 400 элементов. В качестве элементов были выбраны 6° сектора цилиндрических труб с высотой 75 м (при высоте конуса 450 метров получаем шесть слоев с числом труб в слоях: 20; 18; 16; 14; 12; 10). Все элементы заменялись гравитирующей точкой в центре тяжести данного элемента.

Таблица 3 – Различия однотоочечной (1т) и пятиточечной (5т) моделей конуса

Номер станции i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Координата X , м	550	650	750	850	950	1050	1150	1250	1350	1450
Уклонение отвесной линии (т. 5) – (т. 1), "	-0,10	-0,08	-0,05	-0,04	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00
Абсолютные значений силы тяжести g (т. 5) – (т. 1), мкГал	-75	-24	-52	-54	-48	-41	-35	-29	-24	-20
Нивелирные превышения										
h (т. 1), мм	0,98	0,74	0,58	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17
h (т. 5), мм	1,03	0,78	0,60	0,48	0,39	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17
h (т. 5) – h (т. 1), мм	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00

Различие между однотоочечной и пятиточечной моделями проявляет себя в определении силы тяжести (различие до 0,1 мГал), в непосредственной близости к конусу на нивелирные превышения (различие до 0,2 мм на 1 км). Незначительно это различие для горизонтальных углов. Различие в уклонениях отвесных линий составляет до 0,1". Это для конуса с указанными геометрическими параметрами. Для более крупных конусообразных гравитирующих тел различие между однотоочечной и пятиточечной моделями будет проявляться в больших масштабах. Например, для конуса с размерами 1000; 800; 300 м – 0,15 мГал, 0,45 мм на ближний километр, что сопоставимо с точностью измерений.

Этот факт необходимо учитывать при проектировании сетей, организации полевых работ и последующей интерпретации результатов натурных наблюдений.

3.3 Детализированная конечно-элементная модель аппроксимации гравитационного влияния конуса

В виде схемы (рисунок 24) отразим алгоритм предлагаемой методики, позволяющий аппроксимировать гравитационное влияние конуса, как сумму влияний конечных элементов – кольцевых секторов [48, 49, 51, 54].



Рисунок 24 – Общая схема алгоритма аппроксимации гравитационного влияния конуса как суммы влияний конечных элементов – кольцевых секторов

Разработка методики определения гравитационных характеристик была выполнена на основе модели кругового конуса с радиусом основания R , высотой H , плотностью пород $\Delta\rho$. Для этого был рассмотрен локальный участок земной поверхности, на котором имеется конусообразная гравитирующая масса высотой 750 м, радиус основания составляет 450 м, плотность пород $2,63 \text{ г/см}^3$. С использованием указанных величин рассчитаны значения гравитационного потенциала, силы тяжести, уклонение отвесных линий в окружающем конус и усеченный конус пространстве.

Усеченный конус разделен на шесть слоёв по высоте, а конус – на десять слоёв. Каждый из слоёв разбит на 60 шестиградусных секторов. Затем каждый сектор конуса разделен на 20; 18; 16; 14; 12; 10; 8; 6; 4; 2 зон, а усеченного конуса – на 20; 18; 16; 14; 12; 10 зон по мере возвышения каждого слоя над другим. В вычислительном эксперименте гравитационный потенциал конуса аппроксимировался суммой потенциалов 6 600 материальных точек, а потенциал усеченного конуса – суммой 5 400 материальных точек. В результате были найдены значения гравитационного потенциала $T_{\text{конуса}}^C$, вызванного этими конусами, в любой точке C окружающего пространства.

Алгоритм вычисления:

а) конус делится горизонтальными плоскостями на k объемных тел с радиусами оснований, начиная с нижнего, r_1, r_2, \dots, r_k . Высота каждого конуса равна $h = H/k$. На рисунке 25 показано вертикальное сечение конуса для $k=10$;

б) каждый k -й конусообразный слой с радиусом нижнего основания r_i и радиусом верхнего основания r_{i+1} заменяется на его аппроксимирующий k -й цилиндрический слой той же высоты h под условием равенства их объемов:

$$V_{\text{конуса}}(r_i; r_{i+1}) = V_{\text{цилиндра}}(r_k) \quad (104)$$

или

$$(1/3) \cdot \pi h (r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2) = \pi h r_k^2. \quad (105)$$

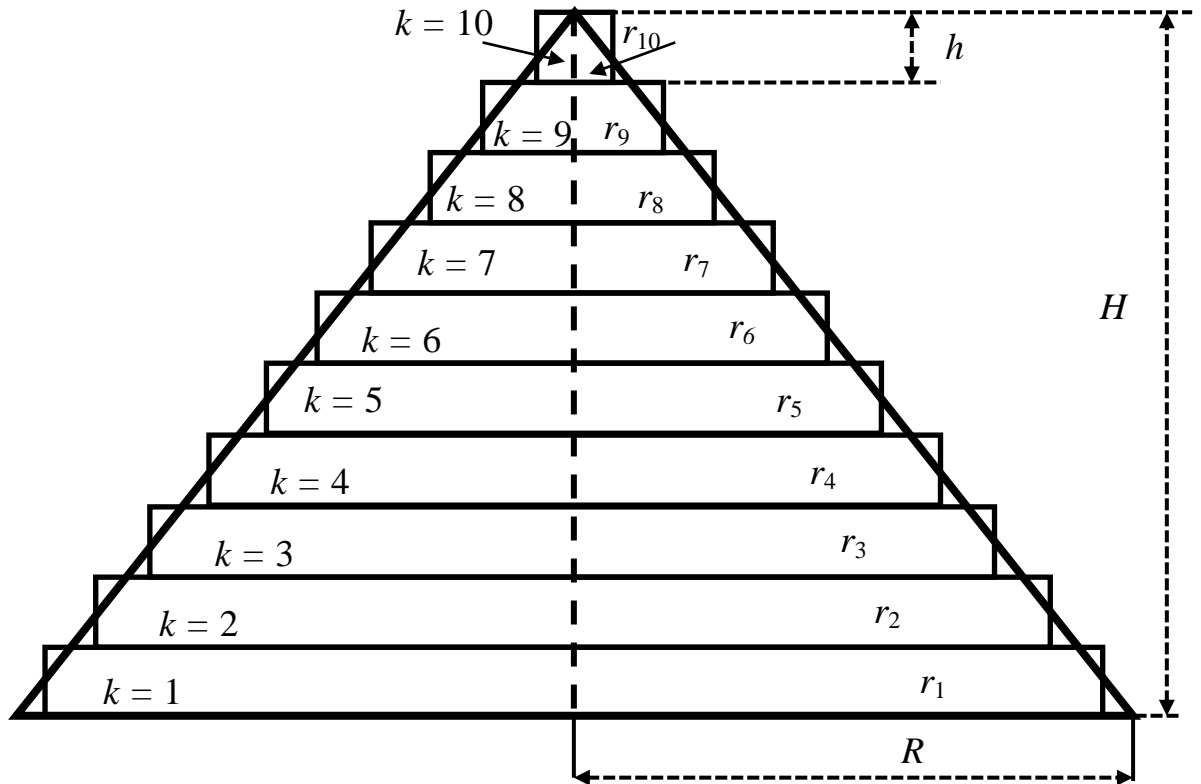


Рисунок 25 – Вертикальное сечение конуса

Радиус основания аппроксимирующего цилиндра вычисляется по формуле:

$$r_k = \sqrt{(1/3)(r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2)}; \quad (106)$$

в) каждый цилиндрический слой делится на Jk concentric rings through equal distance $dr = rk/Jk$, where $Jk = 2(11 - k)$. Each ring is divided into N ring sectors (curved parallelipipeds) with angular step $\alpha = 360^\circ/N$. On the drawing 26 is shown an example of such a finite-element division for $k = 1, 2, \dots, 10$; $\alpha = 6^\circ$;

г) для того, чтобы заменить каждый объемный конечный элемент точечной массой, находятся координаты его центра масс. Для любого кольцевого сектора k -го цилиндрического слоя координата z (по вертикали) вычисляется по формуле

$$z_k = (h/2) + h(k-1). \quad (107)$$

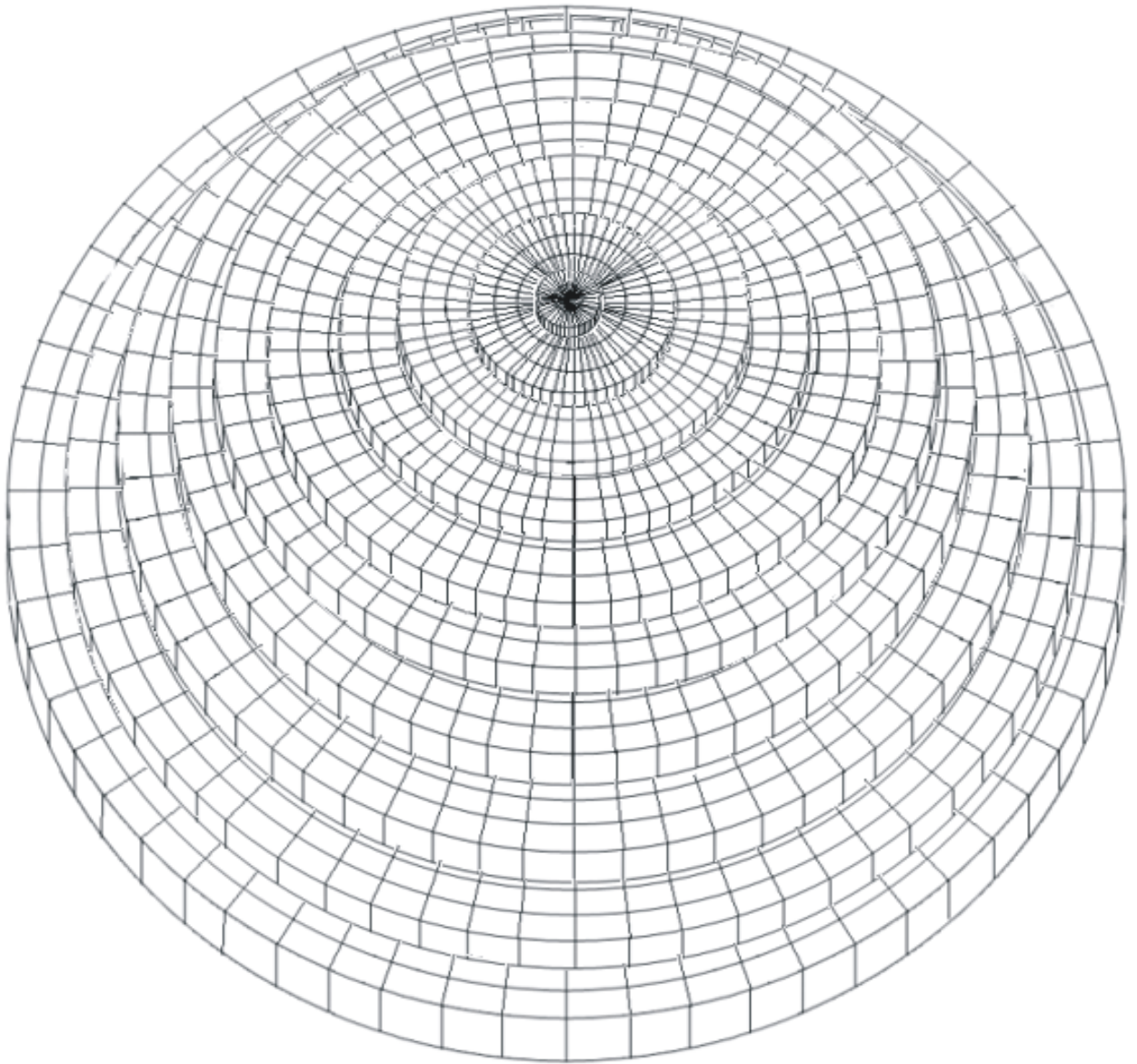


Рисунок 26 – Конечно-элементное разбиение конуса

Координаты x , y центра масс каждого конечного элемента определяются с использованием известных в теории сопротивления материалов формул для кольцевого сектора и его свойства симметрии. Для сектора угловой величины α с внутренним радиусом $r_{k,j}$, внешним радиусом $r_{k,j+1}$ находится расстояние $r_{m_{k,(j;j+1)}}$ от центра образующего кольца O до центра масс кольцевого сектора m (рисунок 27).

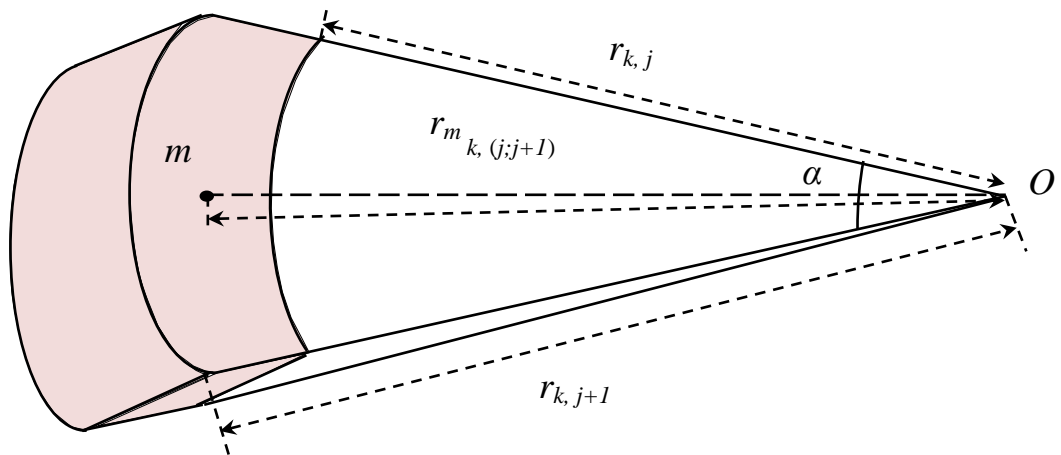


Рисунок 27 – Нахождение центра масс кольцевого сектора

Для угла α , выраженного в радианной мере

$$r_{m_{k,(j;j+1)}} = (4/3) \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} \frac{(r_{k,j+1}^3 - r_{k,j}^3)}{(r_{k,j+1}^2 - r_{k,j}^2)}; \quad (108)$$

д) по полученному значению расстояния $r_{m_{k,(j;j+1)}}$ вычисляются координаты x , y центра масс каждого конечного элемента:

$$x_{k,(j;j+1),n} = r_{m_{k,(j;j+1)}} \cos \beta_n, \quad (109)$$

$$y_{k,(j;j+1),n} = r_{m_{k,(j;j+1)}} \sin \beta_n, \quad (110)$$

где $\beta_n = (\alpha/2) + \alpha(n-1)$; $n = 1, 2, \dots, N$;

ж) объем каждого кольцевого сектора определяется по формуле

$$V_{k,(j;j+1)} = \alpha(r_{k,j+1}^2 - r_{k,j}^2)h. \quad (111)$$

С учетом плотности пород $\Delta\rho$ вычисляется масса сектора j -го кольца k -го слоя:

$$m_{k,(j;j+1)} = V_{k,(j;j+1)}\Delta\rho; \quad (112)$$

и) гравитационный потенциал в точке C окружающего пространства, вызываемый точечной массой величиной $m_{k,(j;j+1)}$ с координатами $x_{k,(j;j+1),n}$, $y_{k,(j;j+1),n}$, $z_k = h/2 + h(k-1)$, определяется, как

$$T_{k,(j;j+1),n}^C = G \frac{m_{k,(j;j+1),n}}{r_{k,(j;j+1),n}^C}, \quad (113)$$

где G – гравитационная постоянная;

$r_{k,(j;j+1),n}^C$ – расстояние от центра масс конечного элемента до точки C .

Вызываемый конусом общий гравитационный потенциал в точке C окружающего пространства вычисляется как сумма потенциалов точечных масс:

$$T_{\text{конуса}}^C = G \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \frac{m_{k,(j;j+1),n}}{r_{k,(j;j+1),n}^C}; \quad (114)$$

к) итоговое значение потенциала W_C с учетом высоты над поверхностью эллипсоида и гравитирующего конуса определяется суммой возмущающего потенциала T_C с нормальным потенциалом U , значение которого на поверхности уровня эллипсоида $U_0 = 62\,636\,861,074 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$;

л) компоненты вектора силы тяжести в точке C определяются по формулам:

$$g_{Cx} = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{x_C - x_i}{r_i^3}, \quad g_{Cy} = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{y_C - y_i}{r_i^3}, \quad g_{Cz} = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{z_C - z_i}{r_i^3} + g_C^H, \quad (115)$$

где x_i , y_i , z_i – координаты центра тяжести элементарного гравитирующего объема массой m_i , а x_C , y_C , z_C – координаты точки C . При вычислении компоненты g_z учитывается гравитирующее влияние Земли на высоте H_C относительно эллипсоида

$$g_C^H = 980000 - 0,3086 H_C. \quad (116)$$

Результирующее значение силы тяжести в точке C определяется по формуле

$$g_C = \sqrt{g_{Cx}^2 + g_{Cy}^2 + g_{Cz}^2}; \quad (117)$$

м) на основе полученных данных вычисляется значение уклонения отвесной линии вдоль оси x и y

$$\xi_C = -\frac{g_{Cx}}{\gamma}, \quad \eta_C = -\frac{g_{Cy}}{\gamma}; \quad (118)$$

н) вычисляем аномалии высоты (разность геодезической и нормальной высоты) через возмущающий потенциал T_C по формуле Брунса

$$\zeta_C = \frac{T_C}{\gamma}. \quad (119)$$

Таким образом, выполнено исследование гравитационного поля, вызываемого конусом, как типичной фигурой земного рельефа. Рассчитаны и визуализированы потенциальные поля (приложения А, Б) и основные трансформанты потенциала: аномалии силы тяжести (приложения В), уклонения отвесных линий (приложения Г) и аномалия высоты (приложения Д).

Результаты вычислительного эксперимента подтвердили необходимость комплексного подхода к геодинамической интерпретации результатов геодезических наблюдений в условиях перемещаемых гравитирующих масс.

3.4 Влияние уклонений отвесной линии на измеряемые величины

Известно, что в процессе измерений геодезические приборы устанавливаются по направлениям отвесных линий с помощью отвесов и уровней. Так как отвесные линии являются непараллельными, то и вертикальные оси приборов в разных точках тоже будут непараллельными. Обработку результатов измерений всех то-

чек сети необходимо вести в единой системе координат, например в местной системе прямоугольных координат. Для этого необходимо знать разности уклонения отвеса во всех точках относительно исходной, где были выполнены измерения. Начало такой системы координат совмещено с исходным пунктом сети, а направление оси OZ совпадает с отвесной линией в исходном пункте.

При измерении углов наклона β или зенитных расстояний z инструмент ориентирован по отвесной линии в точке наблюдений, поэтому методом тригонометрического нивелирования определяют превышения над уровенной поверхностью. Величина уклонения отвеса равная $0,1''$ сравнима с погрешностями точного нивелирования, поэтому влияние уклонений отвеса на результаты нивелирования учитывать необходимо.

Приведем пример, на модели объекта, влияния перемещаемых гравитирующих масс. Допустим, на плоской поверхности со значением силы тяжести $g_0 = 980,00$ Гал появилась аномальная гравитирующая масса M по форме похожей на усеченный конус R – радиус нижнего основания, r – радиус верхнего основания, h – высота и плотность $\Delta\rho = 2,63$ г/см³ (рисунок 28).

Появление этой аномальной массы вызовет изменение вектора силы тяжести g_0 в окружающем пространстве и в каждой из точек оно различно: g^A, g^B, g^1 . Следствием появления аномальной массы является также уклонение отвесной линии (УОЛ) u^1 в месте стояния нивелира, которое является, причиной смещения пузырька уровня данного прибора. После приведения его в нульпункт визирная ось прибора будет показывать отчет a^A по задней рейке и b^B по передней рейке и превышение $h^{A,B} = a^A - b^B$ будет отличаться от превышения $h_0^{A,B} = a_0 - b_0$ на величину $\delta h^{A,B} = h^{A,B} - h_0^{A,B}$. $h_0^{A,B}$ – это превышение которое было измерено до появления аномальной массы M . А также нивелирные рейки будут иметь другой наклон, так как их отвесность определяется круглым уровнем, но возникающие при этом различия в отсчетах на высоте инструмента 1,3 м можно считать несущественными.

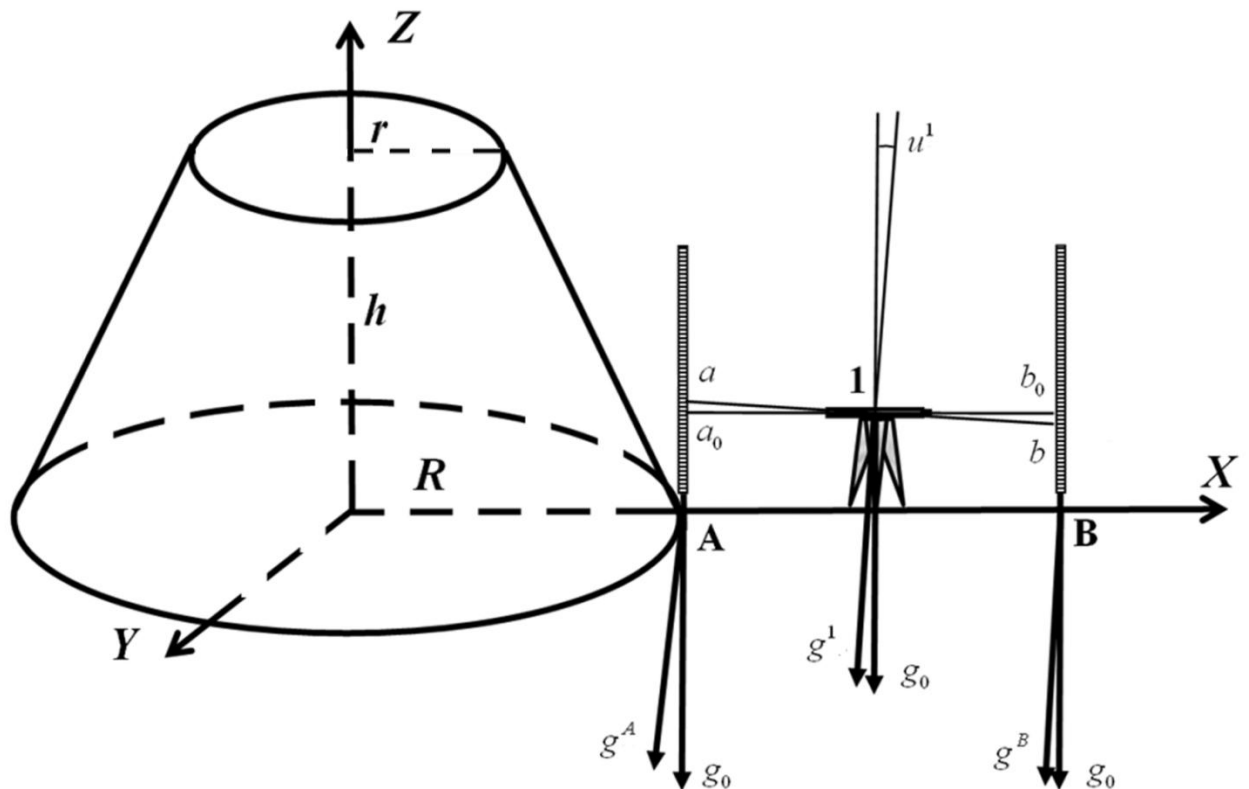


Рисунок 28 – Станция нивелирования расположенная у подножия усеченного конуса

Для проведения вычислительного эксперимента усеченный конус представлен следующими геометрическими характеристиками $R = 500$ м, $r = 200$ м, $h = 450$ м, $V = 0,184$ км³, при гомогенности пород с плотностью $\Delta\rho = 2,63$ г/см³ масса $M = 4,83 \cdot 10^8$ т. В [61] был смоделирован нивелирный ход от основания усеченного конуса длиной 1 км, состоящий из десяти станций через 100 м (рисунок 29), с длиной плеч 50 м. Также в месте установки нивелира, было смоделировано определение абсолютных значений силы тяжести. Случайные ошибки не вводились, а вычислялись только методические погрешности, возникающие из-за неполноты модели гравитирующего тела.

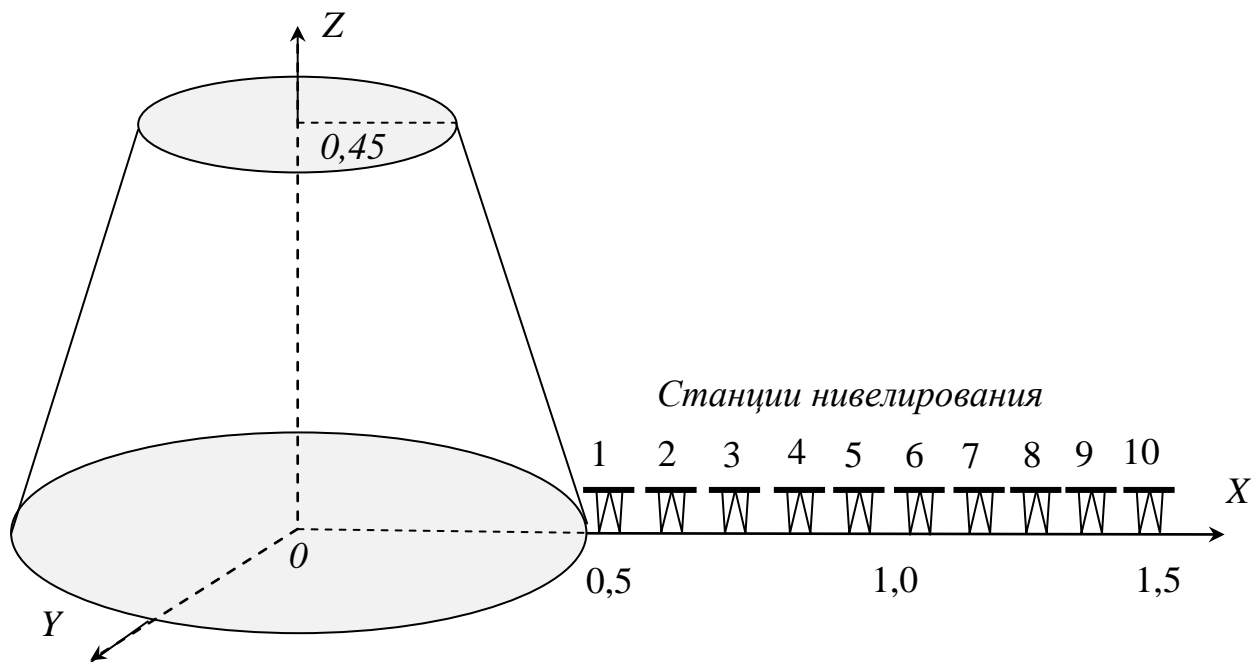


Рисунок 29 – Модельный нивелирный ход (координаты в км)

Выполненный вычислительный эксперимент в работе [47, 61] по исследованию влияния перемещаемых гравитирующих масс на значение нивелирных превышений на расстоянии 1 км (10 станций нивелирного хода), показал, что влияние составляет от 3 до 4 мм. Это значение превышает точность нивелирования и может быть сопоставимо с величинами вертикальных смещений земной поверхности. Следовательно, результаты геодезических наблюдений должны учитывать перемещаемые гравитирующие массы.

Влияния возмущающих факторов, которые обусловлены внешними и внутренними геодинамическими процессами, изменениями гравитационного потенциала, а также высот точек земной поверхности, отражаются результатами повторного высокоточного нивелирования и гравиметрических измерений.

3.5 Конечно-элементное моделирование для определения гравитационных характеристик природных и техногенных объектов с использованием цифровых моделей рельефа локального масштаба

Методические основания детализации конечно-элементного моделирования.

Большое распространение имеют технологии разделения объема гравитирующей массы произвольной формы на кубы. Далее выполняются замены этих неконцентрических масс на точечные с нахождением их координат как координат центра тяжести пространственного тела с учетом гомогенности – равномерно распределенной плотности пород. Дальнейший учет гравитационного влияния шара (точечной массы) вычисляется с использованием формулы (58) [50].

При замене куба шаром (рисунок 30) возникают методические ошибки, сущность которых состоит в следующем. Куб заменяется шаром того же объема с радиусом

$$R_{III} = \sqrt[3]{\frac{3 a^3}{4 \pi}}. \quad (120)$$

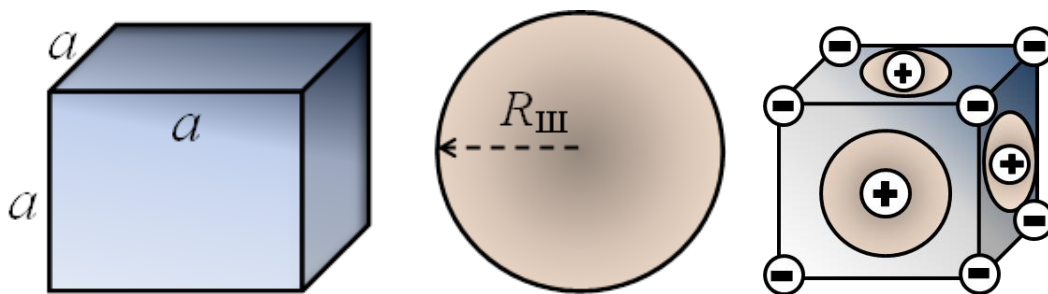


Рисунок 30 – Аппроксимация куба шаром того же объема

Для $a = 1$ (при этом расстояние от центра куба до грани по перпендикуляру равно 0,5) величина R_{III} составляет 0,62.

Таким образом, при совмещении центра куба с центром шара для шести граней куба образуются выступающие секторы (+) шара, усеченные гранями.

Оставшаяся часть шара «компактно» расположена внутри куба с возникшими для восьми его «углов» пустыми (нулевыми) областями (–).

В общем случае области (+) и области (–) при совместном гравитационном влиянии не компенсируют друг друга. Для одного куба-шара эта ошибка незначительна, при увеличении количества таких конечных элементов (до сотен, тысяч и даже десятков тысяч) влияние этой ошибки возрастает.

Было проведено сравнение гравитационного влияния куба (рисунок 31, а) и шара (рисунок 31, б), равных по объему (массе). Вычислялись потенциал, компоненты вектора аномальной силы тяжести и основные трансформанты. Для точки на расстоянии 1,58 км от центра масс куба (шара) объемом 1 км^3 с плотностью $2,63 \text{ г/см}^3$ различия составили 1% для потенциала, 1 мкГал для силы тяжести, $0,6''$ для УОЛ, 0,1 мм для аномалии высоты.

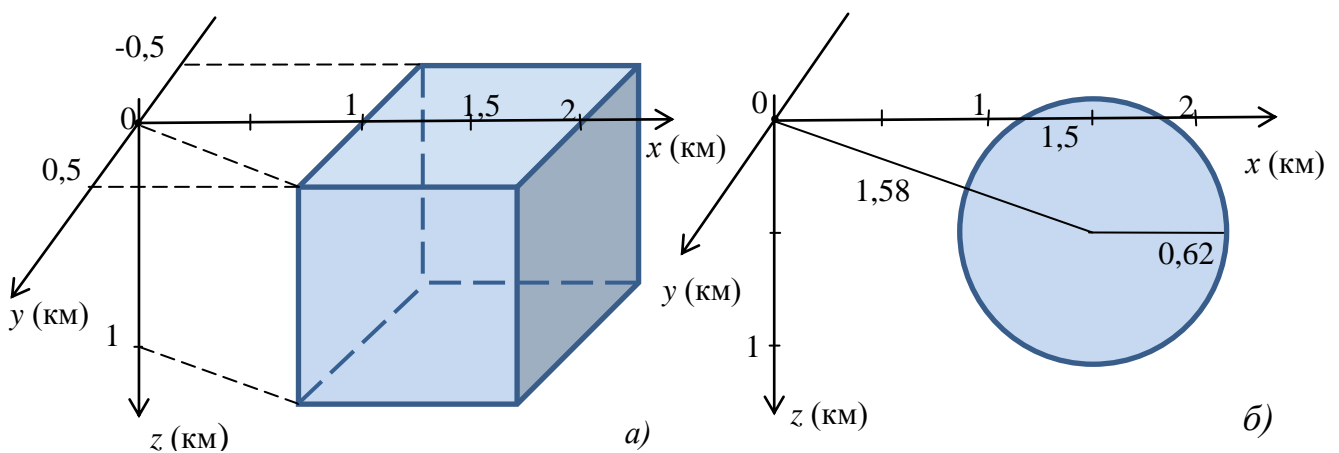


Рисунок 31 – Расположение пространственных тел равного объема:

а) куб; б) шар (точка)

Предлагаемая методика позволяет исключить (уменьшить) следствие нестрогой кубической формы верхнего конечного элемента в столбах-параллелепипедах, составленных кубическими конечными элементами (рисунок 32).

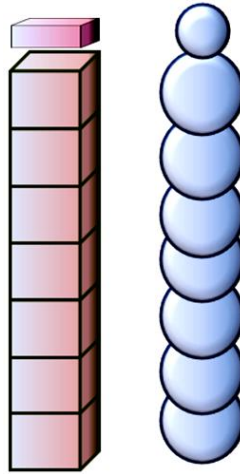


Рисунок 32 – Аппроксимация вертикального столба-параллелепипеда

В данном подходе предложенная методика аппроксимации гравитационного влияния различных тел сложной конфигурации на примере локального рельефа, основанная на использовании выраженного аналитически замкнутого интеграла для параллелепипеда (рисунок 5).

При анализе локальных участков произвольного рельефа предлагаем выполнять конечно-элементную аппроксимацию параллелепипедами разной высоты (рисунок 33). Окончательная величина силы тяжести будет получена при суммировании аналитически вычисленных гравитационных влияний каждого из параллелепипедов.

Отмечаем, что в данном случае количество выбранных конечных элементов можно значительно сократить по сравнению с точечной аппроксимацией [55]. Современные компьютеры позволяют производить вычисления с высокой скоростью, и эта часть технологии не является сложной.

Преимуществом представленного технологического подхода к вычислению гравитационных характеристик природных и техногенных объектов является, в первую очередь, более точное определение гравитационного влияния каждого параллелепипеда по интегральным формулам, исключая некоторые методические ошибки.

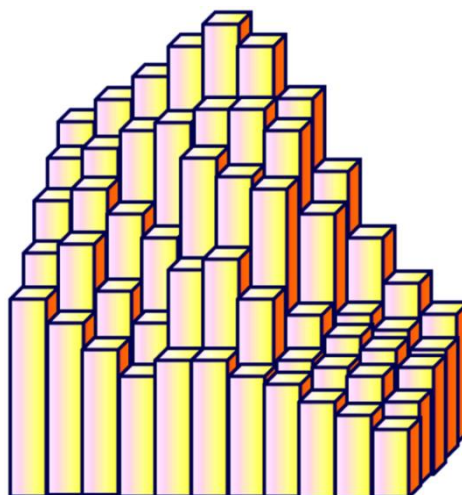


Рисунок 33 – Аппроксимация локального участка рельефа параллелепипедами

В технологическом плане оптимизировать процесс вычисления гравитационных характеристик позволяет развитая система цифровых моделей рельефа (ЦМР).

Цифровые модели рельефа.

Разработка теории и методов математического моделирования поведения в пространстве и во времени сложных геодинамических систем с природными компонентами, наблюдаемых геодезическими методами, является актуальной. Метод математического моделирования относится к современным методам познания мира, как и теоретические и экспериментальные исследования. Модель должна представлять собой средство хранения данных об объекте исследований, инструмент для проведения научных исследований.

Территории ряда регионов мира в настоящее время испытывают большую техногенную нагрузку. На техногенную нагрузку влияет степень техногенного освоения окружающей природной среды человеком. Построение математической модели является необходимым этапом создания информационной технологии исследования любых систем (объектов, процессов, явлений) [30].

Современные методы моделирования предусматривают использование цифровых моделей рельефа. Среди задач моделирования, требующих учета детальной информации о высотах рельефа, следует отметить вычисление уклонов

отвесных линий и высот квазигеоида по гравиметрическим данным с погрешностью, соответственно, не более 3" и 0,5 м.

В современных условиях возрастает необходимость совершенствования методов изучения геодинамических процессов с учетом новых технических достижений. При этом возникает потребность в строгом подходе к совместной обработке разнородных геодезических и геофизических наблюдений на земной поверхности [26].

Современные методы анализа геопространственных данных применяемые в ГИС могут быть очень простыми, в ряде случаев надо лишь создать аналитическую карту, или более сложными и комплексными, включающими много расчётных величин для моделирования реального мира и объединение большого числа различных слоёв.

Использование цифровых моделей значительно сокращает затраты времени и труда по сравнению с традиционной технологией получения отметок с топографических планов.

Способы отображения и представления геопространственной информации совершенствуются и развиваются по пути повышения наглядности, информативности и эстетичности. Одним из способов изображения рельефа с применением современных технологий является построение ЦМР.

ЦМР – это определенная форма представления исходных данных и способ их структурного описания, позволяющий восстановить исходную поверхность рельефа территории местности в цифровом виде, а также математическое представление участка земной поверхности, полученное путем обработки материалов топографической съемки. ЦМР состоит из двух категорий данных: геометрической и семантической.

Геометрические данные содержат информацию о пространственном положении моделируемой поверхности и, как правило, могут быть представлены в виде функции двух переменных $z = F(x, y)$, где z – отметка точки; x и y – координаты. Семантические данные характеризуют принадлежность точек поверхности к различным типам топографических объектов (поле, луг, дорога, река и т. д.).

Исходными данными для построения ЦМР являются съёмочные точки. Чем больше точек на единицу площади, тем лучше цифровая модель описывает реальную поверхность.

Использование ЦМР постепенно становится неотъемлемой частью исследований в науках о Земле, экологии, земельном кадастре и инженерных проектах.

Аналитическая обработка ЦМР служит для получения производных данных; построения ЦММ и профилей поперечного сечения; оценки формы склонов; вычисления положительных и отрицательных объемов; генерации линий сети тальвегов и водоразделов, образующих каркасную сеть рельефа; интерполяции высот; построения изолиний; цифровых изображений, расчета различных редуций аномалий силы тяжести в гравиметрии и других вычислительных операций [78].

Построение ЦМР требует определённой структуры данных. Исходные точки могут быть по-разному распределены в пространстве: сбор данных может осуществляться по точкам регулярной сетки, по структурным линиям рельефа и хаотично.

Источниками исходных данных для создания ЦМР суши служат:

- а) цифровые и аналоговые топографические карты и планы;
- б) данные дистанционного зондирования Земли (стереопары аэрофото-радиолокационных и космоснимков);
- в) результаты наземных съёмов (тахеометрическая съёмка, нивелирование, GPS-съёмка и др.);
- г) лазерное сканирование.

При изучении формы, размеров и гравитационного поля Земли требуется знание данных о рельефе всей поверхности Земли, т. е. требуется планетарная цифровая модель рельефа (ПЦМР). Очевидно, что такие модели могут быть более разряженные, чем ЦМР локальных территорий.

Учеными Центрального научно-исследовательского института геодезии, аэросъёмки и картографии выполняются работы по изучению и моделированию гравитационного поля Земли (ГПЗ), по данным средних аномалий силы тяжести в

трапециях размером $30' \times 30'$ по широте и долготе, получена планетарная модель ГАО2008. Ведутся работы по построению новой глобальной модели ГПЗ с более детальными аномалиями силы тяжести по трапециям размером $5' \times 5'$. Очевидно, что модели ГПЗ неразрывно связаны с ПЦМР. При вычислении аномалий, как разностей измеренных и нормальных значений силы тяжести, вводятся поправки (редукции) за влияние топографических масс, расположенных между физической поверхностью Земли и отсчетной поверхностью нормального гравитационного поля (поверхность эллипсоида). Следовательно, при расчете полной топографической редукции аномалий силы тяжести требуется ПЦМР, построенная по узлам регулярной сетки [24].

Удобным программным продуктом для построения графических изображений функций двух переменных является геоинформационная система *Golden Software Surfer*. Достоинством программы являются заложенные в неё алгоритмы интерполяции, которые позволяют создавать цифровые модели поверхности по неравномерно распределённым в пространстве данным. Наиболее часто используемый при этом метод Криге (*Kriging*) подходит для представления данных во многих науках о Земле. Интерполяционный метод кригинга, разработанный G. Matheron, был назван в честь Daniel Krige's, работавшего в начале 1950-х годов. В [83] приведено описание метода Криге.

Цифровая модель поверхности представляется в виде значений высоты в узлах прямоугольной регулярной сетки, дискретность которой определяется в зависимости от конкретной решаемой задачи. Для хранения таких значений Surfer использует собственные файлы типа GRD (двоичного или текстового формата). Для выполнения большинства операций по построению сетей или карт в Surfer требуются либо файлы данных XYZ, либо сеточный файл Grid.

Вычислительный эксперимент конечно-элементного моделирования для определения гравитационных характеристик природных и техногенных объектов с использованием цифровых моделей рельефа.

Для проверки, уточнения методики и последующего создания технологии учета гравитационного влияния природных и техногенных объектов были использованы цифровые модели некоторых реально существующих локальных объектов. Для последующего определения значений силы тяжести и главных ее трансформант на пункты, расположенные в непосредственной близости к исследуемым моделям поверхности земли, были выполнены экспериментальные исследования с использованием формул, приведенных в предыдущих разделах диссертации.



Рисунок 34 – Общая схема алгоритма аппроксимации гравитационного влияния конуса, как суммы влияний конечных элементов – вытянутых параллелепипедов

В качестве исходных данных для определения гравитационных характеристик объектов использовалась реальная ЦМР на участок вулкана Святой Елены (Mount St.Helens), расположенный в округе Скамания штата Вашингтон (США), а также реальная ЦМР всхолмленной береговой территории на полуострове Камчатка и ЦМР, построенная на основе моделирования локального участка морского дна у побережья этого полуострова. Исследуемые природные локальные объекты изображены на рисунках 35, 36.

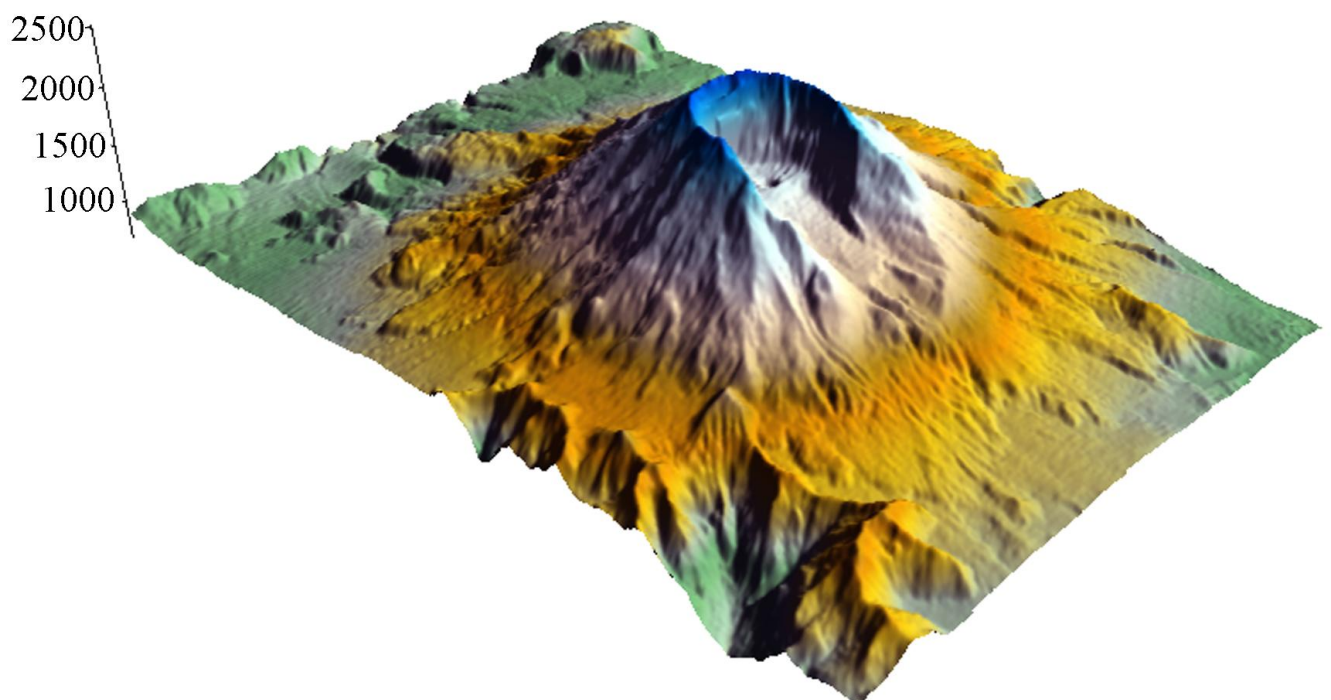


Рисунок 35 – ЦМР реальной поверхности вулкана Святой Елены (координаты в метрах, высота относительно уровня моря)

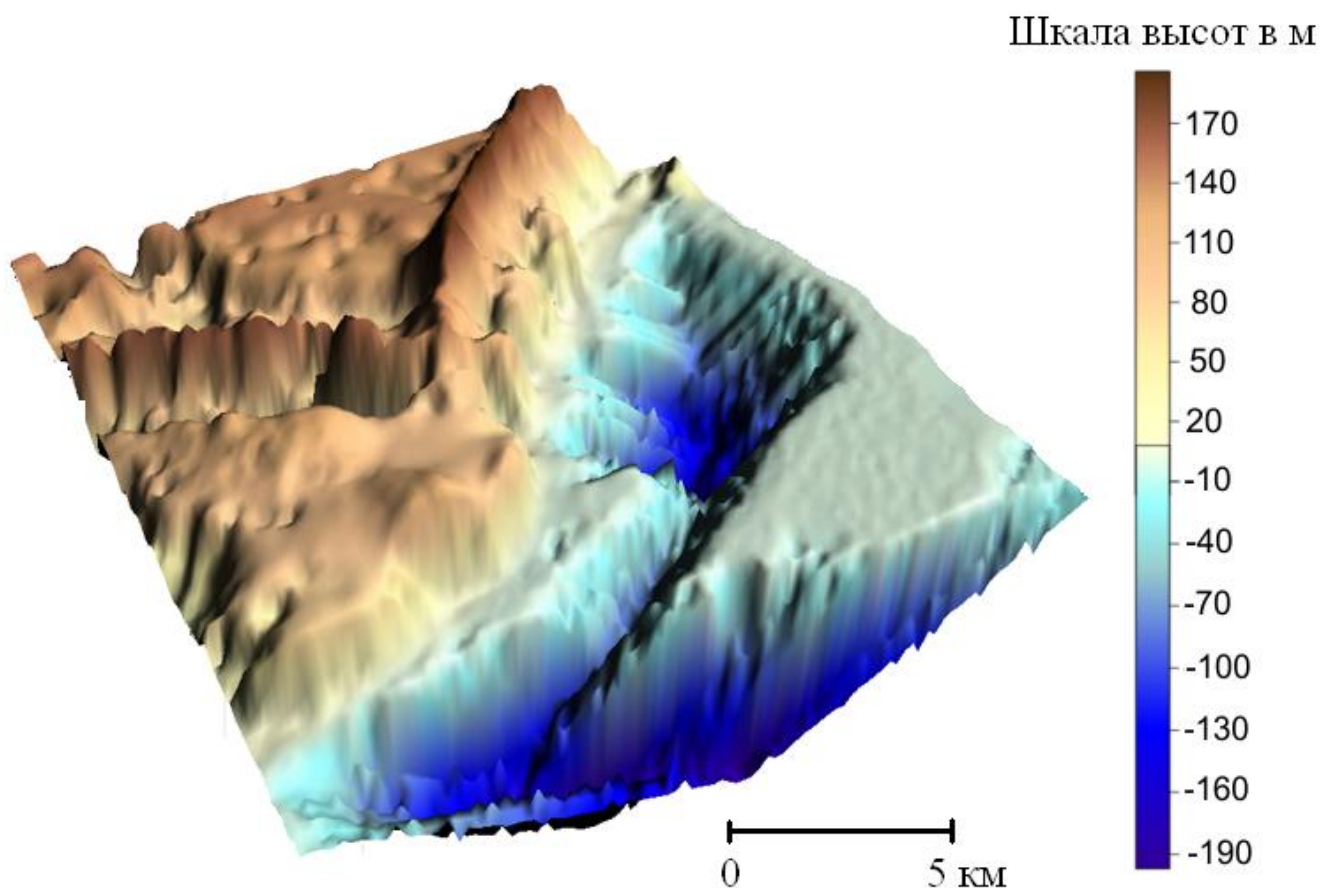


Рисунок 36 – ЦМР реальной поверхности береговой территории полуострова Камчатка и смоделированного прибрежного участка морского дна

ЦМР может быть создана по различным данным координатизации поверхности. В первом эксперименте ЦМР построена по результатам векторизации топографической карты. На рисунке 37 изображен участок ЦМР вулкана Святой Елены с координатными сечениями 30×30 м по осям x и y соответственно. Для детализированного определения гравитационных характеристик всей области вокруг конуса вулкана общее количество далее обработанных конечных элементов составило 51 051. Высота параллелепипедов с размерами основания 30×30 м достигала более 1 км. Общая площадь территории вокруг конуса вулкана (рисунок 38) для определения ее гравитационных характеристик составляет $12,68 \text{ км}^2$ ($4,252 \text{ км}$ на $2,981 \text{ км}$).

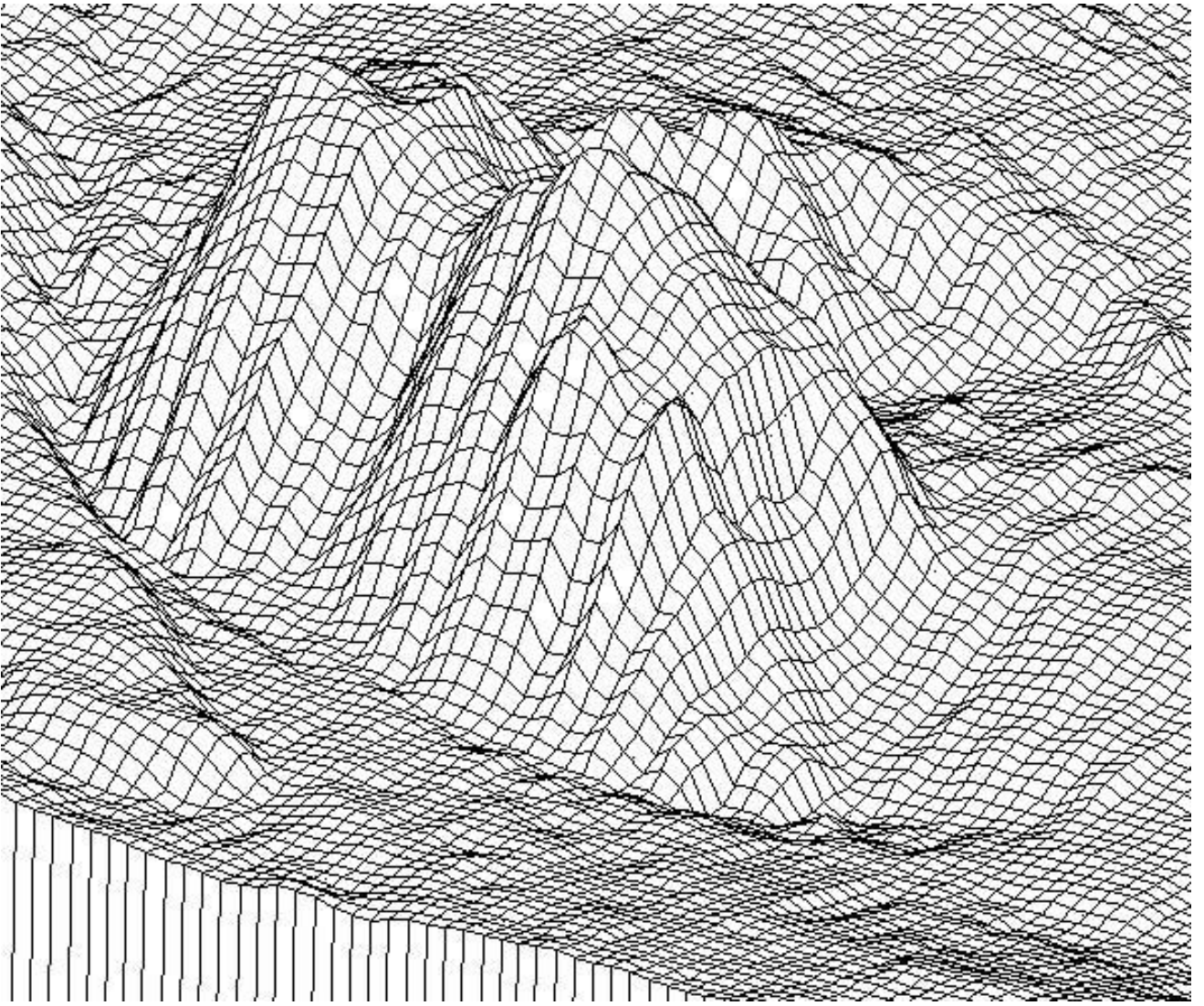


Рисунок 37 – Каркасное (wireframe) представление цифрового рельефа вблизи вулкана Святой Елены

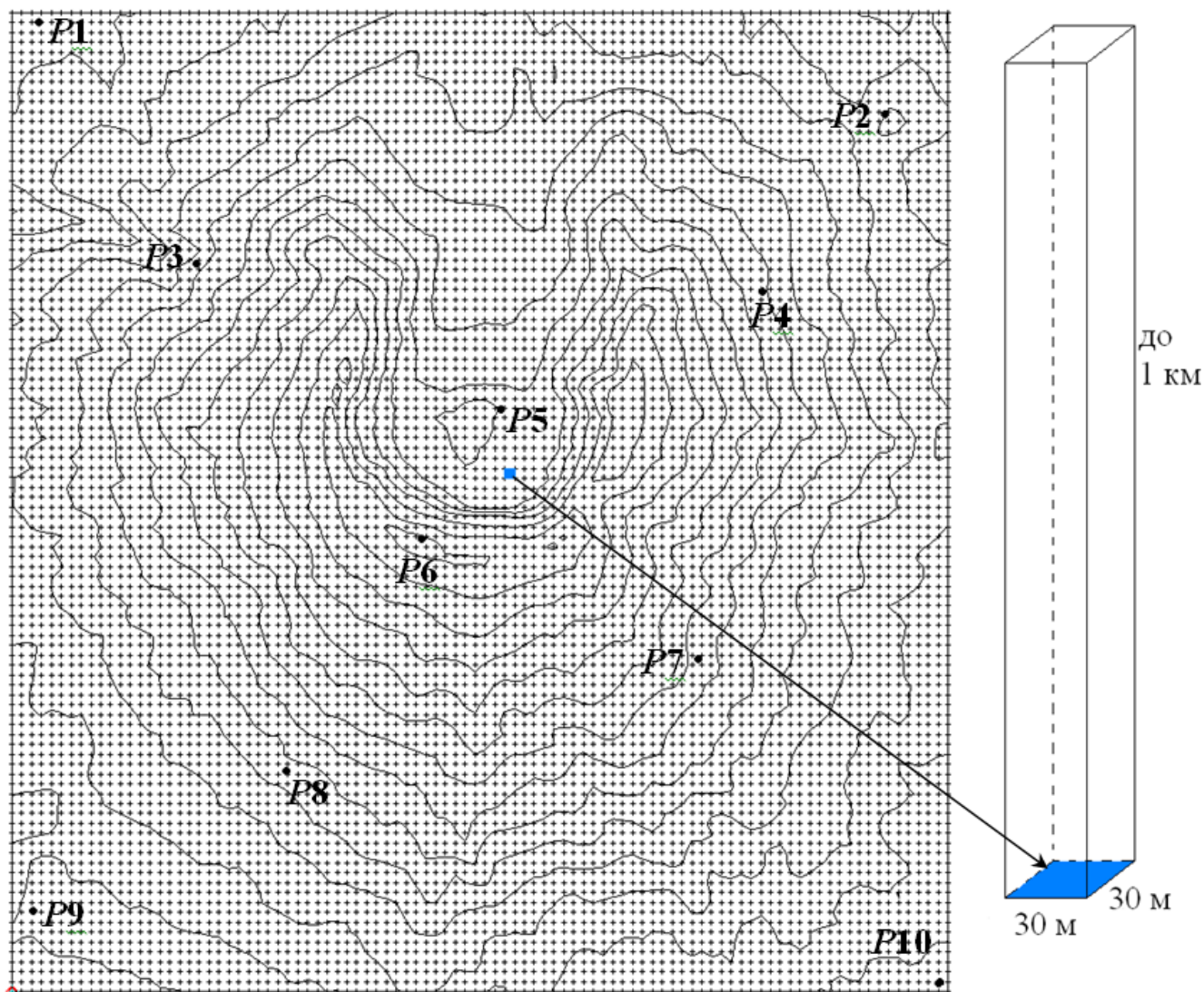


Рисунок 38 – GRID сетка для поверхности вулкана Святой Елены

Исходные координаты X , Y , Z точек ЦМР преобразованы в координаты X' , Y' , Z' с началом системы координат в пункте, гравитационные характеристики которого вычислялись. В эксперименте на примере вулкана Святой Елены эти характеристики определялись для десяти различных пунктов. Изобразим векторы силы тяжести некоторых определяемых пунктов (рисунок 39). Значения координат этих пунктов приведены в таблице 4.

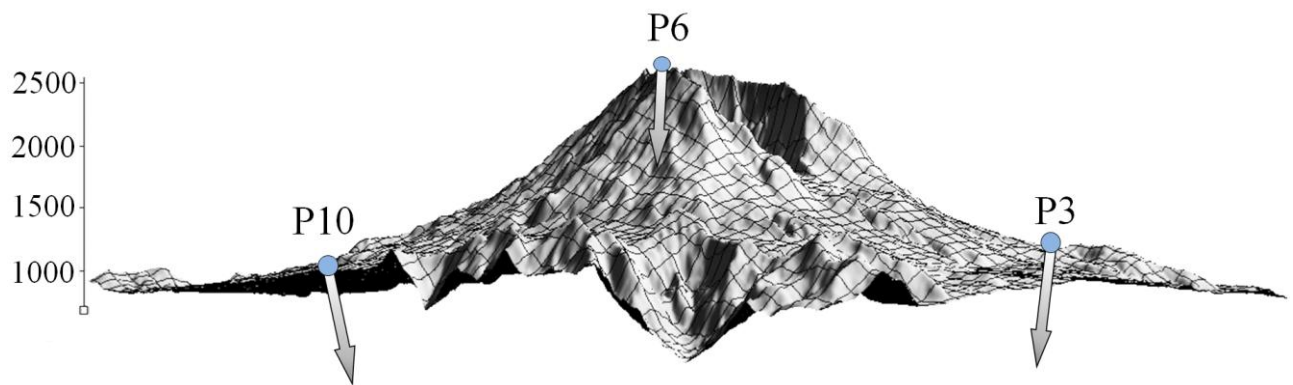


Рисунок 39 – Векторы силы тяжести (вид с северо-востока)

Таблица 4 – Координаты пунктов для которых определялись гравитационные характеристики локального объекта области вулкана Святой Елены

Наименование пункта	X, м	Y, м	Z, м
P1	559 800	5 118 930	1 260,10
P2	565 500	5 118 390	1 495,80
P3	560 580	5 117 340	1 627,80
P4	564 690	5 117 010	1 820,60
P5	562 830	5 116 350	1 911,60
P6	562 260	5 115 390	2 545,00
P7	564 210	5 114 550	1 864,10
P8	561 540	5 113 830	1 718,10
P9	559 530	5 112 630	1 203,80
P10	565 950	5 112 300	1 103,50

Вторым исследуемым природным локальным объектом был участок всхолмленного берега полуострова Камчатка. При проведении эксперимента учитывалась различная плотность береговой территории и водных масс соседней морской области. Для суши была принята средняя плотность $2,63 \text{ г/см}^3$, а плотность морской воды – $1,1 \text{ г/см}^3$. GRID сеть поверхности морского дна содержит 8 300 элементов, поверхность суши – 8 000 элементов с размером оснований по осям x, y 160×160 м. Гравитационные характеристики определялись для четырех пунктов природного объекта, значения их координат приведены в таблице 5. Общая площадь территории участка всхолмленного берега полуострова Камчатка

для определения ее гравитационных характеристик составляет $205,4 \text{ км}^2$, а смоделированного прибрежного участка морского дна – $197,8 \text{ км}^2$ (рисунки 40, 41).

Таблица 5 – Координаты пунктов на прибрежной территории

Наименование пункта	X, м	Y, м	Z, м
P1	158 022	60 097	4,47
P2	165 375	54 809	164,65
P3	160 739	51 444	196,15
P4	155 145	50 643	28,07

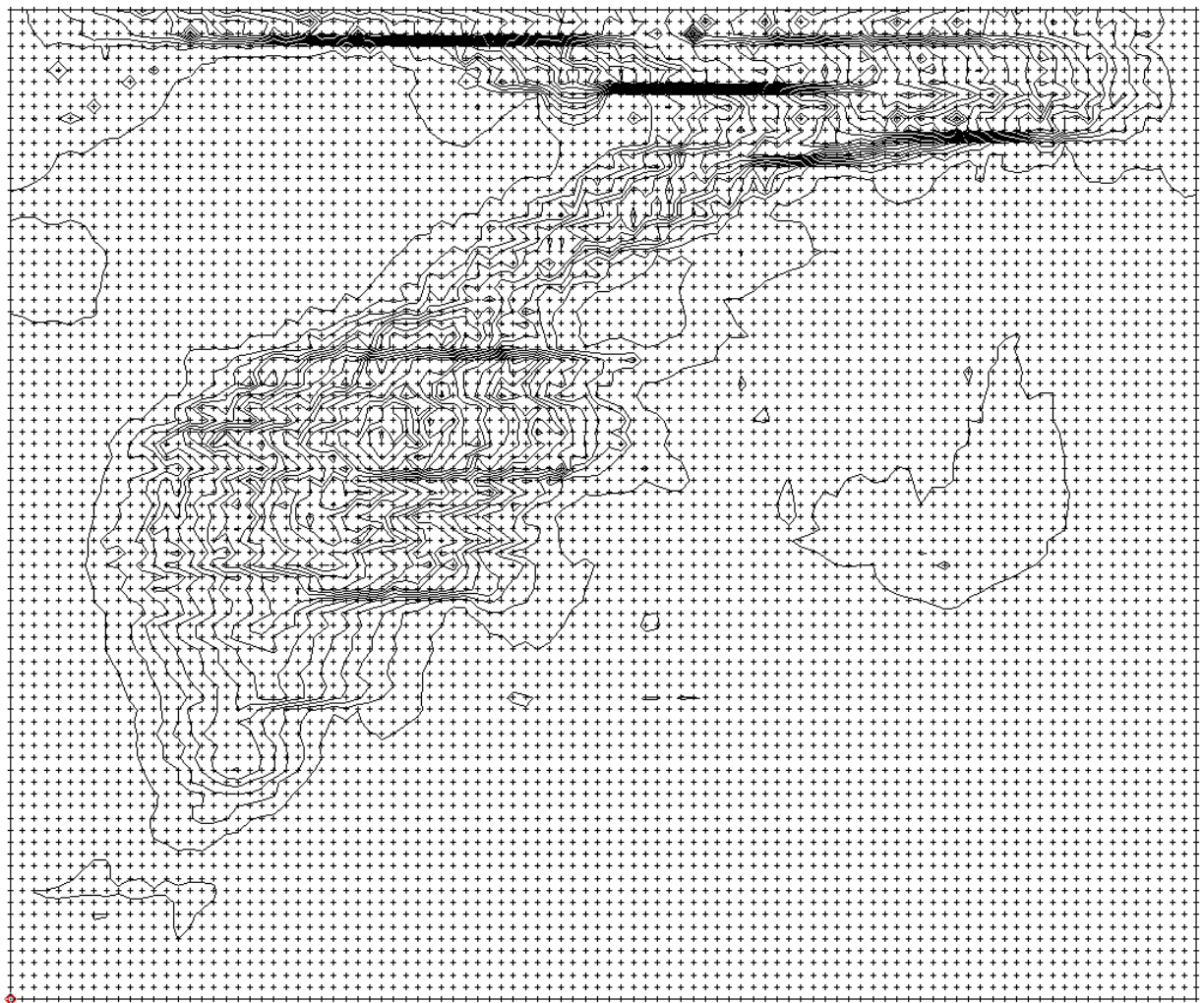


Рисунок 40 – GRID сетка для смоделированного локального прибрежного участка морского дна

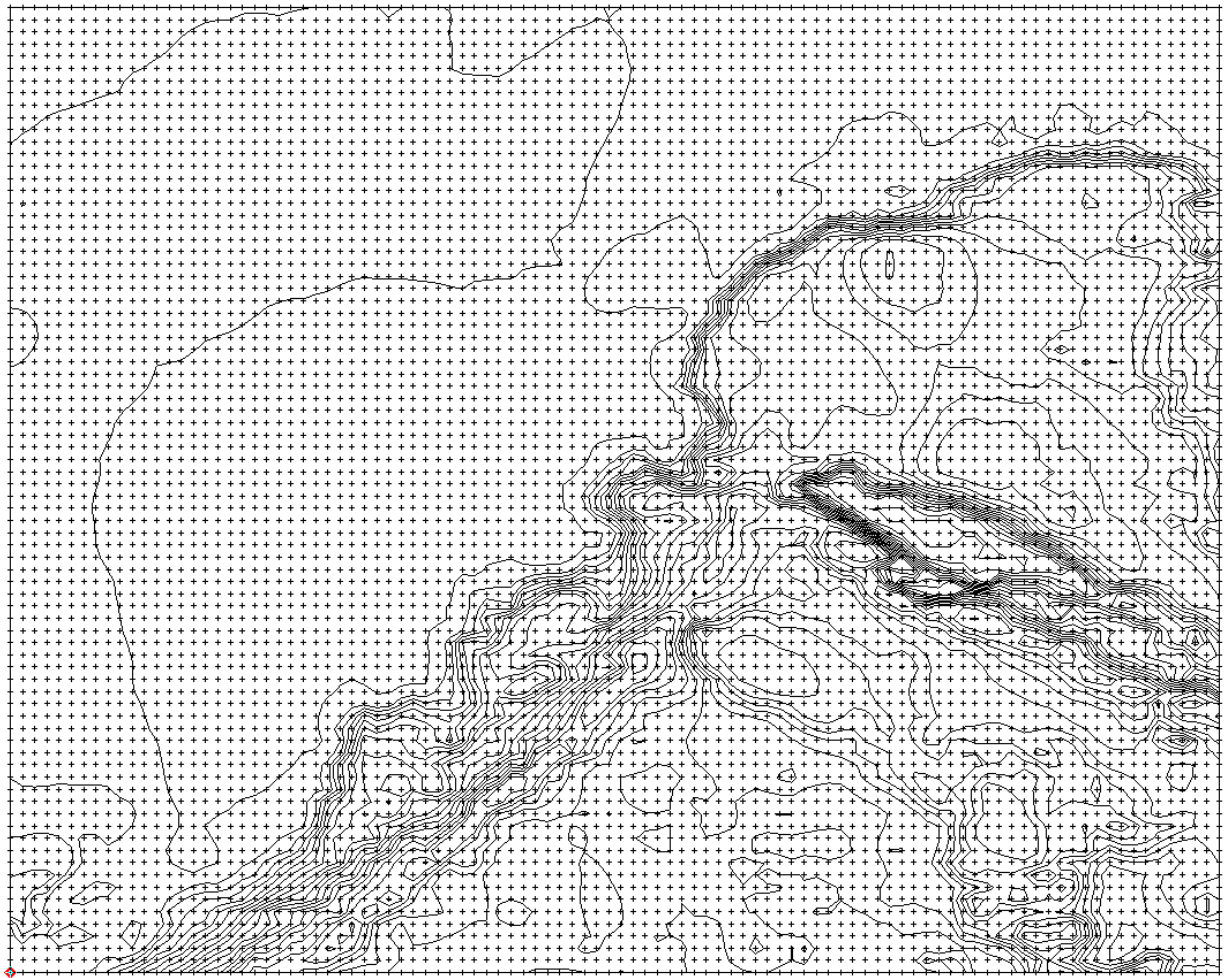


Рисунок 41 – GRID сетка для поверхности всхолмленной береговой территории на полуострове Камчатка

В приложении Е приведены иллюстрации вычислительного эксперимента.

В качестве конечных элементов использовались параллелепипеды. В процессе математической обработки определялось значение силы тяжести всего модельного тела как совокупности конечных элементов – однородных вытянутых параллелепипедов с последующим их суммированием с учетом работы Nagy D. [111]. Ниже описана математическая основа методики конечно-элементного моделирования с параллелепипедами в качестве конечных элементов (рисунок 42).

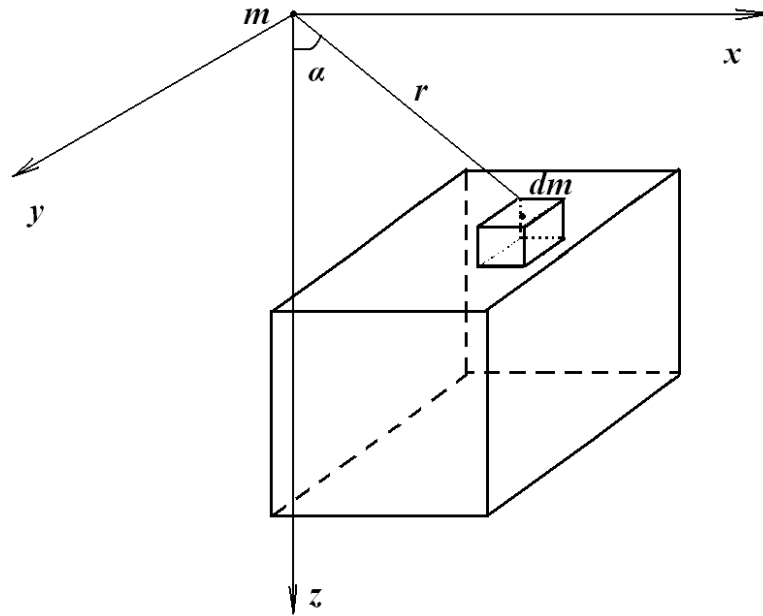


Рисунок 42 – Составляющая по оси z силы притяжения однородного параллелепипеда

$$dg = G \frac{dm}{r^2} \cdot \frac{z}{r}, \quad \cos \alpha = z/r, \quad (121)$$

$$dm = \Delta \rho dx dy dz, \quad (122)$$

$$\Delta g = G \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{r^3} \Delta \rho dx dy dz, \quad (123)$$

$$\Delta g = G \Delta \rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{r^3} dz dy dx, \quad (124)$$

$$\int \frac{z}{r^3} dz = -\frac{1}{r}, \quad (125)$$

$$\Delta g = G \Delta \rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[-\frac{1}{r} \right]_{z_1}^{z_2} dy dx \Rightarrow \quad (126)$$

$$\Rightarrow G \Delta \rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}} \right] dy dx,$$

$$\begin{aligned}
\Delta g = G\Delta\rho \int_{x_1}^{x_2} -\ln(y+r) \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} dx = G\Delta\rho \int_{x_1}^{x_2} \Big[-\ln y_2 + \sqrt{x^2 + y_2^2 + z_2^2} \\
+ \ln y_1 + \sqrt{x^2 + y_1^2 + z_2^2} + \ln y_2 + \sqrt{x^2 + y_2^2 + z_1^2} - \\
- \ln y_1 + \sqrt{x^2 + y_1^2 + z_1^2} \Big] dx.
\end{aligned} \tag{127}$$

После интегрирования, подстановок и сокращений получена формула (128), для вычисления аномалии силы тяжести.

$$\begin{aligned}
\Delta g = G\Delta\rho \Big\{ & -x_2 \ln\left(y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\right) + x_1 \ln\left(y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_2^2}\right) + \\
& + x_2 \ln\left(y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_2^2}\right) - x_1 \ln\left(y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2}\right) + \\
& + x_2 \ln\left(y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_1^2}\right) - x_1 \ln\left(y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_1^2}\right) - \\
& - x_2 \ln\left(y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_1^2}\right) + x_1 \ln\left(y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right) - \\
& - y_2 \ln\left(x_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\right) + z_2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2 y_2}{z_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\right) + \\
& + y_1 \ln\left(x_2 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_2^2}\right) - z_2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2 y_1}{z_2 \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_2^2}}\right) + \\
& + y_2 \ln\left(x_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_1^2}\right) - z_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2 y_2}{z_1 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_1^2}}\right) - \\
& - y_1 \ln\left(x_2 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_1^2}\right) + z_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2 y_1}{z_1 \sqrt{x_2^2 + y_1^2 + z_1^2}}\right) + \\
& + y_2 \ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_2^2}\right) - z_2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1 y_2}{z_2 \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_2^2}}\right) - \\
& - y_1 \ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2}\right) + z_2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1 y_1}{z_2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2}}\right) - \\
& - y_2 \ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_1^2}\right) + z_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1 y_2}{z_1 \sqrt{x_1^2 + y_2^2 + z_1^2}}\right) + \\
& + y_1 \ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right) - z_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1 y_1}{z_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}\right) \Big\}.
\end{aligned} \tag{128}$$

В вычислительных экспериментах данная формула использовалась для определения значения аномалии силы тяжести каждого конечного элемента. Да-

лее логично и традиционно следовало суммирование значений аномалий силы тяжести от всех конечных элементов – параллелепипедов (рисунок 43).

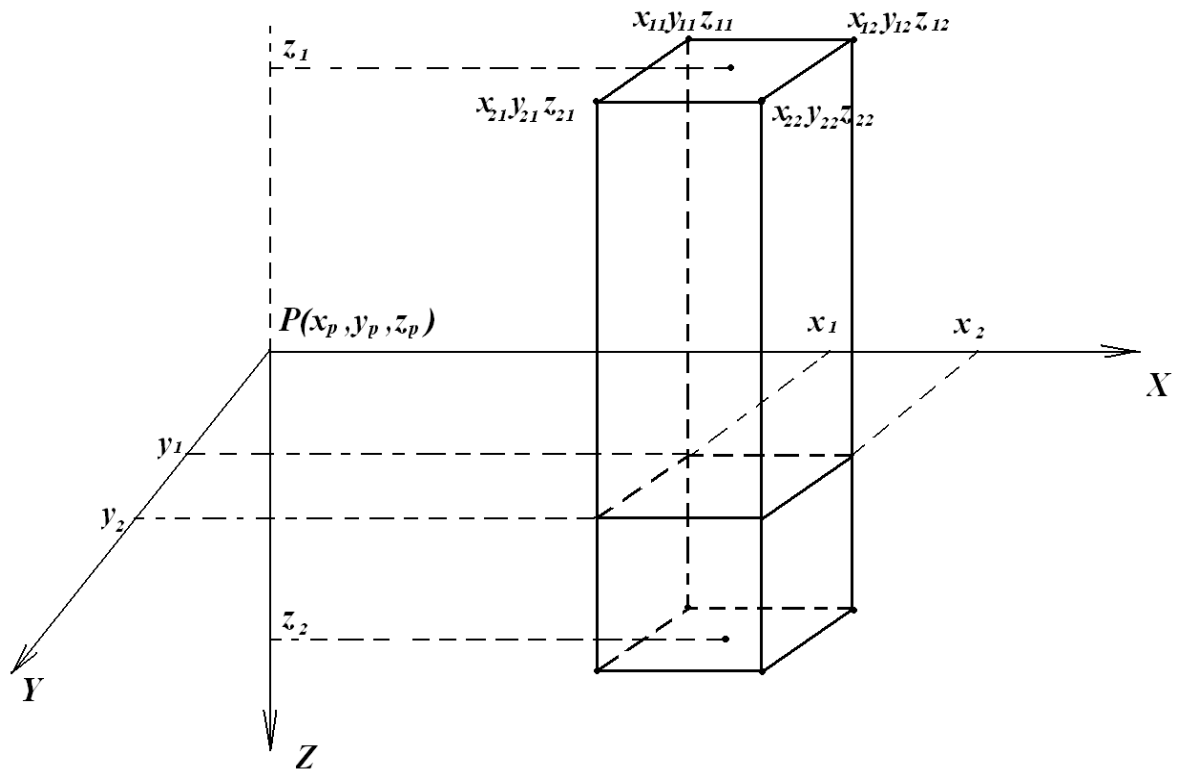


Рисунок 43 – Вытянутый параллелепипед

Нормальная сила тяжести для определенной модели Земли (эллипсоида) вычислялась по формуле (7) в которой коэффициенты для нахождения нормальной силы тяжести взяты из таблицы № 1 для варианта геодезической референц-системы Морица. В результате получено значение γ_0 , равное $9,807290173 \text{ м/с}^2$.

Для вычисления значения возмущающего потенциала T по формуле (24) всей исследуемой поверхности для каждого параллелепипеда найдены значения объема равного $V=S_{\text{осн}} \cdot h$, массы равной $M=V \cdot \Delta\rho$, и расстояний до вершин основания параллелепипеда $r = \sqrt{(X'_i + a/2)^2 + (Y'_i + a/2)^2}$, где a это сторона основания параллелепипеда.

После вычисления возмущающего потенциала вычислен общий потенциал параллелепипедов по формуле $U=U_0+T$, где U_0 – это уровенный потенциал рав-

ный $62636861,07 \text{ м}^2/\text{с}^2$. А также находим аномалию высоты вычисляемую по формуле Брунса $\zeta = T/\gamma_0$.

Для получения составляющих уклонения отвесной линии в плоскости меридиана ξ (") и плоскости первого вертикала η (") использовались следующие формулы (22) со значением потенциала вычисляемого по формулам:

$$T_x = G \frac{\left(X' + \frac{a}{2}\right) \cdot M}{r^3}, \quad T_y = G \frac{\left(Y' + \frac{a}{2}\right) \cdot M}{r^3}. \quad (129)$$

На рисунках 44, 45, 46 приведены вектора, поясняющие направление и величину уклонения отвесной линии на пунктах, выбранных при выполнении вычислительного эксперимента.

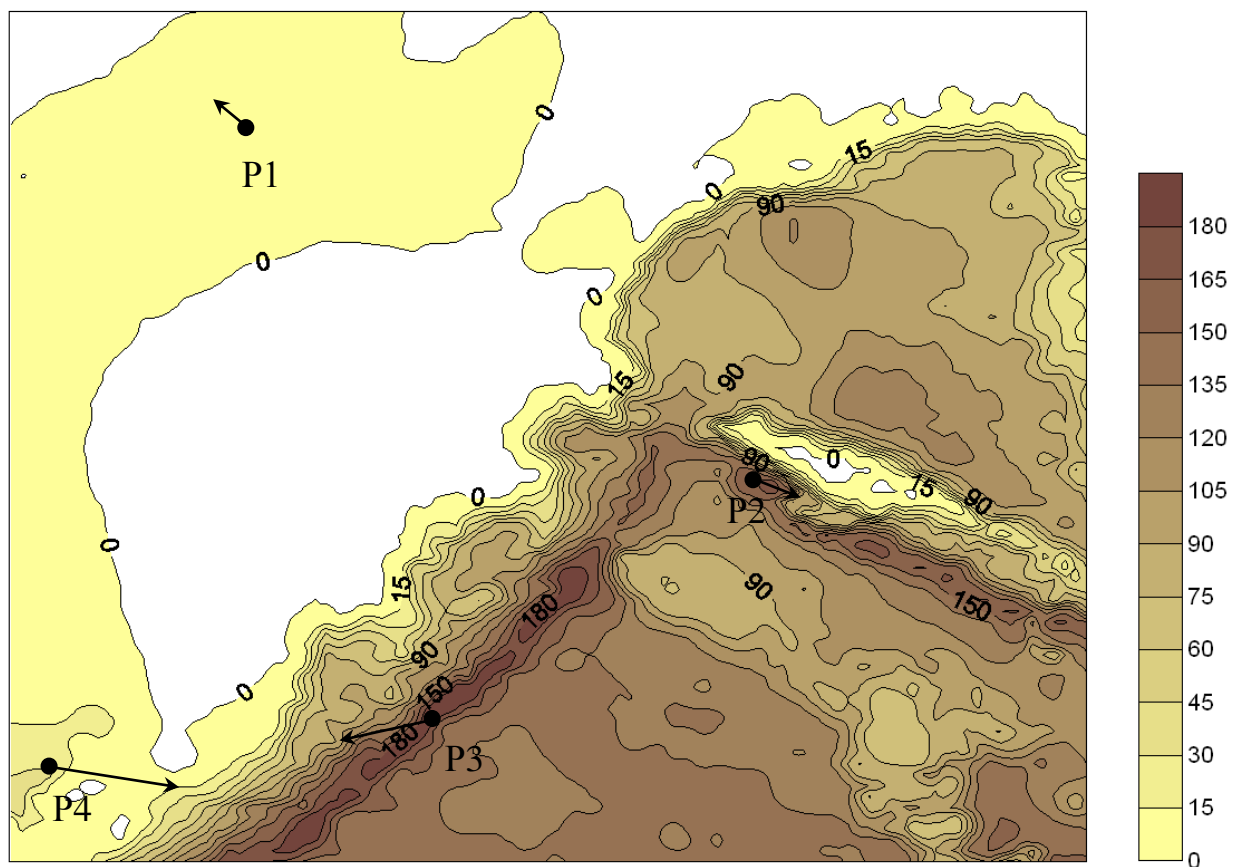


Рисунок 44 – Векторы поясняющие направление и величину УОЛ на примере поверхности береговой территории на полуострове Камчатка

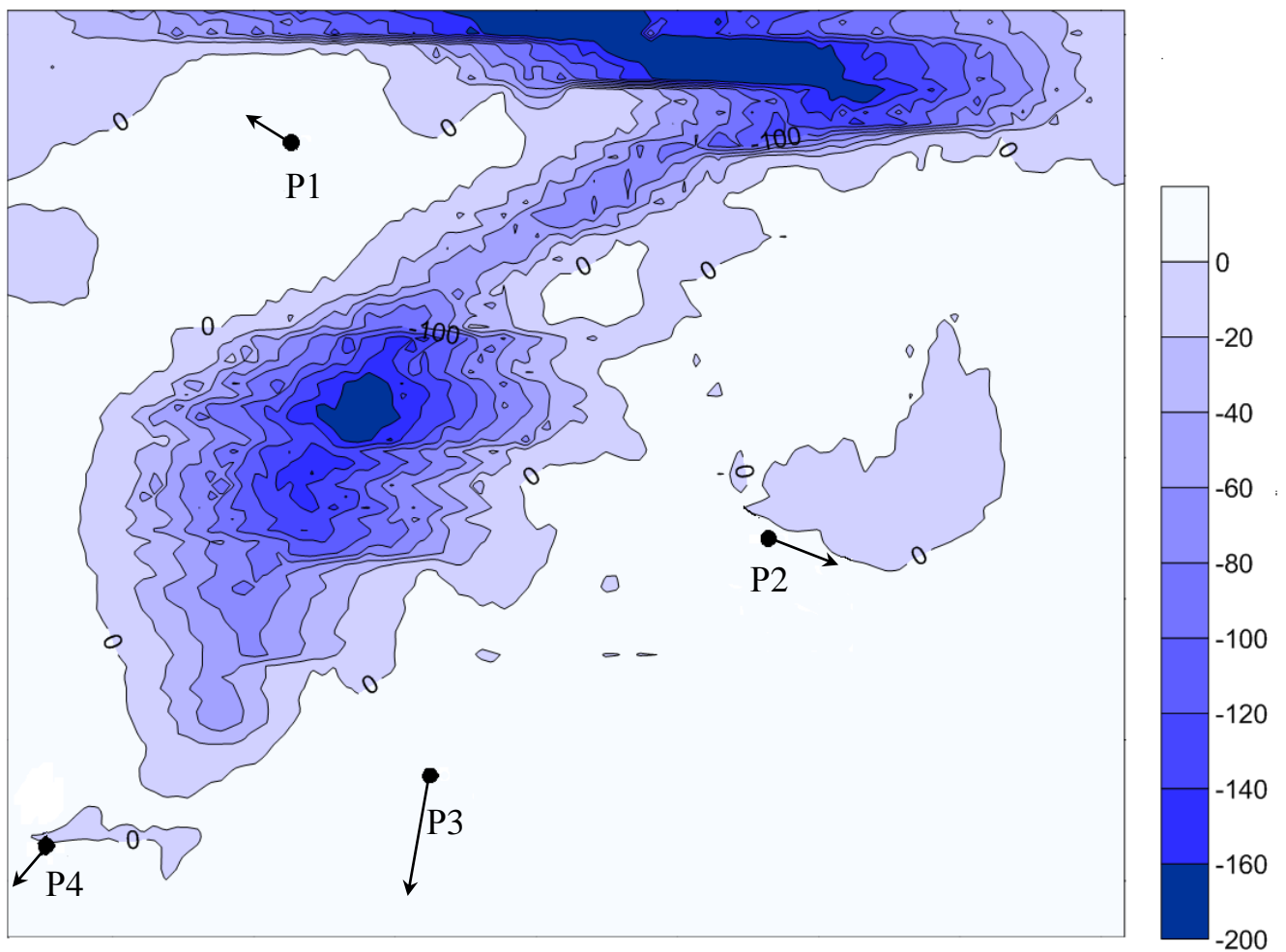


Рисунок 45 – Векторы поясняющие направление и величину УОЛ на примере смоделированного локального участка морского дна у побережья полуострова Камчатка

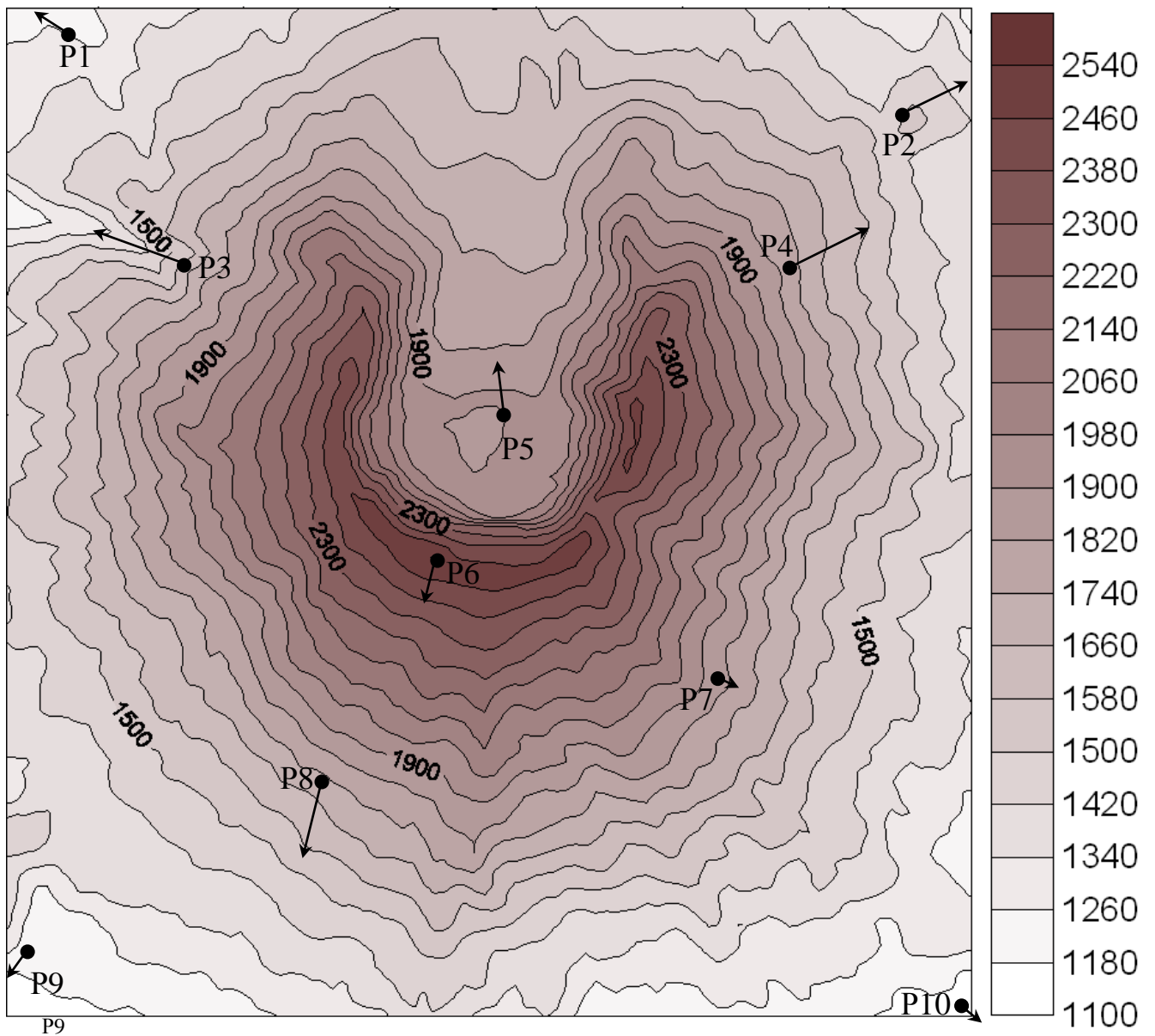


Рисунок 46 – Векторы поясняющие направление и величину УОЛ на примере поверхности вулкана Святой Елены

На последнем этапе определено значение силы тяжести десяти и четырех пунктов, выбранных в экспериментах, по формуле

$$g = \gamma_{0_{\text{св.в}}} + \Delta g, \quad (130)$$

где $\gamma_{0_{\text{св.в}}} = \gamma_0 - 0,3086 \cdot H_n$;

H_n – высота пункта относительно которого выполняются измерения.

Полученные результаты приведены в таблицах 6, 7, 8.

Таблица 6 – Значения силы тяжести и основных трансформант на примере вулкана Святой Елены

Сводная таблица значений по всем точкам						
номер точек	Δg , мГал	ξ , с	η , с	T , м ² /с ²	U , м ² /с ²	ζ , м
P1	10,378 5	- 3,855 7	4,851 4	0,916 0	62 636 861,990 0	0,093 4
P2	31,472 2	3,257 2	2,047 5	0,651 0	62 636 861,725 0	0,066 4
P3	40,157 2	- 3,544 3	2,696 5	0,839 4	62 636 861,913 4	0,085 6
P4	57,758 7	2,737 4	1,835 9	0,915 0	62 636 861,989 0	0,093 3
P5	72,521 0	- 0,323 6	1,814 4	1,069 0	62 636 862,143 0	0,109 0
P6 (max)	99,137 5	- 0,359 2	- 1,060 0	2,755 9	62 636 863,829 9	0,281 0
P7	63,594 8	0,703 4	- 0,041 7	1,048 5	62 636 862,122 5	0,106 9
P8	51,090 0	- 1,017 2	- 2,201 9	0,928 6	62 636 862,002 6	0,094 7
P9	6,530 6	- 3,615 2	- 4,115 0	0,943 0	62 636 862,017 0	0,096 2
P10 (min)	- 3,737 1	4,706 7	- 4,981 4	1,063 0	62 636 862,137 0	0,108 4
Сводная таблица значений по всем точкам						
номер точек	γ_0 , мГал	H_n , м	γ_0 , мГал	g , мГал		
P1	980 729,017 3	1 260,1	980 340,150 4	980 350,528 87		
P2		1 495,8	980 267,413 4	980 298,885 62		
P3		1 627,8	980 226,678 2	980 266,835 42		
P4		1 820,6	980 167,180 1	980 224,938 80		
P5		1 911,6	980 139,097 5	980 211,618 48		
P6 (max)		2 545,0	979 943,630 3	980 042,767 76		
P7		1 864,1	980 153,756 0	980 217,350 77		
P8		1 718,1	980 198,811 6	980 249,901 60		
P9		1 203,8	980 357,524 6	980 364,055 16		
P10 (min)		1 103,5	980 388,477 2	980 384,740 04		

Таблица 7 – Значения силы тяжести и основных трансформант на примере смоделированной локальной поверхности морского дна

Сводная таблица значений по всем точкам						
номер точек	Δg , мГал	ξ , с	η , с	T , м ² /с ²	U , м ² /с ²	ζ , м
P1	8,892 1	- 0,149 2	0,112 9	0,072 6	62 636 861,146 6	0,007 4
P2	8,751 2	0,337 2	- 0,206 1	0,630 7	62 636 861,704 7	0,064 5
P3	8,545 4	- 0,083 8	- 0,914 5	0,690 1	62 636 861,764 1	0,070 6
P4	8,339 2	- 0,242 6	- 0,185 2	0,100 6	62 636 861,174 6	0,010 3
Сводная таблица значений по всем точкам						
номер точек	γ_0 , мГал	H_n , м	γ_0 , мГал	g , мГал		
P1	980 729,017 3	4,5	980 727,638 3	980 736,530 40		
P2		164,7	980 678,205 8	980 686,956 97		
P3		196,2	980 668,484 4	980 677,029 81		
P4		28,1	980 720,355 5	980 728,694 73		

Таблица 8 – Значения силы тяжести и основных трансформант на примере цифровой модели рельефа всхолмленной береговой территории на полуострове Камчатка

Сводная таблица значений по всем точкам						
номер точек	Δg , мГал	ξ , с	η , с	T , м ² /с ²	U , м ² /с ²	ζ , м
P1	0,66	- 0,25	0,26	0,18	62 636 861,26	0,02
P2	16,27	0,36	- 1,33	0,78	62 636 861,86	0,08
P3	18,81	1,16	- 2,39	0,95	62 636 862,02	0,10
P4	2,87	- 0,87	- 0,17	0,24	62 636 861,31	0,02
Сводная таблица значений по всем точкам						
номер точек	γ_0 , мГал	H_n , м	γ_0 , мГал	g , мГал		
P1	980 729,02	4,47	980 727,64	980 728,30		
P2		164,65	980 678,21	980 694,48		
P3		196,15	980 668,48	980 687,29		
P4		28,07	980 720,36	980 723,22		

3.6 Выводы

Исследование гравитационного поля, вызываемого конусом, как типичной фигуры земного рельефа предложенными методиками аппроксимации конуса пятиточечно и детализировано по круговым секторам подтверждает значимость знания гравитационных характеристик, влияющих на точность высокоточных геодезических измерений.

Определение гравитационных характеристик локальных природных и техногенных объектов по конечно-элементным моделям поверхности рельефа позволяет выполнять более точный их учет при проектировании геодезических сетей, организации полевых работ и последующей интерпретации результатов геодезических и гравиметрических наблюдений. Преимуществом конечно-элементной методики, основанной на ЦМР, является более качественное и методически улучшенное определение гравитационных характеристик природных и техногенных объектов. Основой этого улучшения является более точное в совокупности вычисление гравитационных характеристик от влияния каждого параллелепипеда по аналитическим интегральным формулам, исключающее некоторые методические ошибки.

Смоделированные поверхности земной поверхности позволили описать гравитационное поле через вычисленные значения силы тяжести, аномалии силы тяжести, потенциалов и составляющих уклонения отвесной линии в плоскости меридиана и плоскости первого вертикала для выбранных пунктов.

Вычислительные эксперименты подтвердили технологическую перспективу формул алгоритма, являющихся основой предлагаемой методики определения гравитационных характеристик локальных природных и техногенных объектов размерами до нескольких десятков километров по цифровым моделям. Данный подход, как и программное обеспечение, может использовать цифровые модели рельефа, получаемых как по топографической основе, так и по дискретным GPS измерениям, по цифровым снимкам и т. д. Все это говорит о положительной перспективе использования результатов диссертационных исследований и необходимости их продолжения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При проведении диссертационного исследования были решены поставленные задачи и получены следующие основные результаты:

– выполнен анализ существующих методик моделирования гравитационного влияния пространственных тел, на основе которого выявлено, что существующие аналитические модели гравитационного влияния для определения гравитационных характеристик применимы для ограниченного класса пространственных масс;

– уточнена методика определения гравитационных характеристик локальных природных и техногенных объектов, основанная на комплексировании аналитических, конечно-элементных и цифровых моделей, что в итоге позволило повысить точность и автоматизировать этот процесс, повысить достоверность интерпретации результатов геодезических, астрономических и гравиметрических измерений;

– разработан алгоритм детализации конечными элементами модели конусообразных природных и техногенных объектов с разбиением их на кольцевые секторы и вытянутые параллелепипеды, который обеспечивает высокую точность определения гравитационных характеристик объектов для учета их в геодезических и гравиметрических измерениях и позволяет выполнить более точную аппроксимацию их гравитационного влияния;

– выполненные экспериментальные исследования разработанной методики определения гравитационных характеристик смоделированных и реальных локальных природных объектов на площадях размерами 197,8; 205,4; 12,68 км² с учетом различной плотности составляющих тел подтвердили работоспособность методики и позволили с высокой точностью описать гравитационные характеристики объекта для учета их в геодезических и гравиметрических измерениях.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы связаны с привлечением различных аналитических моделей и их комбинированием с учетом рельефа конкретных природных и техногенных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Антонов, В. А. Аналитическое представление потенциала однородного эллиптического конуса [Текст] / В. А. Антонов, А. С. Баранов // Журнал технической физики. – 2001. – Т. 71, вып. 10. – С. 8 – 12.
- 2 Антонов, В. А. Введение в теорию ньютоновского потенциала [Текст] / В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников. – М.: Наука, 1988. – 268 с.
- 3 Антонов, Ю. В. Редуцирование наблюденных значений силы тяжести в условиях юго-восточной части Воронежского массива [Текст] / Ю. В. Антонов, Е. Б. Серебряков, Е. Н. Спиридонова // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. геол. – 2001. – № 12. – С. 184-189.
- 4 Басманов, А. В. Развитие государственной гравиметрической сети Вьетнама [Текст] / А. В. Басманов, В. В. Попадъев, Р. А. Сермягин // Геодезия и картография. – 2011. – № 5. – С. 16 – 19.
- 5 Болтанов, В. И. О влиянии гравитационного поля на результаты измерения на геодинимических полигонах [Текст] / В. И. Болтанов // Геодезия и картография. – 1986. – № 2. – С. 6–10.
- 6 Большое трещинное Толбачинское извержение (1975-1976 гг., Камчатка). [Текст] / отв. ред. С. А. Федотов. – М.: Наука, 1984.
- 7 Бровар, В. В. Роль гравитационного поля в геодезии [Текст] / В. В. Бровар // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1970. – № 2. – С. 66–72.
- 8 Бровар, В. В. Теория фигуры Земли [Текст] / В. В. Бровар, В. А. Магницкий, Б. Л. Шимбирев. – М.: Геодезиздат, 1961. – 256 с.
- 9 Бузук, В. В. Вариации высот квазигеоида, обусловленные неприливыми изменениями силы тяжести [Текст] / В. В. Бузук, И. Г. Вовк, Ю. Г. Костына // Повторные гравиметрические наблюдения. Вопросы теории и результаты : сб. трудов по исследованию неприливых измерений силы тяжести и сопутствующих разработок в области аппаратуры и методики работ. – М.: ВНИИгеофизики (роттапринт), 1980. – С. 42–45.

10 Буланже, Ю. Д. Некоторые соображения о глобальных исследованиях неприливных изменений силы тяжести [Текст] / Ю. Д. Буланже // Повторные гравиметрические наблюдения. Вопросы теории и результаты : сб. трудов по исследованию неприливных изменений силы тяжести и сопутствующих разработок в области аппаратуры и методики работ. – М.: ВНИИгеофизики (ротапринт), 1980. – С. 22–26.

11 Буланже, Ю. Д. Неприливные изменения силы тяжести [Текст] / Ю. Д. Буланже // Повторные гравиметрические наблюдения. Вопросы теории и результаты : сб. трудов по исследованию неприливных изменений силы тяжести и сопутствующих разработок в области аппаратуры и методики работ. – М.: ВНИИ-геофизики (ротапринт), 1980. – С. 4–21.

12 Буланже, Ю. Д. О составлении и перспективах исследований современных движений земной коры на геодинамических полигонах [Текст] / Ю. Д. Буланже, А. К. Певнев // Современные движения земной коры. – Новосибирск: Наука, 1978. – С. 4 – 7.

13 Вовк, И. Г. Вариации гравитационного поля при изменении уровня водохранилища [Текст] / И. Г. Вовк // Геодезия и картография. – 1982. – № 9. – С. 12–15.

14 Вовк, И. Г. Влияние вариаций поля силы тяжести на результаты геометрического нивелирования [Текст] / И. Г. Вовк // Сборник научных трудов. Повторные гравиметрические наблюдения. – М., 1982. – С. 38–41.

15 Ву Хонг Куонг. Исследования моделей гравитационного поля Земли по наземным и спутниковым измерениям [Текст] / Ву Хонг Куонг // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – № 1. – С. 20–25.

16 Гиенко, Е. Г. Определение уклонения отвесной линии и астрономических координат по наземным и GPS-измерениям [Текст] / Е. Г. Гиенко, А. В. Елагин // Вестник СГГА. – 2000. – N 5. – С. 16–19.

17 Гордин, В. М. Способы учета влияния рельефа местности при высокоточных гравиметровых измерениях [Текст] / В. М. Гордин // Обзор. Сер. 9. Региональная разведочная и промысловая геофизика. – М.: ВИЭМА, 1974. – 90 с.

- 18 Гофман-Велленгоф, Б. Физическая геодезия [Текст]: учебник / пер с англ. Б. Гофман-Велленгоф, и др. – М.: МИИГАиК, 2007. – 426 с.: илл.
- 19 Грушинский, Н. П. Основы гравиметрии [Текст] / Н. П. Грушинский. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
- 20 Грушинский, Н. П. Теория фигуры Земли [Текст] / Н. П. Грушинский. – М.: Физматгиз, 1963. – 448 с.: илл.
- 21 Гюйгенс, Х. Трактат о свете [Текст] / Х. Гюйгенс. – М.; Л., 1935.
- 22 Дементьев, Ю. В. Влияние сжатия Земли на значение топографической редукции силы тяжести [Текст] / Ю. В. Дементьев, А. И. Каленицкий // Геодезия и картография. – 2012. – № 11. – С. 13–14.
- 23 Дементьев, Ю. В. Построение планетарной цифровой модели рельефа и ее приложения [Текст] / Ю. В. Дементьев, Е. Н. Кулик, Е. В. Дергачева // ГЕО–Сибирь – 2010: VII Междунар. науч. конгр.: сб. материалов. – Новосибирск. – 2010. – Т.1, ч.1. – С. 179–183.
- 24 Дементьев, Ю. В. О редукциях силы тяжести [Текст] / Ю. В. Дементьев // ГЕО–Сибирь – 2010: VII Междунар. науч. конгр.: сб. материалов. – Новосибирск, 2010. – Т.1, ч.1.– С. 167–172.
- 25 Дударев, В. И. Оценка влияния изменения гравитационного поля Земли на движение спутника [Текст] / В. И. Дударев // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 2. – С. 8–13.
- 26 Думитрашку, А. И. Состояние современной гравиметрии при изучении геодинамических процессов [Текст] / А. И. Думитрашку // ГЕО-Сибирь – 2009: V Междунар. науч. конгр.: сб. материалов – Новосибирск, 2009. – Т.1, ч.2. – С. 17–19.
- 27 Елагин, А. В. Теория фигуры Земли [Текст] : учеб. пособие / А. В. Елагин. – Новосибирск: СГГА, 2012. – 174 с.
- 28 Елагин, С. В. О влиянии масс крупных гидротехнических сооружений на уклонение отвеса [Текст] / С. В. Елагин // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1964. – Т. 2. – С. 95–99.

29 Еремеев, В. Ф. Теория высот в гравитационном поле [Текст] / В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина. – М.: Недра, 1972. – 145 с.

30 Идентификация движений и напряженно-деформированного состояния самоорганизующихся геодинамических систем по комплексным геодезическим и геофизическим наблюдениям [Текст] : монография / В. А. Середович, В. К. Панкрушин, Ю. И. Кузнецов, Б. Т. Мазуров, В. Ф. Ловягин; под общ. ред. В. К. Панкрушина; СГГА. – Новосибирск, 2004. – 356 с.

31 Изотов, А. А. О программе астрономо-геодезических и гравиметрических работ на геодинамических полигонах [Текст] / А. А. Изотов // Геодезия и картография. – 1977. – № 11. – С. 52-60.

32 Изучение Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии [Текст] : тр. II Орловской конференции / АН УССР. Гл. астроном. обсерватория; редкол. Яцкив Я. С. (отв. ред.) и др. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.

33 Инструкция по гравиразведке [Текст]. – М.: Недра, 1980. – 80 с.

34 Каленицкий, А. И. Еще раз о редукциях в гравиметрии [Текст] / А. И. Каленицкий // Вестник СГГА, 2006. – Вып.11. – С. 98–110.

35 Каленицкий, А. И. Еще раз о редукционных проблемах гравиметрии [Текст] / А. И. Каленицкий // ГЕО-СИБИРЬ-2006: сб. материалов междунар. науч. конгр. / Сиб. гос. геодез. акад. – Новосибирск, 2006. – Т.3, ч.2. – С.130 – 142.

36 Каленицкий, А. И. Результаты первого цикла натуральных геодезическо-гравиметрических измерений на Вынгапуровском геодинамическом полигоне [Текст] / А. И. Каленицкий, Э. Л. Ким // Геодезия и картография. – 2011. – № 8. – С. 30 – 35.

37 Каленицкий, А. И. Методические рекомендации по учету влияния рельефа местности в гравиразведке [Текст] / А. И. Каленицкий, В. П. Смирнов; СНИИГГиМС. – Новосибирск, 1980. – 103 с.

38 Каленицкий, А. И. Методические рекомендации по учету влияния рельефа местности в гравиразведке [Текст] / А. И. Каленицкий, В. П. Смирнов. – Новосибирск: СНИИГГиМС. – 1981. – 160 с.

39 Канушин, В. Ф. Обратные задачи динамической геодезии со свободной границей [Текст] / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина // ГЕО–СИБИРЬ – 2006: сб. материалов междунар. науч. конгр. / Сиб. гос. геодез. акад. – Новосибирск, 2006. – Т. 3, ч. 2. – С. 202 – 205.

40 Канушин, В. Ф. Применение дифференциального уравнения параболического типа для решения краевых задач динамической геодезии [Текст] / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2013: IX междунар. науч. конгр., 15-26 апреля 2013г., Новосибирск : междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия»: сб. материалов в 3 т. – Новосибирск: СГГА, 2013. – Т. 1. – 239 с.

41 Канушин, В. Ф. Учет влияния вариаций силы тяжести, обусловленных изменением уровня водохранилища на результаты геодезических измерений [Текст] / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин // международная научно-техн. конф., посвящ. 225-летию МИИГАиК, "Геодезия", Москва, 2004. – М.: МГУГиК, 2004. – С. 75–78.

42 Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984.

43 Красовский, Ф. Н. Избранные сочинения [Текст]: Т. IV. – М.: Изд-во геодез. лит., 1955. – 590 с.

44 Красовский, Ф. Н. Схема и программа государственной триангуляции [Текст] / Ф. Н. Красовский – Избр. соч., т. II. – М.: Изд-во геодез. лит., 1956. – 219 с.

45 Кэри, У. В поисках закономерностей развития Земли и Вселенной: История догм в науках о Земле [Текст] / У Кэри; пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 447 с.: ил.

46 Ле Минь. Создание базы данных силы тяжести, установление модели геоида с высокой точностью на территории Вьетнама для исследования Земли и применение новых технологий для определения высоты с помощью Навигационной Спутниковой Системы [Текст] : репринт научно-технического отчета проекта. – Ханой, 2005.

47 Мазуров, Б. Т. Гравитирующее влияние конусообразных форм рельефа на результаты геодезических измерений [Текст]. / Б. Т. Мазуров, О. И. Некрасова // Геодезия и картография. – 2013. – № 5. – С. 2 – 6.

48 Мазуров, Б. Т. Конечно-элементная модель конусообразных форм рельефа для учета их гравитирующего влияния на результаты геодезических измерений [Текст] / Б. Т. Мазуров, О. И. Некрасова // Геодезия и картография. – 2013. – № 6. – С. 42 – 45.

49 Мазуров, Б. Т. Алгоритм аппроксимации гравитационного влияния конусообразных форм земного рельефа [Текст] / Б.Т. Мазуров, О.И. Некрасова // ГЕО-Сибирь 2010: сб. материалов VII междунар. науч. конгр. – Новосибирск. 2010. – Т.1, ч.1. С. 205 – 210.

50 Мазуров, Б. Т. Аппроксимация гравитационного влияния локального рельефа по его цифровым моделям [Текст] / Б.Т. Мазуров, О.И. Некрасова // Геодезия и картография. – 2014. – № 7. – С. 2 – 4.

51 Мазуров, Б. Т. Влияние перемещаемых гравитирующих масс на результаты наблюдений и их интерпретацию [Текст] / Б. Т. Мазуров // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: междунар. конф. ИГД СО РАН. – Новосибирск, 2009.

52 Мазуров, Б. Т. Идентификационное экспериментальное построение физико-математической модели динамики земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области [Текст] / Б. Т. Мазуров, В. К. Панкрушин // ГЕО-СИБИРЬ-2005: сб. материалов междунар. выставки и науч. конгр. – Новосибирск. – 2005. – Т. 2. – С. 62.

53 Мазуров, Б. Т. Идентификационный эксперимент: моделирование системы наблюдений за динамикой земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области [Текст] / Б. Т. Мазуров, В. К. Панкрушин // ГЕО-СИБИРЬ-2005: сб. материалов междунар. выставки и науч. конгр. – Новосибирск. 2005. – Т. 2. – С. 67.

54 Мазуров, Б. Т. Идентификация напряженно-деформированного состояния вулканической области по результатам математической обработки разно-

родных геодезических и геофизических наблюдений [Текст] / Б.Т. Мазуров // Изв. вузов. Горный журнал. – 2007. – № 7. – С. 58 – 62.

55 Мазуров, Б. Т. Компьютерная визуализация полей смещений и деформаций [Текст] / Б. Т. Мазуров // Геодезия и картография. – 2007. – № 4. – С. 51–55.

56 Мазуров, Б. Т. Математическая обработка нивелирных и гравиметрических наблюдений в условиях извлечения и перемещения больших объемов руды и пород [Текст] / Б. Т. Мазуров // Изв. вузов. Горный журнал. – 2006. – № 4. – С. 99 – 104.

57 Мазуров, Б. Т. Модель вертикальных движений земной поверхности и изменений гравитационного поля в районе действующего вулкана [Текст] / Б. Т. Мазуров // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2007. – № 2. – С. 97 – 106.

58 Мазуров, Б. Т. Модель системы наблюдений за вертикальными движениями земной поверхности и изменениями гравитационного поля в районе действующего вулкана [Текст] / Б. Т. Мазуров // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2007. – № 3. – С. 93 – 101.

59 Мазуров, Б. Т. Пятиточечная модель гравитирующего усеченного конуса [Текст] / Б. Т. Мазуров // Изв. вузов. Горный журнал. – 2008. – № 5. – С. 28 – 31.

60 Мазуров, Б. Т. Совместная математическая обработка разнородных комплексных геодезических и геофизических наблюдений за движениями земной поверхности и изменениями аномальных масс [Текст] / Б. Т. Мазуров // Изв. вузов. Горный журнал. – 2007. – № 6. – С. 30 – 38.

61 Мазуров, Б. Т. Некоторые модели аппроксимации гравитационного влияния конуса [Текст] / Б. Т. Мазуров // ГЕО-Сибирь 2009: сб. материалов V междунар. науч. конгр. – Новосибирск. – 2009. – Т.1, ч.2. – С. 39 – 44.

62 Мазуров, Б. Т. Аппроксимация гравитационного влияния рельефа [Текст] / Б. Т. Мазуров, О. И. Некрасова // Интерэкспо ГЕО–Сибирь–2013: IX междунар. науч. конгр., 15-26 апреля 2013г., Новосибирск: междунар. науч. конф.

«Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия»: сб. материалов в 3 т. – Новосибирск: СГГА, – 2013. – Т. 1. – 239 с.

63 Михалицын, М. М. О моделях точечных масс, используемых для формирования модельных полей вариаций трансформант геогравитационного потенциала (в одномерном пространстве) [Текст] / М. М. Михалицын // ГЕО-Сибирь 2009: сб. Материалов V Междунар. науч. конгр.– Новосибирск. – 2009. – Т.1, ч.2. – С. 62 – 65.

64 Молоденский М. С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли [Текст] / М. С. Молоденский // Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая – 1948. Т. XII, № 3. – С. 193–211.

65 Молоденский, М. С. Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Земли [Текст] / М. С. Молоденский. – М.: Наука, 2001. – 569 с.; ил. (Сер. "Избранные труды").

66 Молоденский, М. С. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли [Текст] / М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина // Труды ЦНИИГАиК. – 1960. – Вып. 131. – 251 с.

67 Молоденский, М. С. Современные задачи изучения фигуры Земли [Текст] / М. С. Молоденский // Геодезия и картография. – 1958. – № 7. – С. 3 – 5.

68 Мориц, Г. Современная физическая геодезия [Текст] / Г. Мориц; пер. с англ. – М.: Недра, 1983.

69 Непоклонов, В. Б. Методики определения составляющих уклонов отвесных линий и высот квазигеоида по гравиметрическим данным. Гравиметрия и геодезия [Текст] / В. Б. Непоклонов. – М.: Научный мир, 2010. – 572 с.

70 О точности определения нижней границы геологического объекта по гравиметрическим данным (на примере впадин Байкальской рифтовой зоны) [Текст] / Т. В. Балк и др. // Физика Земли. – 1988. – № 3. – С. 81–86.

71 Огородова, Л. В. Высшая геодезия [Текст] : Ч. III. Теоретическая геодезия: учебник для вузов / Л. В. Огородова. – М.: Геодезкартиздат, 2006. – 384 с.: ил.

72 Огородова, Л. В. Гравиметрия [Текст] / Л. В. Огородова, Б. П. Шимбирев, А. П. Юзефович. – М.: Недра, 1978. – 325 с.

73 Особенности построения и использования карто-схем возмущающих полей аномалий высот и силы тяжести, обусловленных динамикой водных масс крупных водоемов [Текст] / В. В. Бузук, [и др.] // XLVI научно-техн. конф. препод. СГГА, посвящ. 30-летию опт. фак. 15-18 апр. 1996 г.: тез. докл.– Новосибирск, 1996. – Ч.1. – С. 103–104.

74 Панкрушин, В. К. Математическое моделирование и идентификация геодинамических систем [Текст] : монография / В. К. Панкрушин. – Новосибирск: СГГА, 2002. – 423 с.

75 Пеллинен, Л. П. Высшая геодезия (Теоретическая геодезия) [Текст] / Л. П. Пеллинен. – М.: Недра, 1978. – 264 с.

76 Пеллинен, Л. П. Современное состояние и перспективы планетарных исследований гравитационного поля Земли [Текст] / Л. П. Пеллинен // Изучение Земли, как планеты, методами астрономии, геодезии и геофизики. – Киев: Наук. думка, 1982. – С. 55 – 63.

77 Применение высокоточных геодезических методов для мониторинга деформационных процессов в зонах ведения крупномасштабных горных работ [Текст] / А. А. Козырев [и др.] // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. междунар. конф. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – С. 356–362.

78 Пространственное моделирование средствами ГИС для орфотектонического анализа [Электронный ресурс] / Е. А. Вишневская, А. В. Елобогоев, Е. М. Высоцкий, Н. Н. Добрецов. – Электрон. текст. и граф. данные // Из материалов международной конференции «Интеркарто-6» – Новосибирск: Объединённый институт геологии, геофизики и минералогии Сибирского отделения РАН, 2000. – Режим доступа:

<http://www.masters.donntu.edu.ua/2004/ggeo/solovjov/library/lib8.htm>, свободный.

79 Пятаков, Ю. В. Методы решения прямых задач гравиметрии [Текст] / Ю. В. Пятаков, В. И. Исаев // Известия ТПУ. – 2012. – №1. – С.105 –110.

80 Разработка методов изучения динамики гравитационного поля и фигуры Земли планетарного, регионального и локального характера [Текст] : отчет о НИР (промежуточ.) / НИИГАиК; рук. Бузук В. В., Вовк И. Г. – Новосибирск. – 1989. – 59 с. – № ГР 0186.0036247; Инв. № 089.00011377.

81 Сашурин, А. Д. Масштабное техногенное воздействие горных разработок на участок литосферы [Текст] / А. Д. Сашурин, А. А. Панжин // Проблемы геотехнологии и недроведения (Мельниковские чтения): докл. междунар. конф. 6 – 10 июля 1998 г. – Екатеринбург: УрО РАН, 1998. – С. 170–178.

82 СГГА. Разработка методики и оценка учета влияния вариаций силы тяжести, обусловленных изменением уровня водохранилища на результаты геодезических измерений [Текст]: отчет о НИР (заключит.) / СГГА ; рук. Канушин В. Ф.; исполн. Ганагина И. Г. – Новосибирск: [б. и.], 2002. – 105 с. – Б. ц. – № ГР 012003.00161. – Инв. № 02.20 03 03448.

83 Силкин, К. Ю. Геоинформационная система Golden Software Surfer 8 [Текст] / К. Ю. Силкин. – Воронеж: ВГУ, 2008. – 66 с.

84 Соловицкий, А. Н. Геодинамический анализ [Текст] / А. Н. Соловицкий // Прикладная динамическая геодезия. – Кемерово, 2001. – 158 с.

85 Соловьев, Ю. С. Модели гравитационного поля Земли для расчета траектории полета ракет. Гравиметрия и геодезия [Текст] / Ю. С. Соловьев. – М.: Научный мир, 2010. – С. 369 – 378.

86 Старостенко, В. И. Прямая задача гравиметрии для неоднородной произвольно усеченной вертикальной прямоугольной призмы [Текст] / В. И. Старостенко, О. В. Легостаева // Физика Земли. – 1998. – № 12. – С. 31 – 44.

87 Старостенко, В. И. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле [Текст] / В. И. Старостенко, А. Г. Манукян // Физика Земли. – 1983. – № 12. – С. 34 – 50.

88 Страхов, В. Н. К теории логарифмического потенциала при переменной плотности возмущающих масс [Текст] / В. Н. Страхов // Физика Земли. – 1975. – № 12. – С. 64 – 81.

89 Суздалев, А. С. Изучение в волновой области эволюции гравитационного поля Земли [Текст] / А. С. Суздалев // ГЕО-Сибирь 2009: сб. Материалов V междунар. науч. конгр. – Новосибирск, 2009. – Т.1, ч.2. – С. 54 – 58.

90 Торге, В. Гравиметрия [Текст] / В. Торге; пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 429 с.: ил.

91 Тихонов, А. Н. Методы решения некорректно поставленных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 286 с.

92 Утёмов, Э. В. Гравиразведка : пособие для самостоятельного изучения лекционного курса слушателей курсов повышения квалификации специальности «Геофизика». [Текст] / Э. В. Утёмов. – Казань: Казанский гос. ун-т, 2009. – 26 с.

93 Файтельсон, А. Ш. Медленные изменения гравитационного поля Земли и современные движения земной коры [Текст] / А. Ш. Файтельсон, Н. Т. Миронов, М. И. Юркина // Современные движения земной коры. – Новосибирск: Наука. – 1978. – С.154 – 162.

94 Холшевников, К. В. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие. / К. В. Холшевников, И. И. Никифоров. – СПб., 2008. – 72 с.

95 Шимбирев, Б. П. Теория фигуры Земли [Текст] : учебник / Б. П. Шимбирев. – М.: Недра, 1975. – 432 с.

96 Юркина, М. И. Исследования по совместному определению изменений земного гравитационного поля и вертикальных движений земной коры по повторным гравиметрическим и нивелирным наблюдениям [Текст] / М. И. Юркина // Повторные гравиметрические наблюдения. – М., 1988. – С. 6 – 22.

97 Юркина, М. И. Исследования по совместному определению изменений земного гравитационного поля и вертикальных движений земной коры по повторным гравиметрическим и нивелирным наблюдениям [Текст] / М. И. Юркина // Повторные гравиметрические наблюдения. – М.: Изд-во ВНИИгеофизики, 1988. – С. 6 – 14.

98 Юркина, М. И. Поле силы тяжести и динамика Земли [Текст] / М. И. Юркина // Геодезия и картография. – 1989. – № 5. – С. 53 – 55.

99 Юшкин, В. Д. Оценка влияния окружающей среды на ускорение силы тяжести по данным вертикальных градиентов [Текст] / В. Д. Юшкин // Геодезия и картография. – 2012. – № 3. – С. 3 – 7.

100 ALLIS, R. G., T. M. HUNT: Analysis of exploitation- induced gravity changes at Wairakei geothermal field. *Geophysics* 51, 1647-1660, 1986 [Text].

101 BARNETT, C. T.: Theoretical modelling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrary shaped three-dimensional body. *Geophysics* 41, 1353-1364, [Text] 1976.

102 BIRÓ, P.: Time variation of height and gravity. H. Wichmann, Karlsruhe [Text] 1983.

103 БОЛТ, М. Н. Р.: Inverse methods in the interpretation of magnetic and gravity anomalies. [Text] / In: B. A. Bolt, B. Adler, S. Fembach, R. Rotenberg (eds.), *Methods in computational physics*. 133-162, Academic Press, London-New York 1973.

104 HELMERT, F. R.: Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen. [Text] / Veroff. Kgl. Preuß. Geod. Inst., No. 1, Berlin 1890.

105 Helmert, F.R.: die mathematischen und physikalischen Theorien in hoheren Geodasie. Teubner, Leipzig 1880/1884. [Text] (Nachdruck Minerva GmbH, Frankfurt a. M. 1962.) [Имеется перевод 1 тома: Гельмерт Ф.Р. Математические и физические теории высшей геодезии, т. 1.- М.: Геодезиздат, 1962.]

106 [Electronic recourse] <http://www.credo-dialogue.com>

107 HECK, B., H. MÄLZER: On some problems connected with the determination of recent vertical crustal movements from repeated levellings and gravity measurements. [Text] / *Tectonophysics* 130, 299-305, 1986.

108 Kosygin V.Yu., Pyatakov Yu.V., Krasikov V.N. Direct Gravity Problem for a Spherical Polyhedron [Text] // *Geology of Pacific Ocean*. -1997. - V. 13. - P. 857-868.

109 MARSH, J. G., S. VINCENT: Global detailed gravimetric geoid computation and model analysis. *Geophys. Surveys* 1, [Text] / 481-511, 1974.

110 Murthy R., Rao B. Gravity anomalies of two-dimensional bodies of irregular cross-section with density contrast varying with depth [Text] // Geophysics. - 1979. - V. 44. - № 9. - P. 1525-1530.

111 NAGY, D.: The gravitational attraction of a right angular prism Geophysics 31 [Text] / 362-371, 1966.

112 Rao B. Modelling of sedimentary basins from gravity anomalies with variable density contrast [Text] // Geophysics. - 1986. - V. 84. - № 1. -P. 207-212.

113 TALWANI, M., M. EWING: Rapid computation of gravitational attraction of threedimensional bodies of arbitrary shape. Geophysics 25, [Text] / 203-225, 1960.

114 Torge, W.: Accuracy and stability of height reference surface. [Text] / In: H. Pelzer, W. Niemeier (eds.), Determination of heights and height changes, 69-82, F.Dümmler, Bonn 1986a.

115 V. Deutsch Clayton/ Geostatistical reservoir modeling. Oxford University Press, [Text] /New York, 2002.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

ПОТЕНЦИАЛ КОНУСА

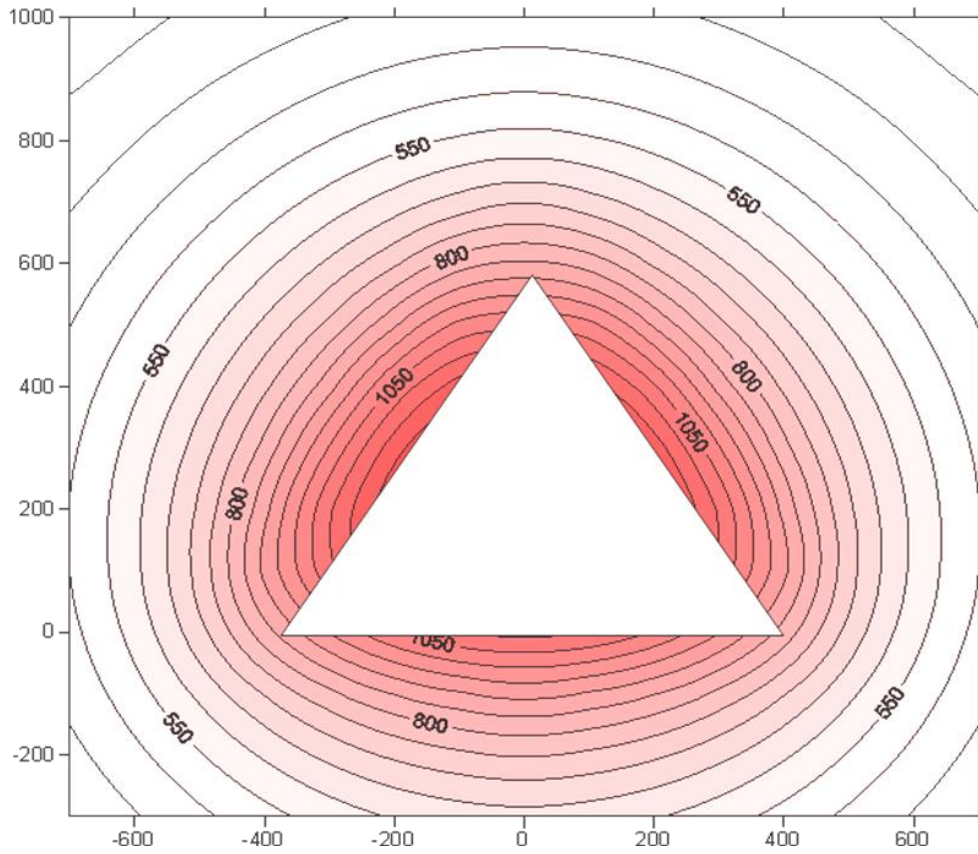


Рисунок А.1 – Потенциал конуса

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(справочное)

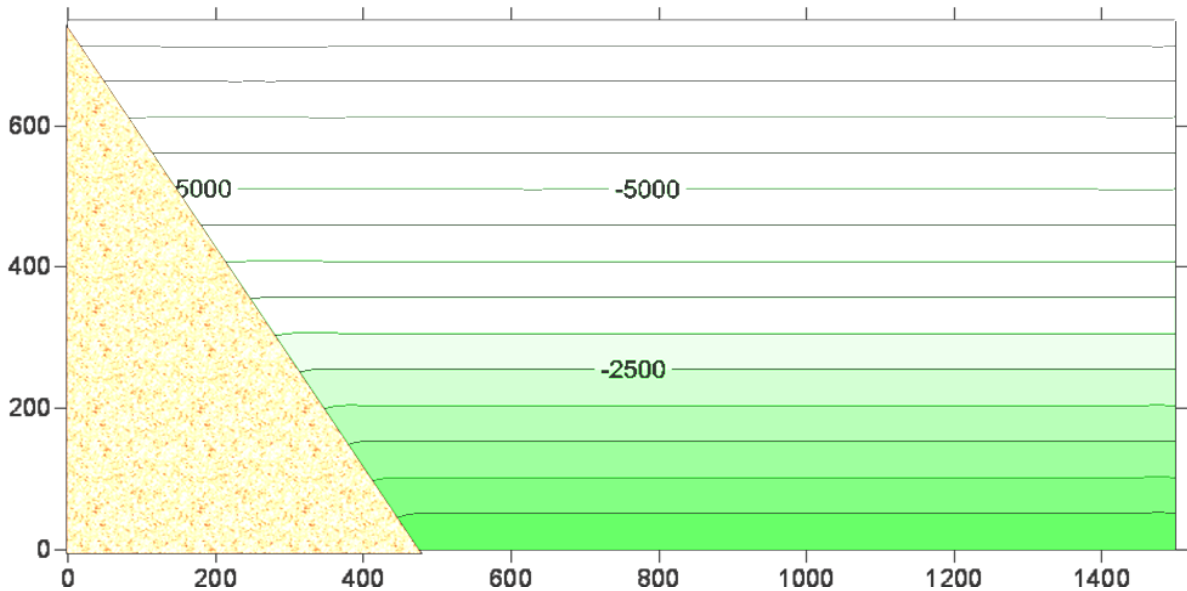
ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕННЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ МАСС НА
ПОТЕНЦИАЛ

Рисунок Б.1 – Влияние перемещенных гравитирующих масс на потенциал (для конуса)

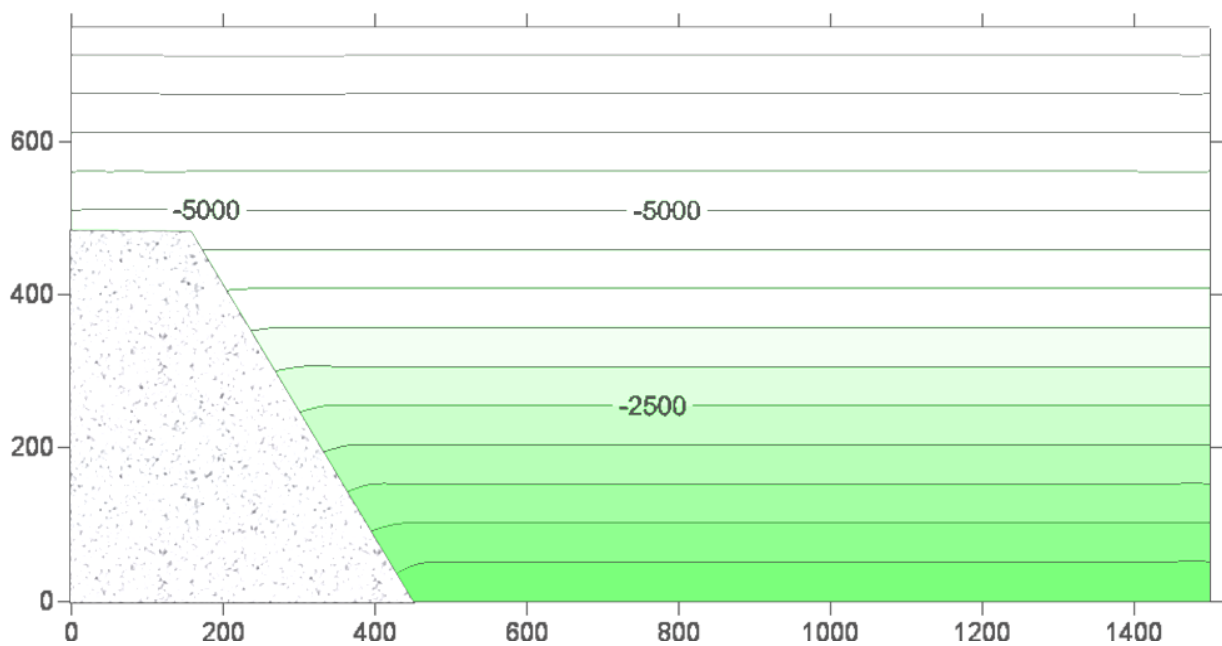


Рисунок Б.2 – Влияние перемещенных гравитирующих масс на потенциал (для усеченного конуса)

ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

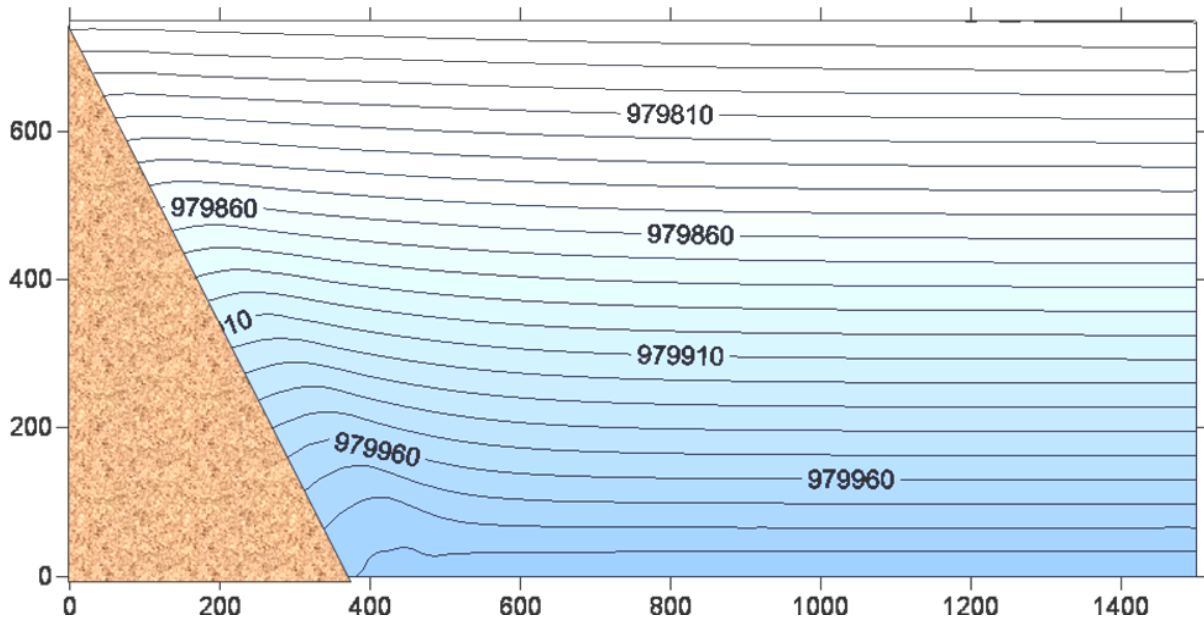
ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕННЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ МАСС НА СИЛУ
ТЯЖЕСТИ

Рисунок В.1 – Влияние перемещенных гравитирующих масс на силу тяжести (для конуса)

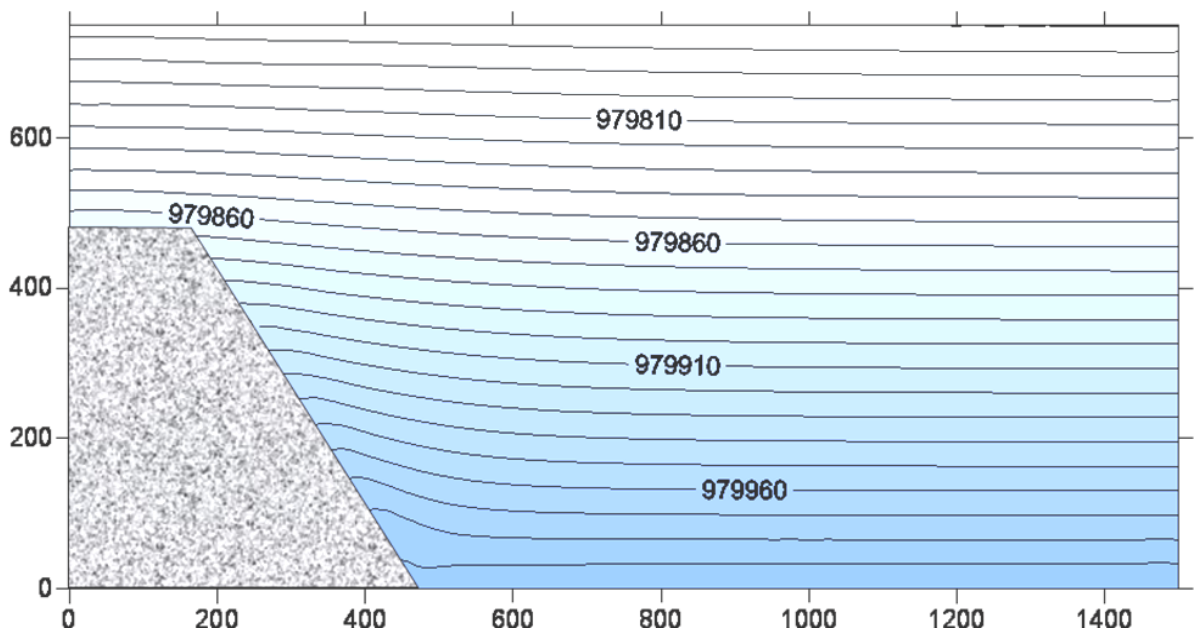


Рисунок В.2 – Влияние перемещенных гравитирующих масс на силу тяжести (для усеченного конуса)

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

(справочное)

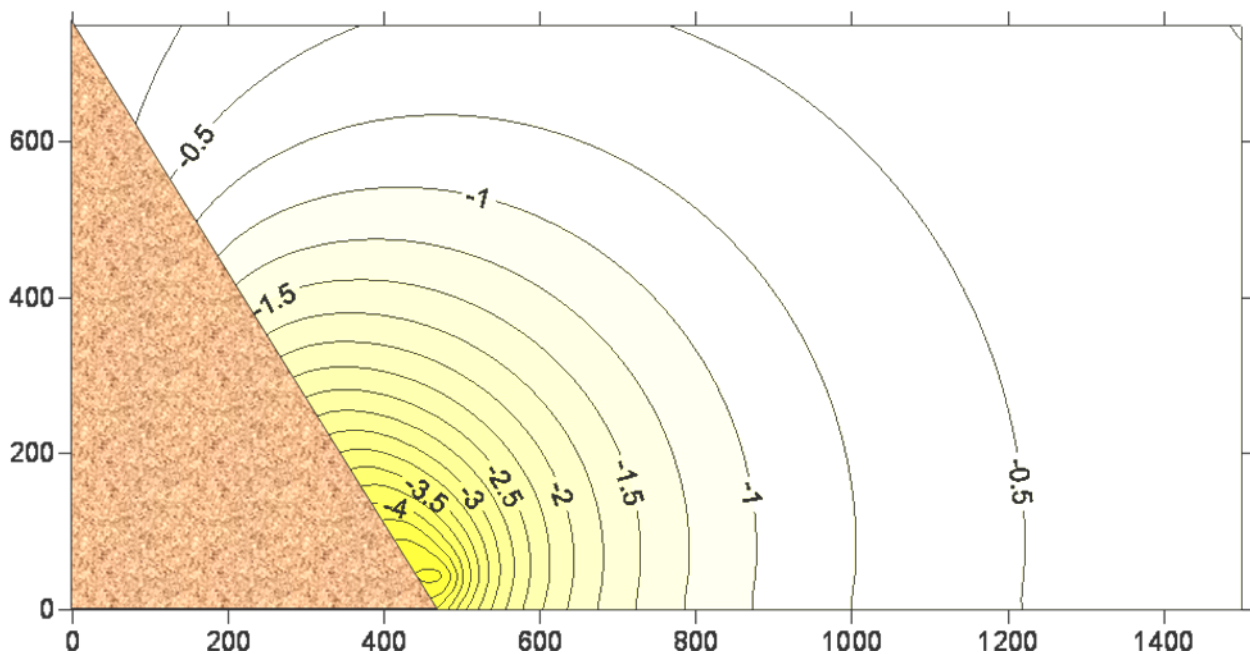
ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕННЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ МАСС НА
УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

Рисунок Г.1 – Влияние перемещенных гравитирующих масс на уклонения отвесных линий (для конуса)

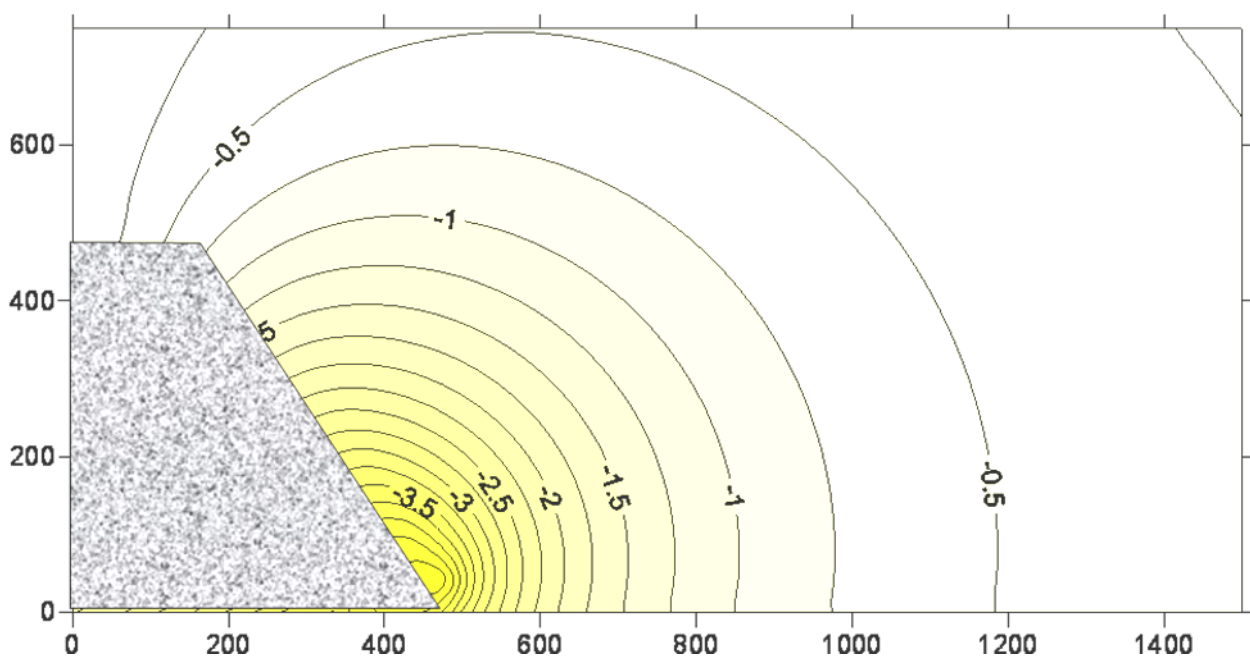
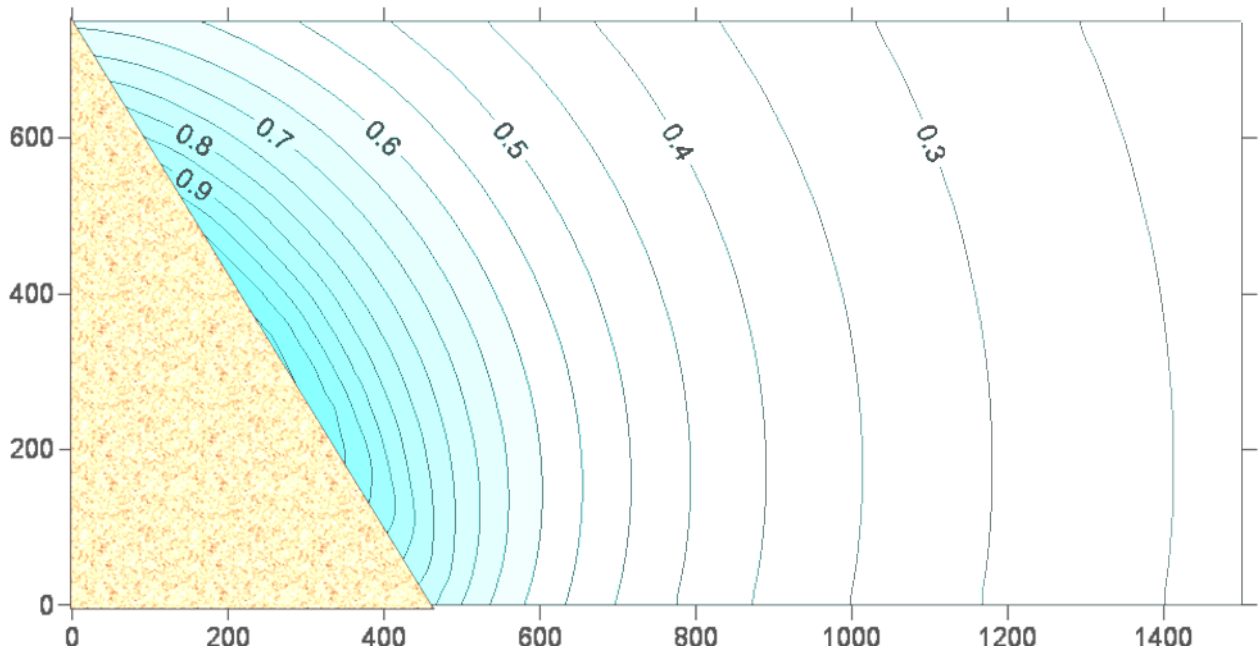
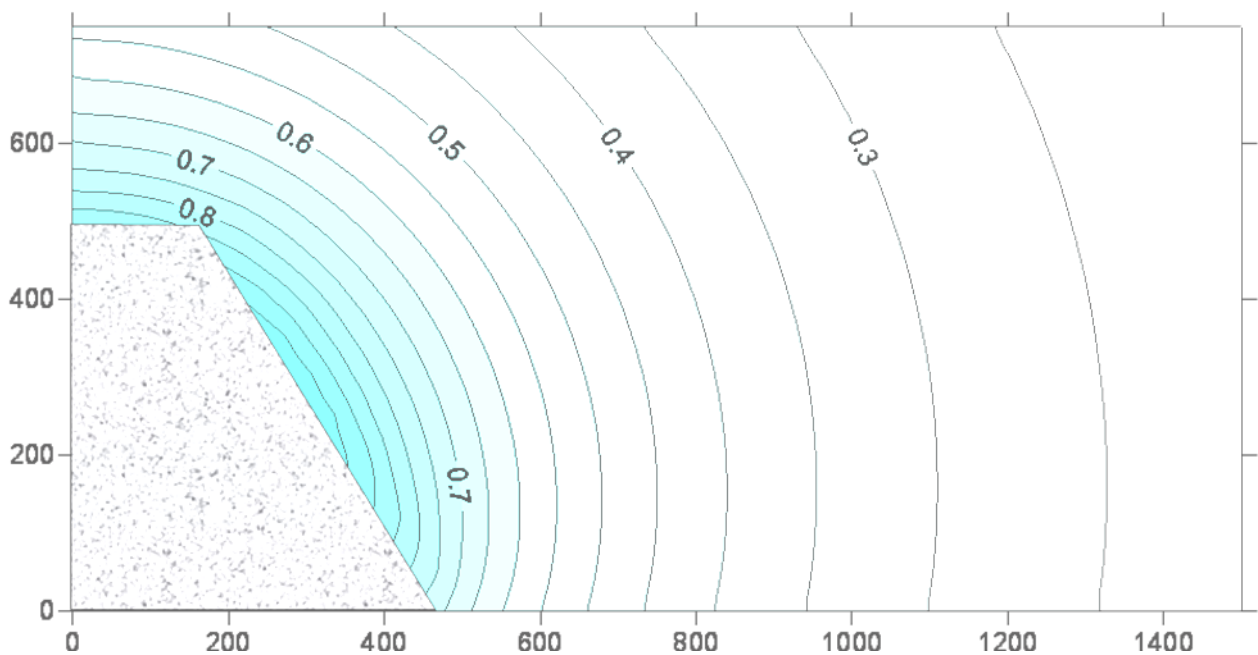


Рисунок Г.2 – Влияние перемещенных гравитирующих масс на уклонения отвесных линий (для усеченного конуса)

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

(справочное)

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕННЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ МАСС НА
АНОМАЛИЮ ВЫСОТЫРисунок Д.1 – Влияние перемещенных гравитирующих масс на аномалию высоты
(для конуса)Рисунок Д.2 – Влияние перемещенных гравитирующих масс на аномалии
высоты (для усеченного конуса)

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

(справочное)

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА НА ПРИМЕРЕ
ПОВЕРХНОСТИ ГОРНЫХ ХРЕБТОВ НА ПОЛУОСТРОВЕ КАМЧАТКА

№	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2	Дано:	X (м)	Y (м)	Z (м)	$\Delta\rho$ (кг/м ³)	G(мЗ/кг*с ²)	Уровеньный потенциал U ₀									
3	P.1	158022	60097	4,47	2630	6,6742E-11	62636861,07									
4	P.2	165375	54809	164,65												
5	P.3	160739	51444	196,15												
6	P.4	155145	50643	28,07												
7	Xp (м)	Yp (м)	Zp (м)	Z2 (м)	Шаг (м)											
8	158022	60097	4,47	-6,5	160											
9																
10	Вычислитель															
11	Xi	Yi	Zi	Xj	Yj	Zj	Z (ср)	Xi'	Yi'	Zi'	Zj'	Z (ср)'	Zp-Zi	Δg	сумма Δg	γ_0
12	154506	49201	2,27	154506	49361	5,28	3,29	-3516	-10896	2,19	-0,81	1,18	1,18	0,00	-0,00000000198	9,8073
13	154666	49201	2,43	154666	49361	3,18	2,81	-3356	-10896	2,04	1,29	1,65	1,65	0,00		
14	154826	49201	2,87	154826	49361	2,78	3,89	-3196	-10896	1,60	1,69	0,58	0,58	0,00		
15	154986	49201	5,35	154986	49361	4,55	5,21	-3036	-10896	-0,88	-0,08	-0,74	-0,74	0,00		
16	155145	49201	5,27	155145	49361	5,67	5,45	-2877	-10896	-0,81	-1,20	-0,98	-0,98	0,00		
17	155305	49201	5,95	155305	49361	4,90	6,11	-2717	-10896	-1,48	-0,44	-1,64	-1,64	0,00		
18	155465	49201	8,56	155465	49361	5,01	8,21	-2557	-10896	-4,09	-0,54	-3,74	-3,74	0,00		
19	155625	49201	12,34	155625	49361	6,92	13,60	-2397	-10896	-7,87	-2,45	-9,13	-9,13	0,00		
20	155785	49201	21,59	155785	49361	13,55	20,32	-2237	-10896	-17,13	-9,08	-15,85	-15,85	0,00		
21	155945	49201	34,40	155945	49361	11,74	27,42	-2077	-10896	-29,93	-7,27	-22,96	-22,96	0,00		
22	156104	49201	45,05	156104	49361	18,51	39,74	-1918	-10896	-40,58	-14,05	-35,28	-35,28	0,00		
23	156264	49201	61,56	156264	49361	33,86	53,07	-1758	-10896	-57,09	-29,39	-48,60	-48,60	0,00		
24	156424	49201	67,29	156424	49361	49,59	65,07	-1598	-10896	-62,82	-45,12	-60,60	-60,60	0,00		
25	156584	49201	80,29	156584	49361	63,12	76,61	-1438	-10896	-75,82	-58,65	-72,15	-72,15	0,00		
26	156744	49201	92,34	156744	49361	70,71	89,03	-1278	-10896	-87,87	-66,24	-84,56	-84,56	0,00		
27	156904	49201	108,43	156904	49361	84,63	103,79	-1118	-10896	-103,96	-80,16	-99,32	-99,32	0,00		
28	157063	49201	121,56	157063	49361	100,55	115,47	-959	-10896	-117,10	-96,08	-111,00	-111,00	0,00		
29	157223	49201	126,33	157223	49361	113,43	126,92	-799	-10896	-121,86	-108,96	-122,45	-122,45	0,00		
30	157383	49201	147,92	157383	49361	120,01	143,75	-639	-10896	-143,45	-115,54	-139,29	-139,29	0,00		
31	157543	49201	165,36	157543	49361	141,74	161,92	-479	-10896	-160,89	-137,27	-157,45	-157,45	0,00		
32	157703	49201	172,96	157703	49361	167,61	169,43	-319	-10896	-168,49	-163,15	-164,96	-164,96	0,00		
33	157863	49201	175,58	157863	49361	161,56	171,23	-159	-10896	-171,11	-157,09	-166,76	-166,76	0,00		
34	158022	49201	178,54	158022	49361	169,22	175,17	0	-10896	-174,07	-164,76	-170,70	-170,70	0,00		
35	158182	49201	176,15	158182	49361	176,77	174,42	160	-10896	-171,68	-172,30	-169,95	-169,95	0,00		
36	158342	49201	165,00	158342	49361	179,77	172,91	320	-10896	-160,53	-175,30	-168,44	-168,44	0,00		
37	158502	49201	163,18	158502	49361	183,67	171,50	480	-10896	-158,71	-179,20	-167,03	-167,03	0,00		

Рисунок Ж.1 – Первая часть вычислительного алгоритма

Эксперимент													
$ V $ (м3)	M (кг)	r (м)	Возмущ. потенц., T (м2/с2)	Сумма T	Общий потенц., U (м2/с2)	Аномалия высоты по ф-ле Брунса, ξ (м)	Аномалия высоты сумма по столбцам, ζ (м)	ξ (рад)	ξ (")	η (рад)	η (")	ξ по столбцам	η по столбцам
30100,72	79164898,38	11348,65	0,00	0,00	62636861,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
42344,96	111367257,71	11301,29	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
14918,47	39235570,89	11255,99	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
19000,36	49970935,72	11212,79	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
25121,92	66070637,12	11171,71	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
41902,61	110203872,48	11132,77	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
95689,55	251663519,65	11096,00	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
233774,99	614828219,40	11061,42	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
405780,69	1067203221,49	11029,04	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
587659,75	1545545141,33	10998,89	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
903058,47	2375043771,60	10970,99	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
1244279,76	3272455776,90	10945,35	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
1551409,38	4080206661,65	10922,00	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
1846919,90	4857399329,24	10900,93	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
2164670,58	5693083628,52	10882,17	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
2542673,92	6687232409,63	10865,73	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
2841589,95	7473381567,99	10851,63	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
3134793,94	8244508064,73	10839,85	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
3565734,73	9377882329,55	10830,43	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
4030665,48	10600650222,14	10823,36	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
4222947,32	11106351443,31	10818,65	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
4268980,42	11227418500,94	10816,29	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
4369993,91	11493083981,32	10816,30	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
4350812,36	11442636513,23	10818,67	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
4311980,34	11340508298,56	10823,40	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
4275956,67	11245766047,10	10830,49	0,00			0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		

Рисунок Ж.2 – Вторая часть вычислительного алгоритма

Итоги эксперимента												
Сводная таблица значений по всем точкам							Сводная таблица значений по всем точкам					
№ точек	Δg (мГал)	ξ (")	η (")	T(м2/с2)	U (м2/с2)	ζ (м)	№ точек	Δg (мГал)	y_0 (мГал)	H (м)	y_0 (мГал) св.в	g (мГал)
P1	0,66	-0,25	0,26	0,18	62636861,26	0,02	P1	0,66	980729,02	4,47	980727,64	980728,30
P2	16,27	0,36	-1,33	0,78	62636861,86	0,08	P2	16,27		164,65	980678,21	980694,48
P3	18,81	1,16	-2,39	0,95	62636862,02	0,10	P3	18,81		196,15	980668,48	980687,29
P4	2,87	-0,87	-0,17	0,24	62636861,31	0,02	P4	2,87		28,07	980720,36	980723,22
для P1	м с2	Гал	мГал									
Δg сумма по всем=	0,00	0,00	0,66									
сумма ξ (сек)	-0,25											
сумма η (сек)	0,26											
T(м2/с2)	0,18											
U (м2/с2)	62636861,26											
ζ (м)	0,02											

Рисунок Ж.3 – Третья часть вычислительного алгоритма

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
7870	163777	61699	-0,67	163777	61859	-0,60	-0,66	8632	11056	28,74	28,67	28,72	28,72	0,00			735329,14
7871	163936	61699	-0,71	163936	61859	-0,64	-0,68	8791	11056	28,78	28,71	28,75	28,75	0,00			735895,94
7872	164096	61699	-0,74	164096	61859	-0,62	-0,68	8951	11056	28,81	28,69	28,74	28,74	0,00			735831,60
7873	164256	61699	-0,72	164256	61859	-0,62	-0,66	9111	11056	28,78	28,69	28,73	28,73	0,00			735426,74
7874	164416	61699	-0,69	164416	61859	-0,61	-0,63	9271	11056	28,75	28,68	28,70	28,70	0,00			734627,56
7875	164576	61699	-0,67	164576	61859	-0,55	-0,66	9431	11056	28,74	28,61	28,73	28,73	0,00			735397,42
7876	164736	61699	-0,85	164736	61859	-0,57	-0,82	9591	11056	28,92	28,64	28,88	28,88	0,00			739445,64
7877	164895	61699	-0,55	164895	61859	-1,30	-0,62	9750	11056	28,62	29,36	28,69	28,69	0,00			734353,16
7878	165055	61699	-0,20	165055	61859	-0,42	-0,47	9910	11056	28,27	28,49	28,54	28,54	0,00			730660,63
7879	165215	61699	-0,49	165215	61859	-0,78	-0,72	10070	11056	28,56	28,85	28,79	28,79	0,00			736980,64
7880	165375	61699	-0,75	165375	61859	-0,87	-0,80	10230	11056	28,81	28,93	28,87	28,87	0,00			739051,88
7881	165535	61699	-0,77	165535	61859	-0,82	-0,74	10390	11056	28,84	28,89	28,81	28,81	0,00			737505,23
7882	165695	61699	-0,67	165695	61859	-0,70	-0,66	10550	11056	28,74	28,77	28,73	28,73	0,00			735470,09
7883	165855	61699	-0,65	165855	61859	-0,62	-0,77	10710	11056	28,72	28,69	28,83	28,83	0,00			738139,49
7884	166014	61699	-0,99	166014	61859	-0,80	-0,84	10869	11056	29,06	28,87	28,91	28,91	0,00			740036,24
7885	166174	61699	-0,80	166174	61859	-0,77	-0,79	11029	11056	28,87	28,84	28,86	28,86	0,00			738818,84
7886	166334	61699	-0,81	166334	61859	-0,78	-0,78	11189	11056	28,88	28,85	28,85	28,85	0,00			738516,70
7887	166494	61699	-0,81	166494	61859	-0,72	-0,74	11349	11056	28,88	28,78	28,81	28,81	0,00			737534,48
7888	166654	61699	-0,75	166654	61859	-0,69	-0,87	11509	11056	28,82	28,76	28,94	28,94	0,00			740913,96
7889	166814	61699	-1,05	166814	61859	-1,01	-1,17	11669	11056	29,11	29,08	29,23	29,23	0,00			748378,65
7890	166973	61699	-1,31	166973	61859	-1,30	-1,33	11828	11056	29,38	29,37	29,39	29,39	0,00			752479,03
7891	167133	61699	-1,28	167133	61859	-1,41	-1,02	11988	11056	29,35	29,48	29,09	29,09	0,00			744576,69
7892	167293	61699	-0,66	167293	61859	-0,72	-0,66	12148	11056	28,73	28,78	28,73	28,73	0,00			735427,98
7893	167453	61699	-0,63	167453	61859	-0,63	-0,56	12308	11056	28,70	28,70	28,63	28,63	0,00			732937,94
7894	167613	61699	-0,26	167613	61859	-0,73	-0,61	12468	11056	28,33	28,79	28,67	28,67	0,00			734079,13
7895	167773	61699	-0,71	167773	61859	-0,73	-0,78	12628	11056	28,78	28,80	28,84	28,84	0,00			738393,53
7896	167932	61699	-0,81	167932	61859	-0,85	-0,61	12787	11056	28,88	28,92	28,68	28,68	0,00			734120,90
7897	168092	61699	-0,37	168092	61859	-0,40	-0,49	12947	11056	28,44	28,47	28,56	28,56	0,00			731206,45
7898	168252	61699	-0,58	168252	61859	-0,62	-0,60	13107	11056	28,65	28,69	28,67	28,67	0,00			733992,37
7899	168412	61699	-0,59	168412	61859	-0,62	-0,69	13267	11056	28,65	28,69	28,75	28,75	0,00			736075,94
7900	168572	61699	-0,75	168572	61859	-0,78	-0,82	13427	11056	28,82	28,85	28,89	28,89	0,00			739585,05
7901	168732	61699	-0,85	168732	61859	-0,91	-0,84	13587	11056	28,92	28,97	28,91	28,91	0,00			740005,80
7902	168891	61699	-0,81	168891	61859	-0,79	-0,81	13746	11056	28,88	28,85	28,88	28,88	0,00			739394,75
7903	169051	61699	-0,83	169051	61859	-0,83	-0,83	13906	11056	28,90	28,90	28,90	28,90	0,00			739736,94
7904	169211	61699	-0,82	169211	61859	-0,83	-0,88	14066	11056	28,89	28,90	28,94	28,94	0,00			740979,35
7905	169371	61699	-0,97	169371	61859	-0,89	-0,89	14226	11056	29,04	28,96	28,96	28,96	0,00			741333,00
7906	169531	61699	-0,83	169531	61859	-0,87	-0,81	14386	11056	28,90	28,94	28,88	28,88	0,00			739354,59
7907	169691	61699	-0,75	169691	61859	-0,80	-0,73	14546	11056	28,82	28,87	28,80	28,80	0,00			737271,24
7908	169850	61699	-0,67	169850	61859	-0,71	-0,44	14705	11056	28,74	28,77	28,51	28,51	0,00			729771,58
7909	170010	61699	-0,24	170010	61859	-0,14	-0,43	14865	11056	28,30	28,21	28,50	28,50	0,00			729578,20
7910	170170	61699	-0,78	170170	61859	-0,57	-0,73	15025	11056	28,85	28,64	28,80	28,80	0,00			737194,07
7911	170330	61699	-0,78	170330	61859	-0,79	-0,39	15185	11056	28,85	28,86	14,43	14,43	0,00			369292,93
7912																	

Рисунок Ж.4 – Четвертая часть вычислительного алгоритма