

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»
(СГУГиТ)

На правах рукописи

Голдобин Денис Николаевич



Разработка методики комплексного определения
характеристик гравитационного поля
по данным глобальных моделей геопотенциала

25.00.32 – Геодезия

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
технических наук

Научный руководитель –
кандидат технических наук, доцент
Канушин Вадим Федорович

Новосибирск – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
1 ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ И МЕТОДЫ ЕГО ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.....	15
1.1 Основные характеристики гравитационного поля Земли.....	15
1.1.1 Сила тяжести и ее потенциал.....	15
1.1.2 Элементы геометрии гравитационного поля	21
1.2 Обзор методов численно-аналитического представления параметров гравитационного поля Земли	31
1.2.1 Представление потенциала притяжения в виде разложения в ряд Фурье по сферическим функциям.....	33
1.2.2 Представление потенциала притяжения с помощью выборочных функций.....	38
1.2.3 Представление потенциала притяжения Земли с помощью потенциала точечной массы	40
1.2.4 Представление потенциала тяготения с помощью вейвлет-преобразования.....	47
Выводы по первому разделу	49
2 СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ.....	50
2.1 Теоретические основы использования методов космической геодезии для изучения гравитационного поля Земли	50
2.2 Выводы гармонических коэффициентов гравитационного потенциала Земли из комбинации наземных гравиметрических и спутниковых данных	56
2.3 Космические гравиметрические миссии CHAMP, GRACE и GOCE	58
2.4 Современные глобальные модели гравитационного поля, полученные с учетом данных космических гравиметрических миссий.....	67

2.5 Оценка погрешности аппроксимации геопотенциала и его дериват, обусловленной ограничением ряда Фурье по системе сферических функций.....	71
2.6 Регуляризирующие свойства стабилизирующего множителя устойчивого суммирования рядов Фурье по системе сферических функций при моделировании гравитационного поля Земли.....	77
2.7 Устойчивые методы суммирования ряда Фурье по системе сферических функций.....	79
2.8 Количественные характеристики точности моделирования глобального гравитационного поля Земли с учетом регуляризирующих множителей	86
2.9 Алгоритм определения разрешающей способности и точности современных глобальных моделей гравитационного поля Земли.....	89
2.10 Оценка разрешающей способности современных моделей глобального гравитационного поля Земли.....	93
Выводы по второму разделу	104
3 МЕТОДИКА КОМПЛЕКСНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ПО ДАННЫМ СОВРЕМЕННЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛА	
3.1 Дифференциальные операции в гравитационном поле	105
3.2 Методы определения уклонений отвесных линий	109
3.3 Методика вычисления составляющих уклонения отвесной линии по данным глобальных моделей геопотенциала.....	118
3.4 Методика вычисления составляющих уклонения отвесной линии в горах по данным глобальных моделей геопотенциала	120
3.5 Программный комплекс, реализующий методику комплексного определения характеристик ГПЗ	126
3.6 Программный комплекс, реализующий методику учета влияния топографических масс на уклонения отвесной линии в горных районах...	134

4 АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ МЕТОДИКИ КОМПЛЕКСНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ	140
4.1 Цифровые модели характеристик гравитационного поля на территории Западной Сибири.....	140
4.2 Анализ точности аномалий силы тяжести, полученных по данным современных глобальных моделей геопотенциала на территории Новосибирской области.....	141
4.3 Анализ точности высот квазигеоида, полученной по данным современных глобальных моделей на территории Новосибирской области	144
4.4 Анализ результатов сравнения уклонений отвесной линии, полученных по данным современных глобальных моделей геопотенциала, с астрономо-геодезическими уклонениями на территории Западной Сибири.....	148
4.5 Анализ результатов сравнения вертикального градиента силы тяжести, полученного по данным глобальной модели геопотенциала, с измеренным вертикальным градиентом	157
4.6 Результаты определения геометрической структуры гравитационного поля на территории Западной Сибири по данным современных глобальных моделей геопотенциала	161
Выводы по четвертому разделу	167
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	168
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	170
ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное) Картограмма аномалий силы тяжести на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (мГал)	185

ПРИЛОЖЕНИЕ Б (обязательное) Картограмма высот квазигеоида на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (м)	186
ПРИЛОЖЕНИЕ В (обязательное) Картограмма уклонов отвесной линии в плоскости первого вертикала на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (угл. с).....	187
ПРИЛОЖЕНИЕ Г (обязательное) Картограмма уклонов отвесной линии в плоскости меридиана на территорию Западной Сиби- ри по данным модели EIGEN-6C4 (угл. с).....	188
ПРИЛОЖЕНИЕ Д (обязательное) Картограмма вертикальной составляющей вектора силы тяжести на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (мГал).....	189
ПРИЛОЖЕНИЕ Е (обязательное) Картограмма горизонтальной составляющей вектора силы тяжести в плоскости меридиана на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (мГал).....	190
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж (обязательное) Картограмма горизонтальной составляющей вектора силы тяжести в плоскости первого вертикала на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (мГал).....	191
ПРИЛОЖЕНИЕ И (обязательное) Картограмма потенциала силы тяжести на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 ($\text{м}^2/\text{с}^2$).....	192
ПРИЛОЖЕНИЕ К (обязательное) Картограмма градиента силы тяжести W_{zz} на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (эТВеш)	193
ПРИЛОЖЕНИЕ Л (обязательное) Картограмма градиента силы тяжести W_{xx} на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (эТВеш)	194

ПРИЛОЖЕНИЕ М (обязательное) Картограмма градиента силы тяжести W_{yy} на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (этвеш).....	195
ПРИЛОЖЕНИЕ Н (обязательное) Картограмма градиента силы тяжести W_{zy} на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (этвеш)	196
ПРИЛОЖЕНИЕ О (обязательное) Картограмма градиента силы тяжести W_{zx} на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (этвеш)	197
ПРИЛОЖЕНИЕ П (обязательное) Картограмма градиента силы тяжести W_{xy} на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (этвеш)	198
ПРИЛОЖЕНИЕ Р (обязательное) Картограмма Гауссовой кривизны уровневой поверхности на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (м).....	199
ПРИЛОЖЕНИЕ С (обязательное) Картограмма кривизны силовой линии в плоскости меридиана на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (м).....	200
ПРИЛОЖЕНИЕ Т (обязательное) Картограмма кривизны силовой линии в плоскости первого вертикала на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (м).....	201

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Определение физической поверхности и гравитационного поля Земли в единой системе координат составляет основную задачу геодезии, для решения которой нужны глобальные гравиметрические данные. В связи с быстро развивающимися технологиями и методами изучения окружающего пространства для решения научных и практических задач в различных отраслях знаний, включая науки о Земле, исследование гравитационного поля Земли (ГПЗ), изучение свойств ГПЗ является актуальной задачей. Результаты таких исследований лежат в основе программ запусков искусственных спутников Земли и развития теорий их движения, используются при разработке космических программ, моделировании геодинамических процессов внутри Земли, исследовании природных ресурсов, а также в океанографии, оборонной отрасли страны, авиационной и морской навигации.

Использование искусственных спутников Земли значительно расширило круг задач физической геодезии. В последние десятилетия появились высокостепенные глобальные модели геопотенциала. Это стало возможно благодаря внедрению новых методов и способов измерений. С одной стороны, в этот период внедрялись различные методы космической геодезии по изучению ГПЗ – такие, как спутниковая альтиметрия, системы «спутник – спутник» (SST-метод, проекты CHAMP, GRACE и др.), спутниковая градиентометрия (SGG-метод, проекты «Аристотель», GOCE и др.), что позволило надежно определять гармонические коэффициенты геопотенциала высокой степени. С другой стороны, в это же время значительно повысилась точность спутниковых и наземных гравиметрических измерений.

В результате были созданы высокостепенные глобальные модели геопотенциала высокого разрешения и точности, параметрами которых являются гармонические коэффициенты разложения в ряд по сферическим функциям. Такие модели применяются в различных областях науки и техники, в том числе в качестве осно-

вы для учета неоднородностей ГПЗ в задачах инженерной геодезии. Глобальные модели геопотенциала, описывающие гравитационное поле Земли в целом, обеспечивают вычисление таких его характеристик, как высоты квазигеоида, отклонения отвесной линии, аномалии силы тяжести, а также компонент тензора силы тяжести, кривизны уровенных поверхностей и силовых линий ГПЗ в любой точке земного шара. Модели геопотенциала могут быть использованы в качестве основы при картографировании и районировании характеристик ГПЗ, создании цифровых моделей этих характеристик для решения прикладных задач геодезии и геологии для региональных геолого-геофизических исследований.

На современном этапе более строго ставится задача изучения структуры гравитационного поля. Детальное изучение аномального гравитационного поля позволяет исследовать и моделировать силы, являющиеся причинами различных геодинамических процессов, повышает возможности поиска и разведки месторождений полезных ископаемых методами гравиметрии, а также коррекции параметров бортовых инерциальных навигационных систем летательных аппаратов.

Высокоточное моделирование характеристик гравитационного поля Земли необходимо для построения национальной координатной системы отсчета и ее связи с глобальной координатной основой, а также для установления единой системы высот. В настоящее время цифровые модели высот квазигеоида отнесены к отдельному блоку системы геодезического обеспечения, отвечающему за распространение спутниковых методов координатных определений на большинство видов работ топографо-геодезического производства. С помощью высот квазигеоида осуществляется связь между геодезическими высотами в геометрической пространственной системе координат и нормальными высотами в гравитационном поле. Кроме определения высот квазигеоида, актуальна задача определения отклонений отвесной линии, характеризующих отступление действительного гравитационного поля Земли от нормального. Составляющие отклонения отвесной линии используются при решении редуционных задач высшей геодезии, установлении связи между астрономическими и геодезическими координатами, а также в инерциальной навигации.

Решение задачи получения детальных высокоточных математических и цифровых моделей характеристик гравитационного поля требует разработки методики комплексного определения характеристик ГПЗ.

Таким образом, разработка методики комплексного определения характеристик гравитационного поля Земли по данным глобальных моделей геопотенциала является актуальной задачей.

Степень разработанности темы. Решению проблемы определения параметров глобального ГПЗ, его математического и цифрового моделирования посвятили свои труды многие отечественные и зарубежные ученые. Концептуальные и теоретические разработки выполнили ученые: Молоденский М. С., Юркина М. И., Еремеев В. Ф., Бровар В. В., Бровар Б. В., Шимбирев Б. П., Юзефович А. П., Пеллинен Л. П., Жонголович И. Д., Бузук В. В., Грушинский Н. П., Машимов М. М., Мещеряков Г. А., Марченко А. Н., Петровская М. С., Холшевников К. В., Нейман Ю. М., Бывшев В. А., Остац О. М., Мазурова Е. М., Непоклонов В. Б., Конешов В. Н., Рапп Р., Вейс Г, Кенлейн В., Чернинг С., Краруп Т., Шварц К., Хейсканен В., Мориц Г., Каула У. М., Бьерхаммар А., Бурша М., Pavlis E. и др. Современные глобальные модели геопотенциала создавались под руководством и при участии ученых: Демьянов Г. В., Liang W., Xu X., Pail R., Fecher T., Ries J., Gilardoni M., Förste C., Bruinsma S. L., Tapley B. D., Pavlis N. К и др.

Благодаря результатам работ этих исследователей в настоящее время существует фундаментальная теоретическая база физической геодезии, получены уникальные модели геопотенциала, внесен большой вклад в развитие космической геодезии, навигации и ГНСС-технологий. Дальнейшее развитие научного направления идет в области уточнения теоретических положений, повышения точности измерений и моделирования, оперативности получаемой информации.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является разработка комплексной методики определения характеристик гравитационного поля по данным глобальных моделей геопотенциала на физической поверхности Земли с оценкой точности по независимым наземным данным.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели требовалось решить следующие задачи:

– выполнить анализ теоретических основ существующих методов моделирования ГПЗ. Исследовать и оценить погрешности аппроксимации для 15 моделей геопотенциала;

– разработать алгоритмы оценки разрешающей способности и точности глобальных моделей геопотенциала на основе спектрального анализа;

– разработать методику и алгоритмы комплексного определения характеристик гравитационного поля на физической поверхности Земли с использованием глобальных моделей геопотенциала;

– разработать методику и алгоритм учета гравитационного влияния топографических масс для уточнения величин уклонения отвесной линии в горной местности, полученных по данным глобальных моделей геопотенциала;

– разработать комплекс компьютерных программ для определения характеристик ГПЗ по данным глобальных моделей геопотенциала. С помощью разработанного комплекса построить цифровые модели характеристик ГПЗ на территорию Западной Сибири;

– выполнить исследование методики комплексного определения характеристик ГПЗ и произвести оценку точности по независимым наземным данным.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является гравитационное поле Земли, представляемое глобальными моделями геопотенциала.

Предметом исследования является методика комплексного определения характеристик гравитационного поля по данным глобальных моделей геопотенциала.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

– разработана методика комплексного определения характеристик ГПЗ в заданной точке пространства по набору гармонических коэффициентов глобальных моделей геопотенциала, в которой для выбора модели геопотенциала выполняется оценка ее разрешающей способности и точности аппроксимации.

В отличие от существующих математических моделей, при получении производных геопотенциала силы тяжести центробежный потенциал учитывается как отдельный параметр, что значительно упрощает получение самих производных геопотенциала на поверхности Земли, позволяет выполнять оценку их точности, сокращает вычислительные затраты, а также повышает универсальность методики, позволяя применять ее в любой заданной точке пространства;

– на основе построения трехмерной модели топографических масс и вычисления отклонения отвесной линии от каждого элемента модели разработана методика учета гравитационного влияния этих масс на отклонения отвесной линии в ближней зоне в горных районах. Особенностью методики является автоматическое определение радиуса учитываемой области при заданной плотности горных пород, что позволяет повысить точность определения модельных отклонений отвесной линии в горах;

– впервые выполнены исследования глобальных моделей геопотенциала на территории Западной Сибири с целью оценки возможности их применения для создания региональных цифровых моделей характеристик ГПЗ на основе разработанной методики комплексного определения характеристик гравитационного поля по данным глобальных моделей геопотенциала.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость исследования заключается в разработке теоретических основ алгоритмов синтеза потенциала силы тяжести и его производных (первого и второго порядка) по набору нормированных гармонических коэффициентов геопотенциала в сферической (глобальной) и прямоугольной (локальной) системах координат, обеспечивающих комплексное определение характеристик ГПЗ в заданной точке пространства.

Разработан алгоритм учета гравитационного влияния топографических масс на отклонения отвесной линии в ближней зоне в горных районах, позволяющий определять радиус учитываемой области при заданной плотности горных пород, что обеспечило повышение точности определения отклонений отвесной линии.

Практическая значимость работы состоит в оперативности получения необходимой информации о гравитационном поле в цифровом виде в любой точке земного шара и околоземного пространства с оценкой точности. Эта информация, совместно с геодезическими данными, может использоваться для решения задач, связанных с изучением строения, фигуры и размеров Земли, в реальном времени, а также для создания глобальных и региональных цифровых моделей характеристик ГПЗ в трехмерном пространстве. Разработан комплекс программ, реализующих процесс комплексного определения всех характеристик ГПЗ по данным современных глобальных моделей геопотенциала. Разработанный алгоритм учета гравитационного влияния топографических масс позволяет повысить точность комплексного определения характеристик ГПЗ по глобальным моделям геопотенциала в горных районах.

Методология и методы исследования. В качестве методологической основы научного исследования использованы методы математического моделирования и методы решения задач физической геодезии, в том числе применен метод гармонического анализа и синтеза поля по системе сферических и шаровых функций с помощью ряда Фурье. В качестве математической основы для решения поставленных задач применены методы вычислительной математики, математического анализа, математической статистики и теории вероятности. Эмпирической основой служили гармонические коэффициенты глобальных моделей геопотенциала и результаты независимых наземных измерений характеристик гравитационного поля.

Положения, выносимые на защиту:

– методика и алгоритмы комплексного определения характеристик гравитационного поля в заданной точке пространства по данным глобальных моделей геопотенциала;

– методика и алгоритмы учета влияния топографических масс на отклонения отвесной линии в ближней зоне в горных районах на основе трехмерного моделирования рельефа.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Диссертация соответствует областям исследования: 1 – Определение параметров земного эллипсоида, геоида и гравитационного поля Земли, изменение их в пространстве и во времени; 11 – Теория и практика математической обработки результатов геодезических измерений и информационное обеспечение геодезических работ. Автоматизированные технологии создания цифровых трехмерных моделей технологических объектов, процессов и явлений по геодезическим данным паспорта научной специальности 25.00.32 – Геодезия, разработанного экспертным советом ВАК Минобрнауки России.

Степень достоверности и апробация результатов исследований. Результаты выполненных исследований представлены:

- на международных научных конгрессах «Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2014» (18–22 апреля 2014 г., Новосибирск) и «Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2018» (25–27 апреля 2018 г., Новосибирск);
- Генеральной ассамблее Европейского геофизического союза «EGU-2015» (12–17 апреля 2015 г., Вена, Австрия);
- Генеральной ассамблее Международного Союза Геодезии и Геофизики «IUGG-2015» (22 июня – 2 июля 2015 г., Прага, Чехия);
- Национальной научно-практической конференции «Регулирование земельно-имущественных отношений в России: правовое и информационное обеспечение, оценка недвижимости, экология, технологические решения» (7–8 декабря 2017 г., Новосибирск).

Исследования выполнены в рамках гранта Российского научного фонда 14-27-00068: «Разработка фундаментальной теории, методов и алгоритмов координатно-временного и навигационного обеспечения для решения приоритетных государственных задач геодезии и дистанционного зондирования с учетом классических и релятивистских эффектов гравитационного поля Земли и других массивных тел Солнечной системы».

Результаты исследований внедрены в научную деятельность Федерального научно-технического центра геодезии, картографии и инфраструктуры пространственных данных и в учебный процесс Сибирского государственного университета геосистем и технологий (кафедра космической и физической геодезии) при обучении бакалавров направления подготовки 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование, профиль «Геодезия».

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований представлены в 17 научных работах, 4 из которых опубликованы в изданиях, входящих в перечень российских рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ, 5 работ опубликованы в изданиях, входящих в международную реферативную базу данных и систему цитирования Scopus.

Структура диссертации. Общий объем диссертации составляет 201 страницу машинописного текста. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка литературы, включающего 134 наименования, содержит 19 таблиц, 49 рисунков и 17 приложений.

1 ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ И МЕТОДЫ ЕГО ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1.1 Основные характеристики гравитационного поля Земли

Гравитационное поле Земли может быть охарактеризовано различными физическими величинами: потенциалом силы тяжести, производными этого потенциала (ускорением силы тяжести, составляющими ускорения силы тяжести по направлениям координатных осей, градиентами этих ускорений, отклонениями от весной линии), а также высотами геоида и эквипотенциальных поверхностей.

1.1.1 Сила тяжести и ее потенциал

Сила тяжести – векторная физическая величина, характеризующая гравитационное поле в данной точке и численно равная ускорению силы тяжести \vec{g} , действующему на единичную массу, помещенную в данную точку поля.

Ускорение силы тяжести \vec{g} обусловлено суммарным влиянием ускорения силы тяготения масс Земли \vec{F} , центробежной силы \vec{P} , вызванной ее суточным вращением, и эффектом сжатия Земли, притяжением масс Луны $\vec{\Phi}_л$ и Солнца $\vec{\Phi}_с$, притяжением масс земной атмосферы $\vec{\Phi}_{атм}$, небесных тел $\vec{\Phi}_{пл}$, эффектом вариации угловой скорости вращения Земли и другими эффектами

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{\Phi}_л + \vec{\Phi}_с + \vec{\Phi}_{атм} + \vec{\Phi}_{пл} + \vec{\Phi}_{мв}, \quad (1)$$

где \vec{F} – вектор ускорения силы тяготения;

\vec{P} – вектор центробежной силы;

$\vec{\Phi}_с$, $\vec{\Phi}_л$ – векторы притяжения масс Солнца, Луны;

$\vec{\Phi}_{атм}$ – вектор притяжения масс земной атмосферы;

$\vec{\Phi}_{пл}$ – вектор притяжения масс планет;

$\vec{\Phi}_{мв}$ – вектор притяжения масс Вселенной.

В таблице 1 приведены характеристики поля силы тяжести [21].

Таблица 1 – Характеристики поля силы тяжести

Характеристика поля силы тяжести	Значение, м/с ²
1 Среднее значение g на поверхности Земли	9,797
2 Полное изменение g от полюса к экватору	$5,200 \cdot 10^{-02}$
3 Изменение g за счет центробежной силы	$3,400 \cdot 10^{-02}$
4 за счет полярного сжатия	$1,800 \cdot 10^{-02}$
5 Максимальные аномалии силы тяжести	$6,000 \cdot 10^{-03}$
6 Изменение g при перемещении по высоте на 1 км	$3,000 \cdot 10^{-03}$
7 Изменение g за счет эффекта Этвеша (средние широты)	$3,000 \cdot 10^{-03}$
8 для атмосферных движений	$5,000 \cdot 10^{-04}$
9 для океанических течений	$5,000 \cdot 10^{-05}$
10 Влияние атмосферы Земли	$9,000 \cdot 10^{-06}$
11 Амплитуда лунных возмущений	$1,650 \cdot 10^{-06}$
12 Амплитуда солнечных возмущений	$7,600 \cdot 10^{-07}$
13 Вариации угловой скорости вращения Земли	$6,000 \cdot 10^{-07}$
14 Годовое перемещение центра масс Земли	$1,000 \cdot 10^{-07}$
15 Упругие деформации Земли	$2,000 \cdot 10^{-08}$
16 Глобальные перемещения атмосферных масс	$1,300 \cdot 10^{-08}$
17 Сезонные изменения уровня Мирового океана	$6,000 \cdot 10^{-09}$
18 Перестройка земной коры	$1,000 \cdot 10^{-10}$

Приведенные в таблице 1 характеристики, начиная с номера 7, зависят от времени, следовательно, векторное поле силы тяжести \vec{g} зависит от времени и координат той точки пространства, где выполняются измерения ускорения силы тяжести, и представляет собой функцию четырех переменных

$$\vec{g} = \vec{g}(X, Y, Z, t), \quad (2)$$

где X, Y, Z – геоцентрические декартовы координаты;

t – время.

Начало геоцентрической декартовой системы координат $X Y Z$ совмещено с центром масс Земли с 1988 г. с ошибкой 0,5 м, а направление осей – с ошибкой 0,001" [87].

Ось Z направлена параллельно средней оси вращения Земли. Ось X – в плоскости среднего гринвичского меридиана, а ось Y дополняет систему координат до правой [87].

Так как влияние притяжения масс Луны и Солнца на значение силы тяжести учитывается путем введения соответствующих поправок, а влияние других эффектов, приведенных в таблице 1, находится на уровне погрешности измерений ускорения силы тяжести, то вектор силы тяжести можно рассматривать как сумму двух сил

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{P}. \quad (3)$$

На рисунке 1 приведены векторы ускорения силы тяжести \vec{g} , ускорения силы тяготения масс Земли \vec{F} , центробежной силы \vec{P} .

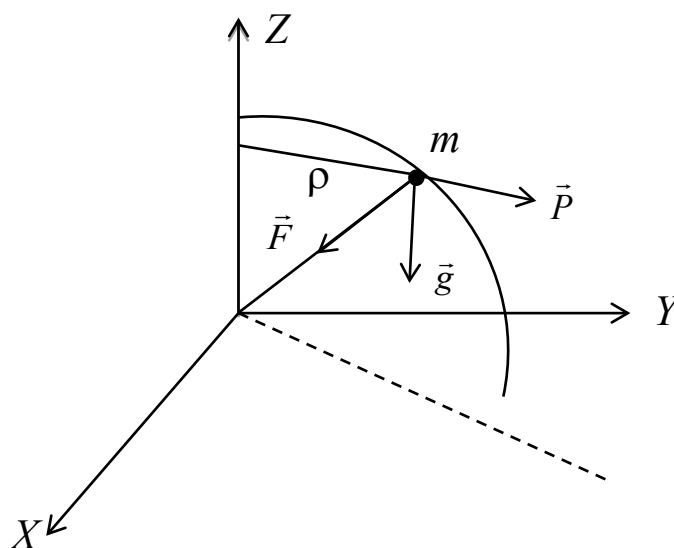


Рисунок 1 – Векторы ускорения силы тяжести \vec{g} , ускорения силы тяготения масс Земли \vec{F} , центробежной силы \vec{P}

Для вектора ускорения силы тяготения \vec{F} и вектора центробежной силы \vec{P} справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \text{grad } V_{\tau}; \\ \vec{P} &= \text{grad } Q,\end{aligned}\tag{4}$$

где V_{τ} – потенциал силы тяготения;

Q – потенциал центробежной силы.

Подставив выражения (4) в формулу (3), получим

$$\vec{g} = \text{grad } V_{\tau} + \text{grad } Q = \text{grad}(V_{\tau} + Q).\tag{5}$$

В формуле (5) сумма скалярных величин V_{τ} и Q , характеризующих потенциалы притяжения и центробежной силы, представляет собой потенциал силы тяжести на поверхности вращающейся Земли

$$W(X, Y, Z) = V_{\tau}(X, Y, Z) + Q(X, Y).\tag{6}$$

Размерность потенциала $[W] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$.

Для всей Земли потенциал силы тяготения $V_{\tau}(X, Y, Z)$ выражается тройным интегралом по объему τ . Под τ обычно подразумевают объем всех твердых и жидких масс Земли. Притяжение небесных тел, влияние масс атмосферы, эффекты неприливного техногенного геогенного характера учитываются (при необходимости) введением поправок, которые имеют порядок 10^{-6} [49]. Будем считать далее Землю без атмосферы и является абсолютно жестким телом.

Потенциал притяжения Земли описывается фундаментальным соотношением

$$V(X, Y, Z)_\tau = f \iiint_\tau \frac{\delta(a, b, c) d\tau}{r}, \quad (7)$$

где $f = (6\,672,59 \pm 0,30) \cdot 10^{-14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$ – гравитационная постоянная;

τ – объем Земли;

$d\tau$ – элементарный объем;

r – геоцентрическое расстояние элементарной массы $dm = \delta(a, b, c) \cdot d\tau$ от притягиваемой точки $P(X, Y, Z)$;

$\delta(a, b, c)$ – объемная плотность распределения масс в объеме τ . Этот потенциал обладает следующими свойствами:

- 1) потенциал V и его первые производные – однозначные, непрерывные и конечные функции координат (X, Y, Z) притягиваемой точки вне притягивающих масс;
- 2) потенциал V и его первые производные регулярны на бесконечности, т. е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} Vr = fM;$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial V}{\partial X} r^2 \right| = fM; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial V}{\partial Y} r^2 \right| = fM;$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial V}{\partial Z} r^2 \right| = fM; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial V}{\partial r} r \right| = 0;$$

- 3) потенциал V во внешнем относительно поверхности Земли пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0. \quad (8)$$

Решения этого уравнения являются гармоническими функциями.

Потенциал центробежной силы имеет вид

$$Q(X, Y) = \left(\frac{\omega^2}{2} \right) (X^2 + Y^2). \quad (9)$$

где $\omega = 0,729\,211\,514\,7 \cdot 10^{-4}$ рад \cdot с $^{-1}$ [64] – угловая скорость вращения Земли. Этот потенциал используется только на поверхности Земли, внутри нее и иногда в непосредственной близости от нее.

Этот потенциал на экваторе $Q = \max$, где $X = Y = a$ и $Q = 0$ на полюсах, где $X = Y = 0$.

Подставляя в формулы (4), выражения (7) и (9), получим полный потенциал силы тяжести

$$W(X, Y, Z) = f \iiint_{\tau} \delta(a, b, c) \frac{d\tau}{r} + \frac{\omega^2}{2} (X^2 + Y^2). \quad (10)$$

Очевидно, что потенциал силы тяжести определяется только для поверхности Земли, вращающееся с угловой скоростью ω вокруг оси Z .

С помощью частных производных первого порядка от потенциала силы тяжести по координатным осям X, Y, Z задается вектор ускорения силы тяжести

$$g = \text{grad} W = \begin{vmatrix} g_X \\ g_Y \\ g_Z \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Модуль вектора ускорения силы тяжести и его направление определяются из соотношений

$$g = \sqrt{g_X^2 + g_Y^2 + g_Z^2}; \quad (12)$$

$$\cos(g, X) = \frac{g_X}{g}; \cos(g, Y) = \frac{g_Y}{g}; \cos(g, Z) = \frac{g_Z}{g}. \quad (13)$$

Линия, касательная к которой направлена по вектору ускорения силы тяжести \vec{g} , является отвесной линией в данной точке.

Следует отметить такие свойства потенциала силы тяжести $W(X, Y, Z)$, как непрерывность, непрерывность его первых производных и разрыв непрерывности у вторых производных там, где плотность меняется скачком.

Выражение (10) для вычисления потенциала силы тяжести практически не применяется, так как непосредственное интегрирование в формуле (7) невозможно, поскольку неизвестно распределение масс в теле Земли и неизвестна точная форма области τ . Потенциал центробежной силы Q не зависит от формы области τ и распределения в ней масс и может быть вычислен на любой точке земной поверхности.

1.1.2 Элементы геометрии гравитационного поля

Геометрически гравитационное поле Земли можно представить уровнями поверхностями

$$W(\vec{r}) = C, \quad (14)$$

где \vec{r} – геоцентрический радиус-вектор положения точки во внешнем пространстве.

Различным значениям постоянной C соответствуют различные уровневые поверхности, которые заполняют внешнее пространство, нигде не пересекаясь. Причем одна из таких поверхностей, которая при некотором значении C наиболее близка к среднему уровню Мирового океана и проходит через нуль футштока, названа геоидом.

Если введем локальную декартову топоцентрическую систему координат (xyz) с началом в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, и если плоскость xu является касательной плоскостью в начальной точке к уровневой поверхности, проходящей через эту

точку, а ось z направлена по отвесной линии, то в окрестности точки $P(x_0, y_0, z_0)$ потенциал силы тяжести $W(P)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням x , y и z , который имеет вид

$$W(x, y, z) = W(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} + \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{2} \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

В формуле (15) обозначены через W_x , W_y , W_z частные производные первого порядка, а через W_{xx} , W_{yy} , W_{zz} , W_{xy} , W_{xz} , W_{yx} , W_{yz} , W_{zx} , W_{zy} – частные производные второго порядка от потенциала силы тяжести по соответствующим координатам. Эти производные применяются при решении задач геологоразведки, высшей и прикладной геодезии, космической геодезии и инерциальной навигации. Они устанавливают связь поля силы тяжести и геометрии пространства, находящей свое отражение в свойствах матрицы-тензора градиентов силы тяжести

$$\begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Каждый из элементов матрицы (16) характеризует особенности геометрии уровенных поверхностей и силовых линий гравитационного поля и содержит необходимые детальные сведения о структуре внешнего гравитационного поля [31]. Определение элементов матрицы (16) позволяет определить истинную фигуру Земли.

В настоящей работе единицей измерения первых производных принята величина $10^{-5} \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$, а для вторых производных принята величина $10^{-9} \text{ с}^{-2} = 1 \text{ Этвеш} = 1 \text{ Э}$.

Отбрасывая в уравнении (15) квадратичную форму и выбирая направление местной системы (xyz) так, чтобы ось P_x была направлена на север, ось P_y – на восток, а ось P_z совпала бы с вектором силы тяжести g , будем иметь $W_x = W_y = 0$, $W_z = g$. В этом случае получим уравнение касательной плоскости в следующем виде:

$$C_0 = g(z - z_0). \quad (17)$$

Благодаря выбору координатных осей имеем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, и учитывая, что $W_{xy} = W_{yx}$, $W_{xz} = W_{zx}$, $W_{yz} = W_{zy}$, выражение (15) можно записать в следующем виде:

$$gz = \frac{1}{2}(W_{xx}x^2 + W_{xy}xy + W_{yy}y^2) + (W_{xz}xz + W_{yz}zy) + \frac{1}{2}W_{zz}z^2 + \dots \quad (18)$$

Решая это уравнение относительно z , получим уравнение уровенной поверхности в точке $P(x_0, y_0, z_0)$

$$z = -\frac{1}{2g}(W_{xx}x^2 + 2W_{xy}xy + W_{yy}y^2) + \dots \quad (19)$$

Вторые производные W_{xx} , W_{yy} , W_{zz} в (20) являются градиентами кривизны уровенной поверхности и определяют форму этой поверхности в данной точке $P(x_0, y_0, z_0)$. Уровенные поверхности поля силы тяжести имеют сложную форму, а их кривизна различна в разных точках одной и той же поверхности и в каждой точке поверхности кривизна различна в разных направлениях, так что в трехмерном пространстве через данную точку можно провести бесконечное число сече-

ний, и каждое со своей кривизной. Причем максимальная и минимальная кривизна всегда принадлежит перпендикулярным сечениям [13].

Кривизна нормального сечения уровенной поверхности в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, плоскость которого составляет с плоскостью xu угол A , имеет следующий вид [20]:

$$\frac{1}{K_A} = -\frac{1}{g} (W_{xx} \cos^2 A + W_{xy} \sin 2A + W_{yy} \sin^2 A). \quad (20)$$

Для определения главных нормальных сечений, у которых кривизна $\frac{1}{K_A}$ является максимальной или минимальной, решается следующее уравнение:

$$\frac{\partial (K_A)^{-1}}{\partial A} = 0. \quad (21)$$

В результате находим

$$-W_{xx} \sin 2A_0 + 2W_{xy} \cos 2A_0 + W_{yy} \sin 2A_0 = 0.$$

Отсюда получим выражение для вычисления углов A_0 и $A_0 + \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg} 2A_0 = -\frac{2W_{xy}}{-W_{xx} + W_{yy}}. \quad (22)$$

Значение кривизны, вычисленное с помощью выражения (21) при подстановке угла A_0 , имеет вид

$$\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{g} (W_{xx} \cos^2 A_0 + W_{xy} \sin 2A_0 + W_{yy} \sin^2 A_0), \quad (23)$$

а при подстановке угла $A_0 + \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{g} (W_{xx} \sin^2 A_0 + W_{xy} \sin 2A_0 + W_{yy} \cos^2 A_0). \quad (24)$$

Суммируя выражения (24) и (25), получим формулу для средней кривизны

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) = -\frac{1}{2g} (W_{xx} + W_{yy}). \quad (25)$$

Радиус K средней кривизны уровенной поверхности в данной точке находим как

$$K = -\frac{2g}{W_{xx} + W_{yy}}. \quad (26)$$

Вычислив дивергенцию от градиента потенциала силы тяжести, получим следующее равенство для внешнего пространства:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} W) = (W_x, W_y, W_z) \cdot \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega^2, \quad (27)$$

где ω – угловая скорость вращения Земли.

Используя равенство (27), можно получить значение производной W_{zz} как

$$W_{zz} = 2\omega^2 - (W_{xx} + W_{yy}). \quad (28)$$

Эта производная (28) отражает изменение силы тяжести вдоль вертикальной оси и потому носит название вертикального градиента.

После подстановки выражения (28) в формулу (26) получим

$$K = -\frac{2g}{2\omega^2 + W_{zz}}. \quad (29)$$

Так как горизонтальная плоскость (17) представляет собой плоскость, касательную к уровенной поверхности в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, то вторые производные W_{xz} и W_{yz} характеризуют изменения силы тяжести в горизонтальной плоскости по направлениям: оси Px на север (в плоскости географического меридиана) и оси Py – на восток (в плоскости первого вертикала). Модуль вектора полного горизонтального градиента, который совпадает с направлением максимального изменения силы тяжести в плоскости горизонта, равен

$$G = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2}. \quad (30)$$

Радиусы кривизны проекции силовой линии R_x и R_y на плоскости xz и yz соответственно можно получить по следующим формулам:

$$R_x = \frac{g}{W_{xz}}; \quad R_y = \frac{g}{W_{yz}}. \quad (31)$$

Если в формуле (21) принять $A = 0^\circ$, и $A = 90^\circ$, то получим формулы для вычисления радиуса кривизны сечения эквипотенциальной поверхности в плоскостях географического меридиана K_M и первого вертикала K_N соответственно

$$K_M = -\frac{g}{W_{xx}}; \quad K_N = -\frac{g}{W_{yy}}. \quad (32)$$

Из курса дифференциальной геометрии [67] известно, что из комбинации минимальной и максимальной кривизны $\frac{1}{K_A}$ уровенной поверхности

определяется средняя кривизна $\frac{1}{K}$ по формуле (26) и полная (гауссова) кривизна как

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{K_1 K_2} = \frac{1}{g^2} (W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2). \quad (33)$$

Гауссова кривизна показывает, какую форму имеет уровенная поверхность в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, является ли она локально эллиптической, гиперболической или параболической (т. е. гауссова кривизна положительна, отрицательна или равна нулю). Если гауссова кривизна равна нулю, то уровенная поверхность может быть развернута в плоскость [107, 36]. Для измерения вторых производных гравитационного потенциала служат гравитационные вариометры и градиентометры [11]. Основным чувствительным элементом вариометров и градиентометров служат крутильные весы, представляющие собой коромысло с равными грузами на концах, подвешенное на упругой нити. В работе [50] отмечено, что с помощью вариометров можно получать значения вторых производных $W_{xx} - W_{yy}$, W_{xy} , W_{xz} , W_{yz} , с погрешностью 1–3 Е в равнинных районах и с погрешностью более 10 Е из-за неточного учета влияния топографических масс. Однако эти приборы имеют крупные размеры и требуют значительного времени для подготовки к наблюдениям (около 6 часов) и их обработке. С появлением в последнее десятилетие высокоточных гравиметров и сверхпроводящего гравитационного градиентометра полевое использование вариометров перестало быть актуальным. В таблице 2 приведены результаты измерений на бетонных постаментах различных станций горизонтального градиента силы тяжести $W_{S_z} \frac{\delta g}{\Delta S}$ с помощью гравиметров ГНУ-КВ. Измерения приращения силы тяжести δg на каждой станции выполнялись между диаметрально разнесенными в горизонтальных направлениях двумя точками на постаменте на расстояние ΔS в пределах от 0,435 до 0,570 м. Количество серий измере-

ний разности δg и ΔS на каждом постаменте равно четырем. Среднеквадратические значения ошибок измерения δg в среднем составили $10 \cdot 10^{-8} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Таблица 2 – Результаты измерений горизонтального градиента силы тяжести

Название станции	W_{Sz} , 10^{-9} с^{-2}	Погрешность измерения W_{Sz} , 10^{-9} с^{-2}	Нормальное значение $U_{Sz} = 8,1 \sin 2\varphi$, 10^{-9} с^{-2}	Аномальное значение $W_{Sz} U_{Sz}$, 10^{-9} с^{-2}
Иркутск	15,0	3,35	7,8	7,2
Боровое	9,7	5,0	7,6	1,9
Якутск	4,2	–	6,7	–2,5
Ключи	13,4	2,8	7,6	5,8
Елизово	9,2	2,6	7,8	1,4

Приведенные в таблице 2 значения горизонтальных градиентов силы тяжести, измеренные на различных станциях у поверхности Земли, отличаются от их нормальных значений. Причиной может быть сильное влияние притяжения близрасположенных аномальных масс (влияние постаumenta гравиметрического пункта, стен вокруг этого пункта и т. д.). Вторые производные потенциала силы тяжести обратно пропорциональны кубу расстояния от притягивающих масс, причем это влияние обычно быстро убывает с увеличением расстояния. Если увеличивать расстояние ΔS между точками на каком-либо участке местности при условии, что гравитационное поле имеет спокойный характер, отсутствуют топографические массы и что отклонение от среднего градиента на этом участке не превышает 1–2 Е, то можно повысить точность определения горизонтального градиента. Но в этом случае перечисленные условия соответствуют эффекту сглаживания реального гравитационного поля, при котором ослабляется интенсивность приповерхностных аномальных масс.

На девяти пунктах, входящих в государственную гравиметрическую сеть (ГФГС и 1-го класса) России в 1992–1993 гг., были выполнены измерения абсолютных значений силы тяжести баллистическим гравиметром (ГБЛ). Для реду-

цирования измеренной силы тяжести на уровень марки определялась величина вертикального градиента силы тяжести над центром пункта, который вычислялся по формуле [10]

$$\frac{\Delta g}{\Delta H} = W_{zz}, \quad (34)$$

где Δg и ΔH – приращения силы тяжести и высоты между уровнями измерений.

В работе [38] приведены методика и результаты измерений Δg и ΔH , вычислений W_{zz} и оценка их точности.

Измерения были выполнены тремя высокоточными гравиметрами типа ГНУ-К: двумя сверхзукдиапазонными и одним 1-го класса. Для выполнения измерений гравиметром на разных высотах был использован штатив, который позволял устанавливать гравиметр на трех уровнях: 0,6; 1,0; 1,3 м над маркой. На каждом уровне выполнялось по 10 определений Δg по схеме А-Б-А. Погрешность среднего $M_{\Delta g}$ составила менее 3 мкГал.

Разности между измеренными и нормальными значениями вертикального градиента силы тяжести, приведенные в таблице 3, получены по формуле

$$\Delta W_{zz} = W_{zz} - U_{zz},$$

где $U_{zz} = 0,3086$ мГал/м – нормальный вертикальный градиент силы тяжести.

Из таблицы 3 видно, что измеренные в различных пунктах значения вертикального градиента W_{zz} значительно отличаются между собой и относительно нормального градиента $U_{zz} = 3086$ Э. Максимальное расхождение ΔW_{zz} равно 1124 Э, что составляет 36,4%. Отличия измеренных значений вертикального градиента от нормального обусловлены притяжением близ поверхностных возмущающих масс с аномальной плотностью, отличной от средней для земной коры, а также крупных инженерных сооружений в окрестности станции наблюдения.

Таблица 3 – Результаты определений вертикального градиента силы тяжести W_{zz} с помощью гравиметров и разности ΔW_{zz}

Название станции, номера пунктов	Вертикальный градиент W_{zz} , мГал/м	Разность ΔW_{zz} , мГал/м
г.Новосибирск, СГГА	0,2860	0,02260
п. Шебалино, Алтайский край	0,2970	0,0116
Боровое, НСО	0,32777	0,01917
Ключи, НСО	0,30417	0,00443
Елизово	0,271733	0,036867
Красноярск	0,327733	0,019133
Иркутск № 1	0,3197	0,0111
Иркутск, № 2	0,32393	0,01533
Якутск, № 1	0,315667	0,00707
Якутск, № 2	0,31547	0,00687
Олекминск	0,31607	0,00747
Токио	0,3049	0,0037
Нью-Йорк	0,3100	0,0014
Польша, морской маяк	0,3293	0,0207
ФРГ	0,4210	0,1124
Воронеж	0,2400	0,0686

По величине вертикальный градиент силы тяжести превосходит остальные вторые производные потенциала силы тяжести, поэтому для его определения с погрешностью в 1 Э необходимо измерять ускорение силы тяжести с ошибкой $1 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-2}$. Как отмечено в работах [87, 9], с увеличением высоты разность между измеренным и нормальным вертикальным градиентом убывает. Это связано с ослаблением влияния короткопериодических топографических эффектов и близ поверхностных аномальных масс. Аналогичный эффект наблюдается при вычислении сглаженного вертикального градиента по результатам региональных гравиметрических съемок или с помощью разложения вертикального градиента в ряд по сферическим функциям.

1.2 Обзор методов численно-аналитического представления параметров гравитационного поля Земли

При описании потенциала притяжения Земли и планет наиболее удобно использовать бесконечные ряды того или иного вида. Практически число членов ряда всегда ограничивают. Это обусловлено конкретной постановкой задачи, возможностями вычислительного характера, а также распределением как на поверхности Земли, так и вне ее исходной информации. Одним из широко применяемых способов разложения потенциала притяжения планеты и его производных в бесконечный ряд является классическое разложение по сферическим функциям. Для сферы сферические функции являются собственными функциями, и их применение объясняется близостью поверхностей Земли и планет к сферической поверхности. Кроме того, представление потенциала притяжения с помощью разложения по сферическим функциям достаточно простое, его численно-аналитическое выражение можно использовать в различных преобразованиях для исследований глобальных особенностей структуры гравитационного поля и для построения аналитической и численной теорий движения космического аппарата (КА) в околопланетном пространстве. Однако оно имеет существенный недостаток – медленная сходимость ряда из-за медленного убывания коэффициентов разложения. Причем разложение в ряд сферических функций описывает гравитационное поле в среднем по всей Земле. Но, если в гравитационном поле имеется хотя бы одна локальная аномалия, амплитуда которой значительно отличается от средних, то для отражения ее с помощью разложения по сферическим необходимо учесть в ряде большое число гармоник [69].

Таким образом, для адекватного представления высокочастотной части гравитационного поля необходимо учитывать большое количество членов в разложении по сферическим функциям, что порождает трудности при обработке исходной информации, используемой для построения модели гравитационного поля. Это обстоятельство привело к многочисленным поискам других методов представления

гравитационного потенциала и его производных. К настоящему времени для описания гравитационного потенциала и его производных разработаны методы представления потенциала в виде потенциала совокупности точечных масс и гравитирующих дисков. Однако для адекватного представления высокочастотной части гравитационного поля необходимо учитывать большое количество членов ряда, что порождает трудности при обработке исходной информации, используемой для построения модели гравитационного поля. Это обстоятельство привело к многочисленным исследованиям, направленным на поиски других возможных вариантов представлений поля тяготения планеты. Широко применяются методы представления потенциала в виде потенциала совокупности точечных масс и гравитирующих дисков. При описании гравитационного потенциала используются также некоторые модификации сферических функций – выборочные функции, функции Ламе, полиномы Чебышева – Лагера, простой слой, локальные аппроксимации по методу конечных элементов, среднюю квадратическую коллокацию, вейвлет-преобразования, максвеллово мультипольное представление геопотенциала и др.

Следует отметить, что при разработке новых форм представления потенциала притяжения необходимо учитывать, по крайней мере, два факта – «оптимальное определение» и «оптимальное использование» моделей гравитационного поля планеты. Под «оптимальным определением» понимается такое представление поля тяготения, которое наилучшим образом было бы согласовано с данными наблюдений для последующей интерпретации планетарных особенностей строения планеты. «Оптимальное использование» предполагает выбор такой модели поля тяготения, которая являлась бы наиболее эффективной в вычислительном отношении при выполнении часто повторяющихся расчетов. В зависимости от того, какие параметры модели потенциала притяжения определяются, та или иная модель имеет преимущества при ее использовании для изучения структуры гравитационного поля планеты или прогнозирования орбит КА.

Ниже рассмотрены некоторые методы представления потенциала притяжения планеты, применяемые при описании гравитационного поля Земли и планет.

1.2.1 Представление потенциала притяжения в виде разложения в ряд Фурье по сферическим функциям

Для представления потенциала притяжения Земли наиболее удобно использовать бесконечные ряды. Однако практически число членов таких рядов всегда ограничено. Ввиду незначительного отклонения фигуры Земли от шарообразной формы выражение для потенциала притяжения можно получить путем разложения в формуле (7) подынтегральной функции $1/\tau$ в ряд, обозначив геоцентрическое расстояние элемента массы dm через r_1 , геоцентрическое расстояние точки $P(xyz)$ через r_2 , а угол между радиусами-векторами r_1 и r_2 через ψ (рисунок 2).

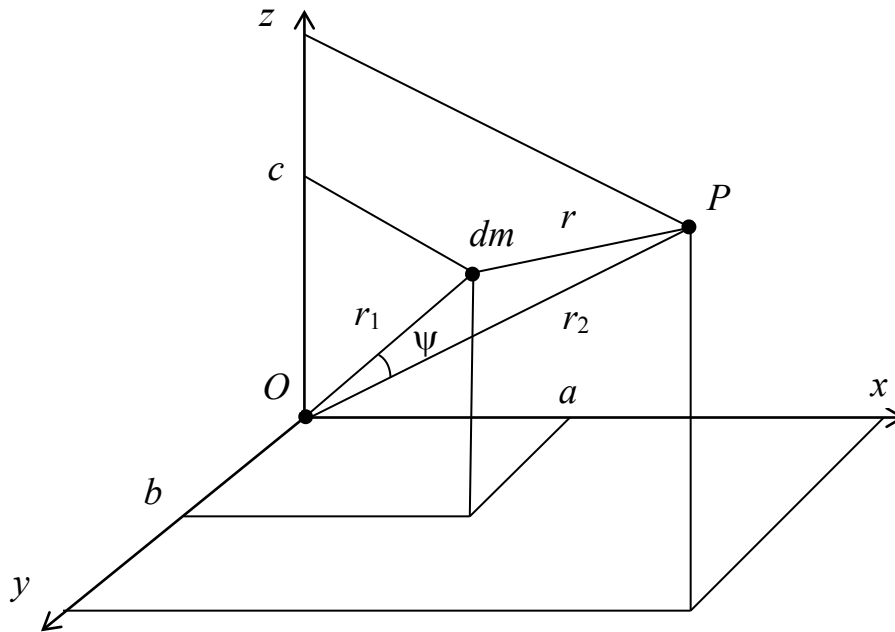


Рисунок 2 – Схема размещения притягиваемой точки $P(xyz)$ и притягивающей элементарной массы dm

Тогда подынтегральную функцию $1/\tau$ можно разложить в ряд следующего вида:

$$1/\tau = \frac{1}{r_2} \left[1 + \frac{r_1}{r_2} \cos \psi + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\psi \right) + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \cdot \left(\frac{3}{8} \cos \psi + \frac{5}{8} \cos 3\psi \right) + \dots \right]. \quad (35)$$

Коэффициенты при различных степенях отношения r_1/r_2 представляют собой полиномы Лежандра и обозначаются через $P_n(\cos \psi)$. С учетом этого обозначения ряд (35) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1/r &= \frac{1}{r_2} \left[P_0(\cos \psi) + \frac{r_1}{r_2} \cdot P_1(\cos \psi) + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot P_2(\cos \psi) + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \cdot P_3(\cos \psi) + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n \cdot P_n(\cos \psi). \end{aligned} \quad (36)$$

Подставив правую часть ряда (36) в формулу (10), получим потенциал притяжения во внешней точке $P(xyz)$ в виде

$$V(P) = f \cdot \iiint \delta(abc) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r_2^{n+1}} P_n(\cos \psi) d\tau. \quad (37)$$

Используя теорему о сложении сферических функций $P_n(\cos \psi)$, переходим к сферическим функциям со сферическими координатами φ_2, λ_2 притягиваемой точки $P(r_2 \varphi_2 \lambda_2)$ к сферическим функциям со сферическими координатами φ_1, λ_1 элементарной массы dm тела τ

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) &= P_n(\sin \varphi_2) P_n(\sin \varphi_1) + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \varphi_2) \cos m\lambda_2 P_n^m(\sin \varphi_1) \cos m\lambda_1 + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \varphi_2) \cos m\lambda_2 P_n^m(\sin \varphi_1) \sin m\lambda_1. \end{aligned} \quad (38)$$

Сферические функции являются важным классом специальных функций, которые тесно связаны с классическими ортогональными полиномами. Они возникают при решении широкого круга задач, например, при решении уравнения Лапласа в сферических координатах r, φ, λ . Так как непрерывные решения уравнения Лапласа называют гармоническими функциями, то сферические функции называют также сферическими гармониками.

С учетом выражения (37) формулу (38) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 V(P) = f \cdot \iiint \sigma(abc) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r_2^{n+1}} [P_n(\sin \varphi_2) P_n(\sin \varphi_1) + \\
 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \varphi_2) \cos m\lambda_2 P_n^m(\sin \varphi_1) \cos m\lambda_1 + \\
 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \varphi_2) \sin m\lambda_2 P_n^m(\sin \varphi_1) \sin m\lambda_1] d\tau. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Свойство непрерывности производных внешнего потенциала и равномерной сходимости благодаря $\frac{r_1}{r_2} < 1$ выражению (39) можно интегрировать почленно.

Учитывая, что координаты внешней точки $P(r_2, \varphi_2, \lambda_2)$ не зависят от переменных интегрирования, выражение (39) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 V(P) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_2^{n+1}} [P_n(\sin \varphi_2) \iiint \delta(abc) r_2^n P_n(\sin \varphi_1) d\tau + \\
 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \varphi_2) \cos m\lambda_2 \iiint \delta(abc) r_1^n P_n^m(\sin \varphi_1) \cos m\lambda_1 d\tau + \\
 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \varphi_2) \cos m\lambda_2 \iiint \delta(abc) r_1^n P_n^m(\sin \varphi_1) \cos m\lambda_1 d\tau]. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Интегралы в формуле (40) являются стоксовыми постоянными тела Земли τ [45]. Стоксовы постоянные определяются массой тела и его формой. Как отмечено в работе М. Бурша [8], стоксовы постоянные полностью и однозначно определяют потенциал силы притяжения Земли.

$$\begin{aligned} \iiint \delta(abc) r_1^n P_n(\sin \varphi_1) \cos m\lambda_1 d\tau &= C_{n0}; \\ S_{n0} &= 0; \end{aligned} \quad (41)$$

$$2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint \delta(abc) r_1^n P_n^m(\sin \varphi_1) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\tau = \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}.$$

Учитывая обозначения (41), выражение (40) принимает вид

$$V(P) = fM \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r_2^{n+1}} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda_2 + S_{nm} \sin m\lambda_2) P_{nm}(\sin \varphi_2). \quad (42)$$

В настоящее время в различных приложениях существуют разные формы записи разложения потенциала силы притяжения Земли в ряд по сферическим функциям. Наиболее распространенная форма, рекомендованная Комиссией № 7 МАС, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} V(P) = \frac{fM}{\rho} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^n P_{n0}(\sin \varphi) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

где ρ, φ, λ – геоцентрические радиус-вектор, широта и долгота притягиваемой точки P ; $J_n = -C_{n0}$.

Сферические функции являются важным классом специальных функций, тесно связанных с классическими ортогональными полиномами. Они возникают при решении широкого круга проблем, например, при решении уравнения Лапласа в сферических координатах. Так как непрерывные решения уравнения Лапласа называют гармоническими функциями, то сферические функции называют также сферическими гармониками. Нахождение решения уравнения Лапласа $\Delta V = 0$ в сферических координатах r, θ, φ , определение явного выражения для сферических функций, свойства последних подробно описаны в работе [51].

В процессе интегрирования уравнения движения космических аппаратов в околоземном пространстве удобнее представлять потенциал притяжения в комплексном виде

$$V(P) = \frac{fM}{\rho} \left\{ 1 + R_e \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} + iS_{nm}) P_{nm}(\sin \varphi) e^{im\lambda} \right\}. \quad (44)$$

В последние десятилетия представление потенциала притяжения Земли в виде ряда по сферическим функциям стало классическим при исследовании околоземного пространства с помощью искусственных спутников Земли. В силу простоты сферических функций оно очень удобно для аналитических и численных исследований движения искусственных спутников.

Следует однако отметить, что такое разложение обладает одним существенным недостатком, а именно медленной сходимостью, вследствие чего при точных исследованиях движения близких спутников необходимо учитывать достаточно большое число членов. Это обстоятельство в прошлом заставляло искать другие формы разложения потенциала. В настоящее время современные методы космических исследований, вычислительная техника и алгоритмы значительно расширили возможности исследования высокочастотной части гравитационного поля как в области точности, так и разрешающей способности.

1.2.2 Представление потенциала притяжения с помощью выборочных функций

Впервые в 1969 г. С. А. Лундквист и Дк. Е. О. Джакалия для преодоления вычислительных трудностей представления потенциала притяжения ограниченным рядом сферических функций при описании его высокочастотной части применили выборочные функции [39, 113, 114, 112]. Н. А. Чуйкова в 1974 г. применила выборочные функции для представления глобальной топографии Луны [92]. Кроме того, следует отметить работы Г. Шмидта, который непосредственно вычислил выборочные функции для описания гравитационного поля Земли до 36-го порядка разложения включительно [127, 128].

Каждая из выборочных функций представляет собой линейную комбинацию сферических функций и имеет экстремум в одной точке на сфере, которая называется выборочной. Эти точки размещаются на поверхности сферы. Причем для выборочных функций степени N необходимо иметь $(N + 1)$ выборочных точек. На множестве выборочных точек выборочные функции обладают:

– свойством локализации

$$Z_{kj}(\varphi_i, \lambda_{ij}) = \delta_{kj, kj}, \quad (45)$$

где $\delta_{kj, kj} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i, \\ 0 & \text{при } k \neq i; \end{cases}$

– свойством ортогональности

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{2k} Z_{pq}(\varphi_k, \lambda_{kj}) Z_{sl}(\varphi_k, \lambda_{kj}) = \delta_{pq, sl}; \quad (46)$$

– свойством нормальности

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{2k} Z_{kj}(\varphi_k, \lambda_{kj}) = 1, \quad (47)$$

где φ_k, λ_{kj} – координаты выборочных точек.

Выборочные функции – гармонические функции, так как они являются комбинациями элементарных сферических функций.

Разложение потенциала притяжения $V(\rho, \varphi, \lambda)$, как функции трех переменных в окрестности сферы радиуса R_0 , с помощью выборочных функций можно представить в виде ограниченного ряда

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{2k} Z_{kj}(\rho, \varphi, \lambda) V(\rho_k, \varphi_k, \lambda_k), \quad (48)$$

где $V(\rho_k, \varphi_k, \lambda_k)$ – значение потенциала притяжения в выборочных точках.

Выборочные функции $Z_{kj}(\rho, \varphi, \lambda)$ представляют собой комбинацию сферических функций

$$Z_{kj}(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{2k} b_{kj}^{nm}(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{2k} \left(\frac{R_0}{\rho} \right)^{n+1} b_{kj}^{nm} Y_{nm}(\varphi, \lambda), \quad (49)$$

$$\text{где } Y_{nm}(\varphi, \lambda) \begin{cases} P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda & m = 0, 1, \dots, n; \\ P_{n|m}(\sin \varphi) \sin |m|\lambda & m = 0, -1, \dots, -n; \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Сферические гармоники $Y_{nm}(\varphi, \lambda)$ образуют ортогональную и полную систему в гильбертовом пространстве $L^2[K(0,1); 1]$, где $K(0,1)$ – сфера с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Это означает, что для функции $V(\varphi, \lambda) \in L^2[K(0,1); 1]$ имеется ряд Фурье по системе сферических функций, сходящийся в $L^2[K(0,1); 1]$. Тогда на сфере $K(0,1)$ имеет место равенство

$$\sum_{m=n}^n b_{kj}^{nm} Y_{nm}(\varphi, \lambda) \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda), \quad (50)$$

где C_{nm} и S_{nm} – гармонические коэффициенты разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям.

Подставляя (50) в (49), получим выражение выборочной функции

$$Z_{kj}(\rho, \varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{R_0}{\rho} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda). \quad (51)$$

Представление потенциала притяжения формулами (48), (49) и (51) позволяет уменьшить степень разложения по сравнению с разложением по сферическим функциям и сохранить эквивалентность представления потенциала притяжения. При этом уменьшается объем используемой исходной информации. Однако, имеются трудности, возникающие при практическом применении выборочных функций для описания конкретных физических полей:

- отсутствие систематизированного описания математического аппарата выборочных функций в отечественной литературе;
- необходимость надежного определения количественных характеристик поля в строго заданной системе выборочных точек;
- отсутствие методов вычисления выборочных функций, позволивших бы эффективно использовать при моделировании потенциала силу тяготения.

1.2.3 Представление потенциала притяжения Земли

с помощью потенциала точечной массы

В 60- 70-х гг. XX в. для многих прикладных задач модели потенциала силы тяжести и его производных, созданных с помощью разложения в ряд по сферическим функциям, были вполне подходящими. Однако в это время появились зада-

чи, где точность таких моделей оказалась недостаточной. Это касалось межконтинентальных баллистических ракет. Здесь пошли по иному пути. Так как дифференциальное уравнение Лапласа для потенциала силы тяготения линейное и ему удовлетворяет потенциал точечной массы, то и потенциал суммы точечных масс удовлетворяет этому уравнению. В эти годы разработаны разные варианты представления потенциала тяготения с помощью совокупности точечных масс. В нашей стране точечные массы размещались в теле Земли в нерегулярно расположенных точках, а в США – точечные массы помещали в точки, регулярно расположенные по глубинным слоям. Ускорения силы тяжести, вычисленные по этим моделям точечных масс, сравнивались в квадратичной метрике с измеренными значениями в определенных точках поверхности Земли. После уравнивания результатов сравнения получались величины точечных масс, а также координаты их положения в теле Земли (для отечественной модели). Эти модели содержали от десятков до тысяч точечных масс. Погрешность лучших из этих моделей, по которым на борту межконтинентальных ракет вычислялось гравитационное ускорение, обеспечивало попадание в цель в радиусе около 100 м.

Впервые описание потенциала гравитационного поля с помощью точечных масс, распределенных внутри Земли, приведено в работе [134]. В 1971 г. Дж. Бальмино в работе [6] представил аномальную часть потенциала Земли потенциалом притяжения некоторой совокупности точечных масс. В работе [66] показано, что при одинаковом числе точечных масс и сферических гармоник процесс численного интегрирования уравнения движения спутников ускоряется в 1,6 раз. Однако в аналитическом методе интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЗ аппроксимация геопотенциала набором точечных масс не дает преимуществ перед разложением потенциала в ряд по сферическим функциям.

При определении параметров моделей точечных масс в общем возможны два подхода. Первый подход заключается в вычислении параметров моделей непосредственно по данным наблюдений искусственных спутников. Второй под-

ход основан на использовании известной модели разложения потенциала по сферическим функциям. Этот подход применяется преимущественно при построении многоточечных моделей потенциала тяготения Земли. Первый подход используется при описании гравитационного поля Луны и Марса. При построении многоточечной модели потенциала притяжения Земли полагают, что известно ее гравитационное поле. Это поле может быть представлено либо рядом Фурье по системе сферических функций, либо в виде цифровой модели сглаженных по стандартным трапециям значений аномалий силы тяжести.

Потенциал тяготения, создаваемый одной точечной массой m_i в точке $P(r, \varphi, \lambda)$, выражается формулой

$$V_i(P) = \frac{fm_i}{\sqrt{r^2 + \rho_i^2 - 2\rho_i r \cos \Psi_i}}, \quad (52)$$

где ρ_i – геоцентрический радиус-вектор точки с массой m_i ;

Ψ_i – сферический угол между радиусами-векторами r и ρ_i .

Потенциал притяжения Земли, представленный в виде суммы точечных масс, можно записать в виде

$$V(P) = V_0(P) + \sum_{i=1}^N V_i(P), \quad (53)$$

где $V_0(P)$ – потенциал притяжения нормальной Земли, вычисляемый с учетом первых членов в разложении глобальной модели геопотенциала в ряд Фурье по системе сферических функций. Таким образом, построение многоточечной модели геопотенциала сводится к определению таких координат и величины массы, которые обеспечивали бы наилучшее приближение к исходному полю. В принципе это

обратная задача теории потенциала и в общем случае является некорректной. Для ее решения необходимо использовать регуляризирующий алгоритм [86]. Следует отметить, что до сих пор нерешена проблема выбора распределения точечных масс. В работах [7, 56] гравитационное поле Луны представлено полем из 83 точечных масс, 12 из которых соответствуют масконам, а остальные описывают остаточное поле. В работе [46] авторы считают, что лучшие результаты можно получить при распределении точечных масс под экстремумами дериват гравитационного поля Земли. В работе [89] предложен метод, основанный на определении аномальных масс для N сферических пирамид, на которые разбивают тело Земли, и их замены точечными массами, на различных глубинах в центрах оснований пирамиды. Вершины этих пирамид совпадают с центром масс Земли. Основания пирамид на поверхности Земли ограничены линиями координатной сетки (равномерной или равновеликой). Потенциал притяжения считается заданным в виде набора гармонических коэффициентов гепотенциала C_{nm} и S_{nm} . Величина точечной массы m_i может быть определена по формуле [89]

$$m_i = \frac{\Delta\delta_i}{4\pi\delta_0}\omega_i, \quad (54)$$

где

$$\Delta\delta_i = \delta_0 \left[\left(\frac{R_i}{R_0} \right)^3 - 1 \right]; \quad (55)$$

$$R_i = \frac{R_0}{w_i} \left[1 + \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm} \bar{A}_{nm} + \bar{b}_{nm} \bar{B}_{nm}) \right] \quad (56)$$

– геоцентрический радиус-вектор точечной массы;

R_0 и δ_0 – средний радиус и средняя плотность Земли;

$$\left. \begin{array}{l} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{2n+1}{3} \frac{\delta}{\delta_0} \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right. \quad (57)$$

– нормированные коэффициенты разложения высот рельефа Земли по сферическим функциям; \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} – нормированные гармонические коэффициенты глобальной модели геопотенциала

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_{nm} \\ \bar{B}_{nm} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \iint P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda dW_i \\ \iint P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda dW_i \end{array} \right. \quad (58)$$

– сферические функции.

Актуальной задачей в этом методе представления потенциала тяготения остается определение величины радиусов-векторов точечной массы m_i , которая решается при условии наилучшего приближения аномалий силы тяжести, вычисленных по гармоническим коэффициентам геопотенциала и аномалий, определенных по модели точечных масс в i -й пирамиде.

Рассмотрим алгоритм моделирования гравитационного поля с помощью точечных масс, который имеет следующий вид:

– выбирается априори конфигурацию сети из N точек, в которых расположены экстремальные значения чистых аномалий силы тяжести (максимальные по абсолютной величине значения аномалий) или вертикальных градиентов силы тяжести. Предварительно определяются значения чистых аномалий $\Delta g(P)$ по формуле

$$\Delta g(P) = \gamma_e \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (n+1) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (59)$$

где γ_e – нормальная сила тяжести на экваторе;

\bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} – нормированные гармонические коэффициенты глобальной модели геопотенциала;

N – максимальная степень разложения в ряд (59), которая определяется как $N = 180^\circ / \Delta^\circ$, где Δ° – шаг регулярной сети точек $P(r, \varphi, \lambda)$. Затем на этой сети отыскиваются точки с максимальными по абсолютной величине значениями чистых аномалий $|\Delta g|_{\max}$.

Для расчета глубины залегания точечных масс предлагается использовать прием вычисления глубины h центра точечной массы по абсциссам $x_1/2$ половины максимальной по абсолютной величине аномалии силы тяжести [21]. Определяя на цифровой модели аномалий силы тяжести абсциссы $x_1/2$, в которых значение Δg равно $\frac{1}{2}|\Delta g|_{\max}$, получим значение h – глубины точечной массы по формуле [21]

$$h = 1,31 \frac{x_1}{2}. \quad (60)$$

Так как чистые аномалии силы тяжести наиболее четко реагируют на наличие точечных концентраций масс, то для них справедливо следующее уравнение:

$$\Delta g_i = \frac{\partial T}{\partial r} = f \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{Q_i^3} (r - \rho_i \cos \psi_i), \quad (61)$$

где T – возмущающий потенциал;

r – геоцентрический радиус-вектор точки $P(r, \varphi, \lambda)$;

ρ_i – геоцентрический радиус-вектор точечной массы m_i ;

Q_i – расстояние от i -й точечной массы до точки $P(r, \varphi, \lambda)$, вычисляемое по формуле

$$Q_i = \sqrt{r^2 + \rho_i^2 - 2\rho_i r \cos \psi_i}. \quad (62)$$

Используя уравнение (62) для N выбранных точек, получим следующую систему N уравнений погрешностей для определения точечной массы m_i

$$f \frac{m_i}{Q_i^3} (r - \rho_i \cos \psi_i) - \Delta g_i = v_i, \quad (63)$$

где $i = 1, \dots, N$.

После определения параметров всех точечных масс выполняется их пересчет в гармонические коэффициенты \bar{C}_{nm}^r и \bar{S}_{nm}^r , которые соответствуют модели потенциала тяготения, представленной точечными массами по формуле [59]

$$\left. \begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\rho_i}{a_e} \right)^n (\bar{P}_n^m(\sin \phi_i)) / (2n+1) \left\{ \begin{matrix} \cos m\lambda_i \\ \sin m\lambda_i \end{matrix} \right\}. \quad (64)$$

Полученные по формуле (67) гармонические коэффициенты модели точечных масс используем для вычисления чистых аномалий по следующей формуле:

$$\Delta g_r(P) = \gamma_e \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (n+1) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^r \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^r \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi). \quad (65)$$

Сопоставив вычисленные аномалии $\Delta g_r(P)$ с исходными $\Delta g(P)$, можно улучшить модель (65). Для этого необходимо изменить глубину h_i и массу m_i в отдельных K точках и повторить вычисления до стабилизации величины ε в выражении

$$\sum_{m=1}^K |\Delta g(P) - \Delta g_r(P)|^2 = \varepsilon. \quad (66)$$

В формуле (66) $K < N$.

1.2.4 Представление потенциала тяготения с помощью вейвлет-преобразования

Термин «вейвлет» (дословный перевод – маленькая волна) появился сравнительно недавно – его ввели Гроссман и Морле (Grossman & Morlet) в середине 1980-х гг. в связи с анализом свойств сейсмических и акустических сигналов. В настоящее время семейство анализаторов, названных вейвлетами, начинает широко применяться в задачах распознавания образов; при обработке и синтезе различных сигналов, например, речевых; при анализе изображений самой различной природы (это могут быть изображение радужной оболочки глаза, рентгенограмма почки, спутниковые изображения облаков или поверхности планеты, снимок минерала и т. п.); для изучения свойств турбулентных полей; для свертки (упаковки) больших объемов информации и во многих других случаях.

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала состоит в его разложении по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени).

Таким образом, в отличие от традиционно применяемого для анализа сигналов преобразования Фурье вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала, при этом частота и координата рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (время, координата) и в частотном пространствах. Сказанное легко обобщается на неодномерные сигналы или функции. В зарубежной литературе уже принято спектр Фурье называть *single spectrum* в отличие от спектра, полученного на основе коэффициентов вейвлет-преобразования, – *time-scale spectrum*, или *wavelet spectrum*. Область использования вейвлетов не ограничивается анализом свойств сигналов

и полей различной природы, полученных численно, в эксперименте или при наблюдениях. Вейвлеты начинают применяться и для прямого численного моделирования – как иерархический базис, хорошо приспособленный для описания динамики сложных нелинейных процессов, характеризующихся взаимодействием возмущений в широких диапазонах пространственных и временных частот. Результаты многочисленных экспериментов свидетельствуют о том, что при больших значениях числа Рейнольдса значительная часть объема турбулентной жидкости остается пассивной относительно диссипации энергии и, следовательно, относительно обратного ее каскада. Вейвлет-анализ оказывается очень удобным для анализа процессов с перемежаемостью. Он позволяет выявить пространственно распределенные свойства изучаемого объекта, определить наличие перемежаемости и распределение областей диссипации, получить локальную высокочастотную и глобальную крупномасштабную информацию об объекте и многое другое достаточно точно и без избыточности. Известны трудности, встречающиеся при обработке коротких высокочастотных сигналов или сигналов с локализованными частотами. Вейвлет-преобразование оказывается очень удобным инструментом для адекватной расшифровки таких данных, поскольку элементы его базиса хорошо локализованы и обладают подвижным частотно-временным окном. Далеко не случайно многие исследователи называют вейвлет-анализ «математическим микроскопом» – название прекрасно отражает замечательное свойство метода сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Способность этого «микроскопа» обнаружить внутреннюю структуру существенно неоднородного объекта и изучить его локальные скейлинговые свойства продемонстрирована на многих примерах, в частности, на таких классических, как фрактальные функции Вейерштрасса и вероятностные меры канторовских рядов. Применение вейвлет-анализа к турбулентному полю скорости в ветровом туннеле при больших числах Рейнольдса впервые дало наглядное подтверждение наличия каскада Ричардсона. Показано сходство энергетического каскадного процесса со структурой мультифрактальных неоднородных канторовских рядов. Еще более эффективным ока-

залось применение вейвлет-анализа к мультифрактальным инвариантным мерам некоторых хорошо известных динамических систем, моделирующих наблюдаемые в диссипативных системах ситуации перехода к хаосу [21].

Таким образом, вейвлеты могут с успехом применяться для решения различных задач. Однако они еще недостаточно широко известны кругу исследователей, занимающихся анализом экспериментальных данных.

Выводы по первому разделу

По результатам аналитического обзора выявлено, что для описания низкочастотных (планетарных) и среднечастотных (региональных) особенностей ГПЗ в настоящее время применяется традиционное представление гравитационного потенциала силы тяжести с помощью разложения по сферическим и шаровым функциям в сферических геоцентрических координатах.

2 СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

2.1 Теоретические основы использования методов космической геодезии для изучения гравитационного поля Земли

За время, прошедшее после запуска в СССР 4 октября 1957 г. первого искусственного спутника Земли (ИСЗ), особенно большие успехи были достигнуты в решении динамических задач космической геодезии. Знания о параметрах гравитационного поля и форме Земли значительно увеличились. По этим параметрам можно составить суждение об определенных свойствах формы уровенной поверхности, геофизических свойствах земной коры, мантии и ядра Земли.

Из анализа возмущений элементов орбит искусственных спутников Земли можно определить поправки к принятой модели гравитационного поля Земли. Модель гравитационного поля обычно задают значениями параметров в разложении потенциала притяжения Земли в ряд Фурье по системе сферических функций геоцентрических координат – геоцентрического радиуса-вектора r , широты φ , и долготы λ в виде (46) или

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (67)$$

где fM – геоцентрическая гравитационная постоянная;

a_e – экваториальный радиус Земли;

C_{nm} и S_{nm} – безразмерные гармонические коэффициенты геопотенциала, являющиеся стоксовыми постоянными.

При определении гармонических коэффициентов предпочитают использовать разложение по нормированным сферическим функциям, среднее квадратиче-

ское значение каждой из которых на сфере равно единице. Эти коэффициенты обозначают как \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} .

Решение динамических задач космической геодезии основывается на исследовании параметров \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} , по наблюдениям изменений элементов орбиты спутника E_i по времени, т. е. $\frac{dE}{dt}$. Коэффициенты \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} используются в решении задач физической геодезии при определении:

- уровенной поверхности геопотенциала на высоте спутника;
- гравитационного масштабного коэффициента $R = fM / W_0$, где W_0 – значение потенциала силы тяжести на геоиде (в футштоке);
- основных геодезических параметров Земли;
- ускорения силы тяжести во внешнем пространстве;
- средних аномалий силы тяжести по стандартным равновеликим трапециям;
- высот квазигеоида, сглаженных по стандартным равновеликим трапециям (планетарного квазигеоида);
- гравиметрических уклонений отвесной линии, сглаженных по стандартным равновеликим трапециям.

Задача определения параметров \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} впервые была решена в работе Vuchar E. The Motion of the Orbita Node of Sputnik 2 (1957 β) and the Oblateness of the Earth [102]. Используя результаты высокоточных наблюдений с помощью камеры «Бейкер-Нанн» первого и второго ИСЗ по регрессии долготы восходящего узла Ω в течение трех месяцев наблюдений (декабрь 1957 г. – февраль 1958 г.), получена величина динамического сжатия Земли на порядок точнее, чем за 300-летнюю историю высокоточных триангуляционных наблюдений. Причем, эта величина оказалась равной сжатию референц-эллипсоида Красовского, т. е. $\alpha = 1/298,3$.

Применяя динамический метод космической геодезии, возможно совместное определение параметров \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} , элементов орбит и координат пунктов наблюдений в абсолютной системе координат, отнесенных к центру масс Земли, по сово-

купности измерений, выполняемых на пунктах [37]. На рисунке 3 представлена схема обоснования фундаментального уравнения космической геодезии.

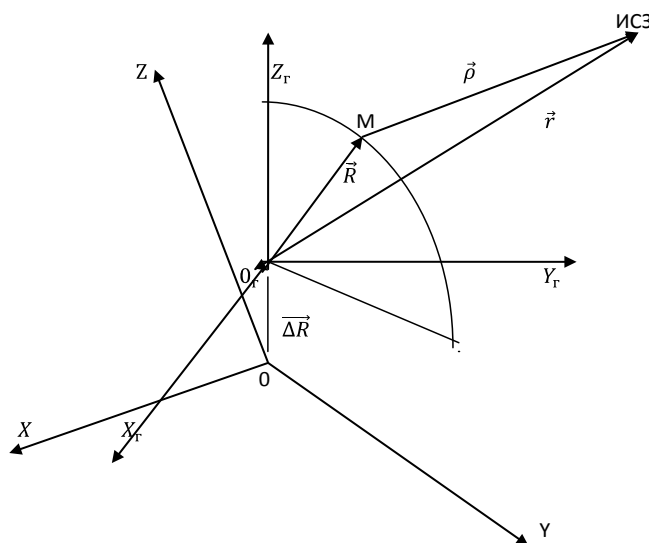


Рисунок 3 – Схема обоснования фундаментального уравнения космической геодезии

Фундаментальное уравнение космической геодезии имеет вид

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t) + \vec{R} + \Delta\vec{R}, \quad (68)$$

где \vec{R} – радиус-вектор пункта наблюдения M ;

$\vec{\rho}(t)$ – топоцентрический радиус-вектор ИСЗ;

$\vec{r}(t)$ – геоцентрический радиус-вектор ИСЗ;

$\Delta\vec{R}$ – вектор, связывающий положение центра референц-эллипсоида O_r с центром масс Земли O .

Геоцентрический радиус-вектор ИСЗ – сложная функция элементов орбиты $\mathcal{E}_i(\omega, i, e, M)$, параметров гравитационного поля Земли $\Psi_k (C_{nm}$ и $S_{nm})$ и момента регистрации времени t [81]:

$$\vec{r}_t = \vec{r}(\mathcal{E}_i, \Psi_k, t). \quad (69)$$

Дифференцируя уравнение (65) с учетом формулы (66) по правилу дифференцирования сложных функций, получим уравнение поправок:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\Delta}_i} \Delta \bar{\Delta}_i + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\Psi}_k} \Delta \bar{\Psi}_k - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial R} \Delta R + (\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_{\text{изм}}) = v_i, \quad (70)$$

где $\Delta \bar{\Delta}_i$ – поправки к элементам орбиты;

$\Delta \bar{R}$ – поправки к координатам пункта М;

$\Delta \bar{\Psi}_k$ – поправки к параметрам гравитационного поля.

Любые возмущения элементов орбиты $\bar{\Xi}_i$ приводят к изменению вектора \bar{r} :

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial M} dM + \frac{\partial \bar{r}}{\partial a} da + \frac{\partial \bar{r}}{\partial e} de + \frac{\partial \bar{r}}{\partial i} di + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \Omega} d\Omega. \quad (71)$$

Если заданы элементы орбиты $a, e, i, M, \Omega, \omega$, то эти возмущения элементов орбиты являются функциями численных значений незональных коэффициентов геопотенциала \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} :

$$\begin{aligned} dM &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=n}^n \left(\bar{C}_{nm} P_M^{nm} + \bar{S}_{nm} + \bar{S}_{nm} q_M^{nm} \right); \\ da &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=n}^n \left(\bar{C}_{nm} P_a^{nm} + \bar{S}_{nm} + \bar{S}_{nm} q_a^{nm} \right); \\ de &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=n}^n \left(\bar{C}_{nm} P_e^{nm} + \bar{S}_{nm} + \bar{S}_{nm} q_e^{nm} \right); \\ di &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=n}^n \left(\bar{C}_{nm} P_i^{nm} + \bar{S}_{nm} + \bar{S}_{nm} q_i^{nm} \right); \\ d\Omega &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=n}^n \left(\bar{C}_{nm} P_\Omega^{nm} + \bar{S}_{nm} + \bar{S}_{nm} q_\Omega^{nm} \right); \\ d\omega &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=n}^n \left(\bar{C}_{nm} P_\omega^{nm} + \bar{S}_{nm} + \bar{S}_{nm} q_\omega^{nm} \right), \end{aligned} \quad (72)$$

где $P_M^{nm}, q_M^{nm}, P_a^{nm}, q_a^{nm}, P_e^{nm}, q_e^{nm}, P_i^{nm}, q_i^{nm}, P_\Omega^{nm}, q_\Omega^{nm}, P_\omega^{nm}, q_\omega^{nm}$ – символы, обозначающие тригонометрические полиномы [81].

Из уравнений (69) образуют уравнения поправок по каждому наблюдению за возмущениями орбит ИСЗ и, решая эти уравнения по методу наименьших квадратов, получают незональные гармонические коэффициенты геопотенциала.

Решение задачи определения зональных гармонических коэффициентов геопотенциала $J_n = -C_{n0}$ основано на анализе возмущений элементов орбиты ИСЗ, обусловленных зональными гармониками геопотенциала.

1 Зональные гармоника вызывают вековые возмущения лишь в угловых элементах орбиты спутника Ω, ω и в начальном значении средней аномалии M_0 .

2 Большая полуось орбиты a содержит короткопериодические возмущения.

3 Значительные вековые возмущения от четных зональных гармоник в угловых элементах орбиты пропорциональны $J_2, J_4, J_6, J_8, \dots$, от нечетных гармоник – пропорциональны eJ_n ($n = 3, 5, 7, \dots$), где e – эксцентриситет орбиты. Амплитуды долгопериодических возмущений от четных зональных гармоник в долготе восходящего узла Ω имеют порядок e^2J_2 , в аргументе перицентра ω – eJ_2 , в M_0 – $(1 + e)J_2$; амплитуды долгопериодических возмущений от нечетных гармоник имеют порядок в долготе восходящего узла – eJ_2 , в аргументе перицентра ω и в M_0 – J_2 . Амплитуды долгопериодических возмущений в эксцентриситете орбиты e имеют порядок – eJ_2 , в наклоне орбиты i от четных гармоник имеют порядок – e^2J_2 , а от нечетных – eJ_2 .

4 Наиболее крупные вековые возмущения от атмосферного торможения содержатся в большой полуоси a , в эксцентриситете e и в начальном значении средней аномалии M_0 . В долготе узла Ω и в аргументе перицентра ω эти возмущения значительно меньше, так как они пропорциональны J_2 . Наиболее выгодными для определения зональных гармоник геопотенциала являются те элемен-

ты орбиты, в которых содержатся наиболее крупные возмущения от искомым гармоник [81, 37].

В общем виде возмущения в элементах $\vec{\Theta}_i$ орбиты спутника, обусловленные зональными параметрами гравитационного поля Земли, можно записать в виде [8]

$$\frac{d\Theta_i}{dt} = \sum_{n=2}^N K_n^0 J_n^0 + K_{22} J_2^0 J_2^2, \quad (73)$$

где коэффициенты K_n^0 и K_{22} – функции элементов орбиты;

J_n^0 – коэффициенты зональных гармоник геопотенциала.

Эти уравнения могут служить уравнениями погрешностей для определения зональных гармонических коэффициентов. Причем, необходимо использовать спутники с различными наклонениями i , чтобы эксцентриситеты и наклонения не были слишком малы. Для определения гармонических коэффициентов геопотенциала низких степеней используются далекие спутники, движение которых мало искажено влиянием высоких гармоник гравитационного поля Земли. Поэтому желательно разделение влияния гармоник (сепарация неизвестных). Частично проблему сепарации пытались решить путем оптимальной комбинации орбит с разнообразными элементами с привлечением специально запускаемых резонансных спутников [96].

Подводя итог вышеизложенному, отметим, что определение численных значений гармонических коэффициентов геопотенциала по наблюдениям возмущений элементов орбит ИСЗ основано на решении обратной задачи небесной механики вычисления действующих на спутник сил при условии, что реальная орбита находится по наблюдениям, которая по своей сути является некорректной задачей. При этом аналитическая форма возмущающих сил тяготения задается выражением (64), и задача сводится к определению постоянных \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} . Обычно эта задача усложняется тем, что в процессе вычислений поправки в коор-

динаты станций наблюдения включаются в решение. Кроме того, разрешающая способность рассматриваемого динамического метода космической геодезии по абсолютным определениям моделей гравитационного поля Земли ограничена тем, что влияние гармоник геопотенциала на элементы орбиты спутников быстро уменьшается с ростом степени разложения n .

2.2 Выводы гармонических коэффициентов гравитационного потенциала Земли из комбинации наземных гравиметрических и спутниковых данных

Для практического и научного использования в физической геодезии результатов измерений силы тяжести на поверхности Земли необходимы знания параметров гравитационного поля Земли. Параметры гравитационного поля Земли, как было отмечено выше, могут быть определены как из обработки наблюдений за возмущениями элементов орбит ИСЗ, в виде системы коэффициентов разложения по сферическим функциям потенциала силы тяжести, так и из анализа измерений силы тяжести в виде функции средних аномалий силы тяжести на поверхности Земли. Типичными задачами с использованием этих данных являются определение высот квазигеоида с помощью формул Стокса и Молоденского, определение фундаментальных геодезических постоянных, вычисление гравитационных сил, действующих на высотах орбит спутников, и т. д. Несмотря на то, что к настоящему времени гравиметрическими съемками покрыты большие площади как на континентах, так и на морях и океанах, существующих наземных гравиметрических данных все-таки недостаточно для надежного вывода средних аномалий силы тяжести по всей поверхности Земли, а, следовательно, и для надежного определения гармонических коэффициентов геопотенциала.

Если различные модели геопотенциала, полученные из наблюдений ИСЗ, сравнить с моделями геопотенциала, полученными по наземным гравиметрическим измерениям, то обнаруживаются расхождения, достигающие значительной величины. Модель гравитационного поля Земли должна удовлетворять требованиям, предъявляемым при ее использовании и на поверхности Земли, и в окружающем ее

пространстве. Очевидно, она должна быть основана на комбинации данных, полученных из наземных и спутниковых измерений. Эти два метода выгодно дополняют друг друга при совместной обработке по способу наименьших квадратов.

В моделях гепотенциала, полученных по возмущениям элементов орбит в движении ИСЗ, определялись коэффициенты гармоник до степени и порядка примерно $n = m = 30$. Дальнейшее увеличение степени и порядка коэффициентов гармоник динамическим методом затормозилось не столько точностью измерений, сколько проблемой сепарации (разделения влияния) гармоник [96].

Частично проблему сепарации гармоник пытались решать с привлечением специально запускаемых резонансных ИСЗ. В результате были определены отдельные гармоники примерно до $n = m \approx 50$. Однако этот подход оказался весьма затратным и хотя и давал высокую точность, но позволял определять лишь отдельные высокие гармоники.

Вместе с тем, в первую очередь, геодезия, геофизика, океанография, геотектоника и другие науки, опирающиеся на знание гравитационного поля Земли, требуют гораздо более высокой точности, а именно [104]:

- разрешения гравитационного поля не более 200 км;
- точности аномалий силы тяжести не более 2–3 мГал;
- ошибки определения высоты геоида не более 2–3 см.

Для определения гармонических коэффициентов гепотенциала в настоящее время имеются два типа независимых данных – сила тяжести на поверхности Земли и спутниковые данные (наблюдения за возмущениями элементов орбиты ИСЗ, данные спутниковой альтиметрии и спутниковой градиентометрии). Чтобы получить более точные результаты, в работе [64] предлагается провести совместное уравнивание гравиметрических и спутниковых данных методом, подобным методу Гельмерта (Пранис – Праневича). Из этого совместного решения находят поправки $(\vec{C}_{nm}, \vec{S}_{nm})$ к некоторой начальной системе гармонических коэффициентов \vec{C}'_{nm}, S'_{nm} и поправку к da_{00} к предварительному значению нулевой гармо-

ники в разложении силы тяжести по сферическим функциям. Уравнение погрешностей имеет вид [64]

$$da_{00} + \gamma \sum_{n=2}^N (n-1) \sum_{m=0}^n [(d\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + d\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi)] - l_{gi} = v_{gi},$$

где $l_{gi} = \Delta g_{i\text{наб}} - \Delta g_{i0}$;

Δg_{i0} – значение аномалий силы тяжести, соответствующие начальной системе гармонических коэффициентов \bar{C}'_{nm} , \bar{S}'_{nm} ; $\Delta g_{i\text{наб}}$ – значение аномалий силы тяжести, соответствующие системе гармонических коэффициентов \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} .

К этим уравнениям присоединяют спутниковые уравнения погрешностей

$$d\bar{C}_{nm} - (\bar{C}_{nm} - \bar{C}'_{nm}) = v'_{nm};$$

$$d\bar{S}_{nm} - (\bar{S}_{nm} - \bar{S}'_{nm}) = v''_{nm}.$$

Совместную обработку этих групп уравнений погрешностей выполняют параметрическим методом под условием

$$[\rho_i v_{gi}^2] + [\rho_{nm} (v'_{gi}{}^2 + v''_{gi}{}^2)] = \min,$$

где ρ_i и ρ_{nm} – веса аномалий и гармонических коэффициентов.

2.3 Космические гравиметрические миссии CHAMP, GRACE и GOCE

Ряд технологических достижений в области космических исследований в 70-е гг. прошлого столетия позволил разработать спутниковые методы определения гравитационного поля Земли с высоким разрешением.

Чтобы преодолеть ограничения, связанные с наземными наблюдениями спутников, представляющими традиционные методы, должны выполняться три фундаментальных критерия:

- высота орбиты должна быть как можно ниже (200–500 км);
- непрерывный охват трехмерными наблюдениями больших орбитальных дуг;
- разделение гравитационных и негравитационных сил, действующих на спутник.

С такими соображениями реализуются две концепции, которые уже проверены [17]:

- наблюдения «спутник – спутник» (измерения расстояний и скорости изменения расстояний между спутниками);
- спутниковая градиентометрия (измерение разности ускорений силы тяжести внутри спутника).

Система «спутник – спутник». Технология «спутник – спутник» (SST – satellite to-satellite) состоит в измерении расстояний и скорости изменения расстояний между спутниками. При этом предусматривается два варианта взаимного расположения спутников: высокий спутник и низкий спутник (HL) и два спутника, расположенных на близких орбитах (LL) на расстоянии 50–300 км друг от друга (рисунок 4).

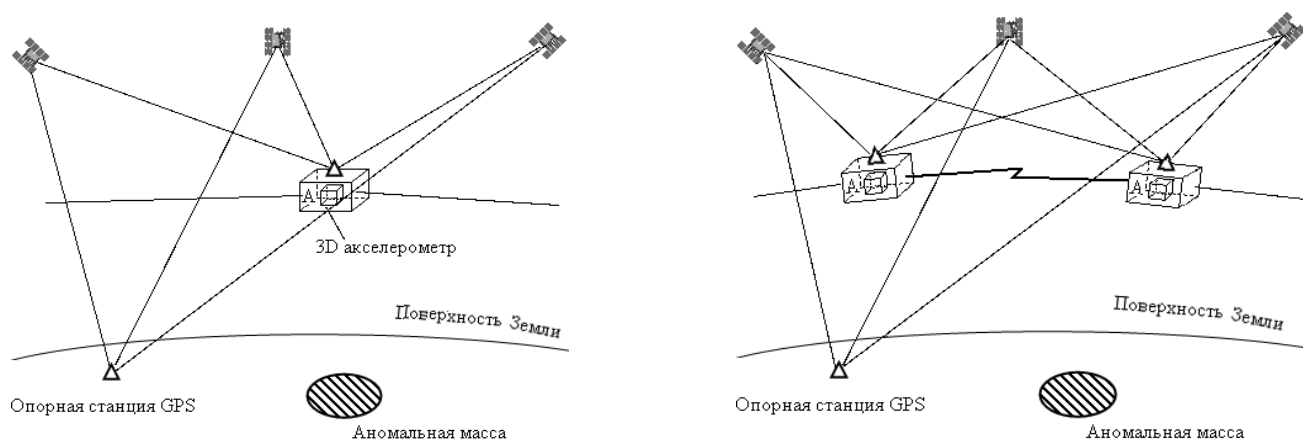


Рисунок 4 – Разные концепции, посвященные гравитационным полевым миссиям: SST-HL, SST-LL, SGG

В системе «спутник – спутник» в режиме «высокий – низкий», околоземная орбита низколетящего спутника (НОО) непрерывно отслеживается спутниками, снабженными глобальными системами местоопределения типа GPS/ГЛОНАСС или Galileo. Термин «режим "высокий – низкий"» не совсем соответствует действительности, так как спутники GPS/ГЛОНАСС и Galileo находятся на средней околоземной орбите (СОО), а не на высокой околоземной орбите (ВОО). Кроме отслеживания «спутник – спутник», на спутнике НОО устанавливают акселерометр. Негравитационные силы, действующие на низкий спутник, измеряются акселерометрами. Спутник LEO является зондом в гравитационном поле Земли, который можно точно и непрерывно наблюдать. Наблюдаемые 3D ускорения соответствуют гравитационным ускорениям. Тем самым измеряются трехмерные возмущающие ускорения, вызванные гравитационным полем Земли. Эти ускорения соответствуют первым производным гравитационного потенциала W . Поле силы тяжести выводится путем обращения полученной информации относительно орбиты низкого спутника.

Система «спутник – спутник» в режиме «высокий – низкий» впервые была применена в программе полета на Луну «Аполлон» для контроля с Земли лунного модуля. Последующий анализ этих данных обнаружил сильные аномалии в гравитационном поле Луны (масконы).

На Земле начало метода – 1975 г. Стационар – ATS-6 и низкие GEOS-3, NIMBUS-6 и «Аполлон-Союз».

Из сравнения скорости изменения измеренного значения радиальной скорости и вычисленной по модели GEM-7 можно четко увидеть тонкую гравитационную структуру.

Система «спутник – спутник» SST-HL, из которых один высокий, другой низкий, реализована в проекте CHAMP (Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical and Application). Реализация данного проекта возложена на Научно-исследовательский центр Потсдама (GeoForschungZentrum Potsdam (Германия)).

Спутник CHAMP запущен 15 июля 2000 г. с космодрома Плесецк (Россия). Спутник массой 522 кг и длиной 8,33 м, период обращения – 93,61 мин. Наклонение $87,3^\circ$, высота в начале – 450 км, в конце – 300 км.

Оборудование: 16-канальный GPS-приемник с многоантенной системой, 3-осный акселерометр, лазерные отражатели для локации с Земли, магнетометр, цифровой счетчик дрейфа ионов.

Предусматривает следующие цели:

– изучение глобального поля силы тяжести, или, конкретнее, уточнение длинноволновой части статического поля и ее временных вариаций (вызванных, например, перераспределениями атмосферных масс, океанической циркуляцией, изменением уровня моря за счет таяния полярного льда);

– изучение глобального магнитного поля, или, конкретнее, уточнение основного магнитного поля и магнитного поля земной коры и их пространственно-временных вариаций;

– профилирование ионосферы и тропосферы, или, более определенно, уточнение атмосферы с точки зрения ее температуры, содержания водяных паров и электронной структуры по данным о преломлении сигналов GPS.

Первоначально ожидалось, что CHAMP проработает от четырех до пяти лет, но благодаря своей устойчивой конструкции даже при низкой траектории полета миссия просуществовала в два раза дольше. Проект был использован для измерения гравиметрического поля Земли, магнитного поля Земли и для оптического зондирования атмосферы.

Для обеих концепций КА на низких орбитах являются сенсорами гравитационного поля Земли. Для измерения относительных скоростей могут использоваться однонаправленные и двухнаправленные межспутниковые системы. Нерегулярные изменения этой скорости содержат гравитационную информацию. Чем ниже орбита спутника, тем более отчетливой и детальной становится информация.

В системе «спутник – спутник» в режиме «низкий – низкий» два спутника двигаются по одной и той же орбите друг за другом, но отделены несколькими сот-

нями километров (около 220 км). Расстояния между ними и скорости изменения этих расстояний измеряются с предельно возможной точностью (до 10 микрон!). Орбита каждого спутника подвержена индивидуальному влиянию возмущающих ускорений, которые соответствуют первым производным гравитационного потенциала. Информация от обоих спутников дает разности ускорений. Кроме того, положения спутников НОО определяются другими спутниками с GPS на борту. Так что режим «высокий – низкий» также, по существу, имеет место. Эффект действия на спутник негравитационных сил, например, за счет аэродинамического сопротивления, должен быть компенсирован или измерен акселерометром. Спутники собирают информацию, выполняя тщательно выверенные маневры на орбите. В то время как один покачивается и медленно перемещается в неровном гравитационном поле Земли, второй, следующий на расстоянии 220 км, измеряет колебания в разделяющем их расстоянии вплоть до микрона. Именно изменения расстояния и описывают природу и масштабы гравитационных аномалий, над которыми пролетают спутники.

Система «спутник – спутник» SST-LL, в которой оба спутника низкие, реализована в проекте GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) (проект GRACE – совместный проект Американского национального управления по аэронавтике и космонавтике (NASA)), и Немецким центром авиационных и космических полетов (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, DLR).

Основными целями проекта являются:

- определение глобального гравитационного поля Земли с высокой разрешающей способностью;
- изучение вариации силы тяжести во времени;
- изучение с помощью GPS-измерений явлений преломления в ионосфере и тропосфере путем детального определения электронного содержания.

Спутники запущены 17 марта 2002 г. с космодрома Плесецк (Россия). Деятельность миссии GRACE основана на работе двух абсолютно идентичных спутников, находящихся на расстоянии 220 км друг от друга, на полярной орбите высотой около 500 км над Землей. При пролете над гравитационными аномалиями

это расстояние изменяется, поскольку спутники сильнее или слабее притягиваются Землей. Например, если летящий впереди спутник находится над районом с более высокой гравитацией, то его «притянет» к Земле немного сильнее, чем другой аппарат. И вот это расстояние, которое отражает изменение в силе притяжения над данным участком земной поверхности, может быть измерено. На спутниках установлены микроволновые дальномеры с точностью измерений вплоть до одного микрометра. Именно высокая точность измерения расстояния между спутниками позволяет улавливать малейшие изменения в силе притяжения [18].

Оборудование: высокостабильный генератор частоты, обслуживающий дальномерную систему KBR, GPS-приемник, цифровая звездная камера, уголко-вые отражатели для лазерной локации с Земли.

Спутниковая градиентометрия. Для реализации принципа спутниковой градиентометрии были разработаны градиентометры различного типа: комбинации акселерометров, криогенные градиентометры, градиентометры ротационного типа.

Спутниковая градиентометрическая аппаратура не связана с Землей, и поэтому измеряет одну или несколько компонент тензора вторых производных потенциала силы притяжения $V(x, y, z)$ в осях (x, y, z) , связанных со спутником (74)

$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Если полный тензор измерен на орбите, то гравитационное ускорение \vec{F} в точке P получается путем интегрирования по пути PP_0

$$\text{grad}V = \vec{F} = \vec{F}_0 + \int_{t_0}^t V \dot{r} dt, \quad (75)$$

где \vec{F}_0 – ускорение в начальной точке P_0 в момент t_0 .

Для вычисления $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ необходимо знать путь $r = r(t)$. Высокие требования

к точности градиентометрических измерений распространяются и на точность определения координат спутника. В работе [28] предложены итерационные методы для одновременного определения орбит спутников, их координат и компонентов гравитационного тензора (74).

17 марта 2009 г. с российского космодрома Плесецк стартовала ракета-носитель «Рокот» с европейским спутником GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer – «Исследователь гравитационного поля и установившихся океанских течений») на борту. Аппарат GOCE – совместный проект многолетней работы исследователей и инженеров из 45 европейских компаний (Европейское космическое агентство) – предназначен для исследования гравитационного поля Земли. Для этого на спутнике установлен градиометр, который будет измерять гравитационное поле с высочайшей точностью. Точность измерений обеспечивают шесть необычайно чувствительных акселерометров, способных почувствовать отклонение в силе притяжения в одну десятитриллионную от нормального уровня. Помимо градиометра, GOCE оснащен навигационным прибором, принимающим сигналы GPS для точного позиционирования аппарата над поверхностью Земли, а лазерный отражатель позволит с высокой точностью отслеживать движение спутника при помощи наземных лазеров (рисунок 5). Управление GOCE осуществляется из Центра управления в немецком городе Дармштадте.

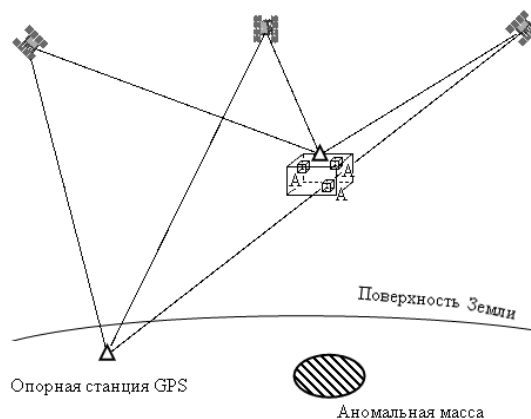


Рисунок 5 – Спутниковая градиентометрия с трехосным градиентометром

Главное назначение спутника – составление гравитационной карты Земли. Знание точной уровенной поверхности океанов и морей (которую на Западе принято называть геоидом) важно в исследованиях океанической циркуляции, измерениях динамики уровня моря и движении прибрежных льдов. Все эти явления отражают глобальные изменения климата. Геоид также используется в качестве поверхности отсчета для построения топографических карт. Более точные данные о гравитационных аномалиях позволят лучше понять процессы, происходящие внутри Земли, такие, например, как вулканизм и землетрясения, а также дать новые знания о возвратном движении земной коры в послеледниковый период.

Данные, полученные при наблюдениях, позволяют улучшить существующие модели климата за счет понимания того, каким образом гравитационное поле влияет на циркуляцию океана и изменения уровня моря. GOCE был рассчитан на работу в течение двух лет. Спутник GOCE фиксирует отклонения значения ускорения свободного падения в разных точках Земли по отношению к известной величине, равной $9,806\ 65\ \text{м/с}^2$. Идея состоит в следующем. Пара тел (акселерометр) последовательно закреплена на пружинах. При облете планеты одно из них оказывается чуть ближе к ней и испытывает чуть более сильное притяжение, слегка сильнее натягивая пружинный подвес. Разница между натяжением пружин у обоих тел как ни мала, может быть измерена, и позволяет составить детальную карту гравитационного поля планеты. Для поддержания низкой орбиты спутник оснащен непрерывно работающим ионным двигателем, использующим для создания импульса ионизированные атомы ксенона.

Цель проекта GOCE – исследование гравитационного поля и стационарной циркуляции Мирового океана:

- измерить аномалии гравитационного поля с точностью порядка 1 мГал;
- измерить форму земного геоида с точностью 1-2 см.

Масса спутника – 1 052 кг (с учетом массы ксенона (40 кг), используемого в качестве топлива). Орбита – низкая квазикруговая околоземная гелиосинхрон-

ная на границе света и тени. Наклонение – $96,7^\circ$, высота орбиты – 255–285,4 км. Эксплуатационный ресурс – 20 месяцев.

Целевая аппаратура:

- градиометр, три пары трехосевых емкостных датчиков перегрузки с сервоуправлением (в каждой паре датчики разнесены на $\sim 0,5$ м);
- 12-канальный двухчастотный GPS-приемник геодезического качества;
- уголкового лазерного отражателя, обеспечивающего слежение за КА с помощью наземных лазеров.

Изготовитель ракеты-носителя – Государственный космический научно-производственный центр имени М. В. Хруничева (Москва, РФ).

По сравнению с режимом «низкий – низкий» системы «спутник – спутник» с большим базисом между двумя спутниками НОО в случае спутниковой градиентометрии базисное расстояние между двумя акселерометрами стремится к нулю. Это достигается размещением обоих акселерометров на одном и том же спутнике. Таким образом, спутниковая градиентометрия представляет собой измерение разностей ускорения в трех пространственных взаимно ортогональных направлениях шестью акселерометрами (по два на каждой из трех осей), установленными на одном и том же спутнике. Другими словами, измеренный сигнал есть разность гравитационного ускорения спутника, где гравитационный сигнал является результатом притяжения.

Стрелообразная форма спутника, а также его «плавники» помогают спутнику сохранять ориентацию и уменьшают торможение в верхней атмосфере, которое довольно значительно на высоте его орбиты – около 255 км. Для компенсации атмосферного торможения и других негравитационных воздействий на спутнике установлен непрерывно работающий ионный двигатель, использующий для создания импульса ионизированные атомы ксенона.

В ближайшие годы планируется реализация градиентометрического проекта на низких орбитах (160–180 км) с использованием градиентометров с чувствительностью 10^{-4} Э (при времени осреднения 1–1 000 с). Этот проект позволит ре-

шить широкий круг важнейших задач: выбор наиболее реального механизма горообразования, понимания динамики ядра Земли, определение механических свойств земной коры и ее динамики, построение региональных геологических моделей для оценки минеральных ресурсов, изучение океанических циркуляций, улучшение гравитационных моделей для повышения точности траекторных и ГНСС-измерений. Данные градиентометрии, дополняя и контролируя результаты морских и наземных гравиметрических измерений, а также данные спутниковой альтиметрии, позволят устранить систематические погрешности, присущие каждому отдельному методу.

Миссии CHAMP, GRACE и GOCE имеют различные характеристики и, следовательно, удовлетворяют разным аспектам определения высокоточного гравитационного поля.

2.4 Современные глобальные модели гравитационного поля, полученные с учетом данных космических гравиметрических миссий

Исследуемые модели геопотенциала Земли доступны на сайте Немецкого научно-исследовательского центра наук о Земле в городе Потсдам (ICGEM), который является одним из шести центров Международной гравитационной полевой службы Международной ассоциации геодезии [116].

В настоящее время на сайте центра ICGEM представлено более 170 моделей, и все они доступны в виде нормированных коэффициентов сферических гармоник в стандартном формате, который был принят Европейским космическим агентством в качестве официального формата данных проекта GOCE.

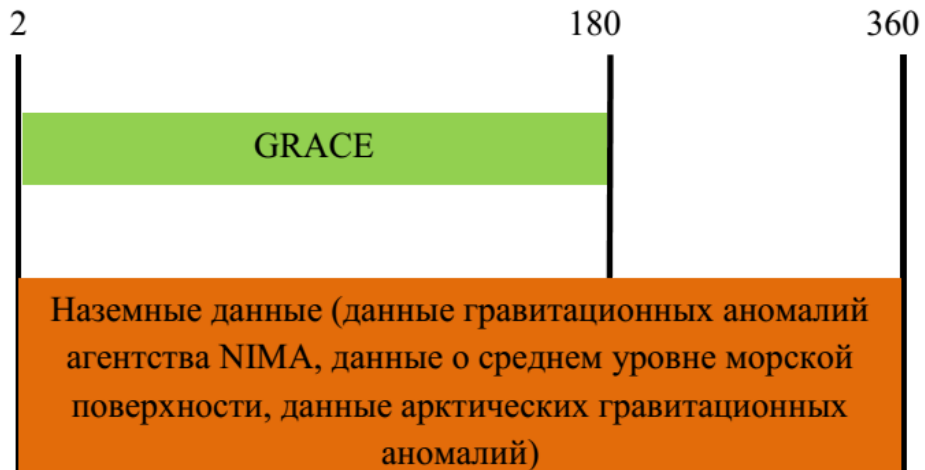
Для исследования выбраны 15 моделей геопотенциала, созданных за последние 10 лет. Все выбранные модели являются комбинированными. «Чисто» спутниковые модели не рассматривались.

В таблице 4 представлена основная информация по исследуемым глобальным моделям геопотенциала.

Таблица 4 – Модели, выбранные для исследования

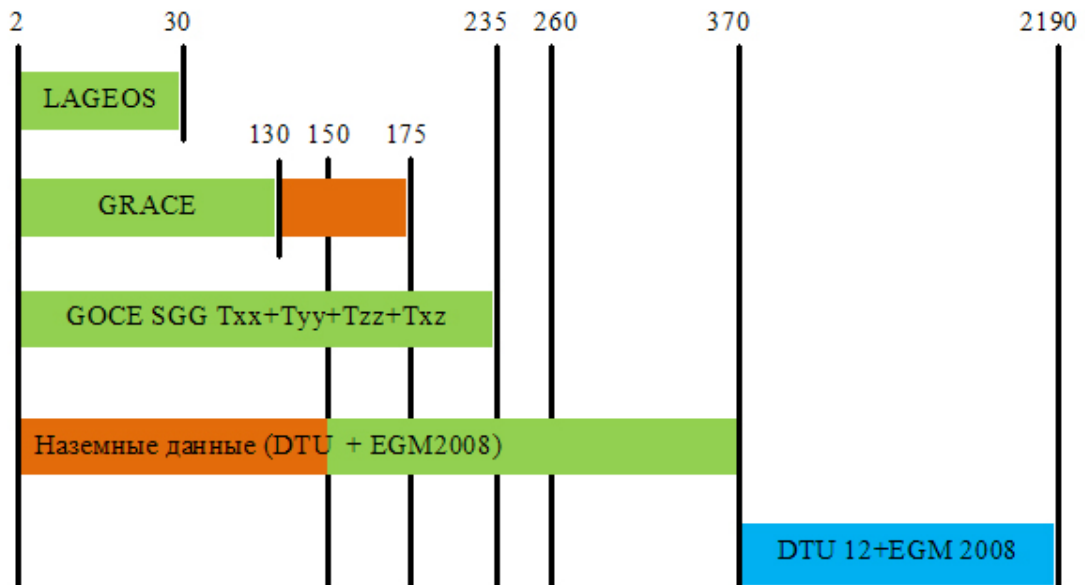
Номер по ICGEM	Модель	Год создания	Максимальная степень разложения	Исходные данные	Ссылка
167	SGG-UGM-1	2018	2159	EGM2008, S(GOCE)	Liang, W. et al., 2018 и Xu, X. et al. (2017)
161	XGM2016	2017	719	A, G, S(GOCO05s)	Pail, R. et al, 2017
154	GOCO05c	2016	720	A, G, S	Fecher, T. et al, 2016
153	GGM05C	2015	360	A, G, S(Goce), S(Grace)	Ries, J. et al, 2016
152	GECO	2015	2190	EGM2008, S(Goce)	Gilardoni, M. et al, 2016
148	EIGEN-6C4	2014	2190	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)	Förste, Christoph et al, 2014
139	EIGEN-6C3stat	2014	1949	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)	Förste, C. et al, 2012
162	GAO2012	2012	360	A, G, S(GOCE), S(GRACE)	Demianov, G. et al, 2012
131	EIGEN-6C2	2012	1949	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)	Förste, C. et al, 2012
126	GIF48	2011	360	A, G, S(Grace)	Ries, J.C. et al, 2011
125	EIGEN-6C	2011	1420	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)	Förste, C. et al, 2011
114	EIGEN-51C	2010	359	A, G, S(Champ), S(Grace)	Bruinsma, S.L. et al, 2010
109	GGM03C	2009	360	A, G, S(Grace)	Tapley, B.D. et al, 2007
105	EIGEN-5C	2008	360	A, G, S(Grace), S(Lageos)	Förste, C. et al, 2008
104	EGM2008	2008	2190	A, G, S(Grace)	Pavlis, N.K. et al, 2008
Примечание: данные таблицы 4 составлены по материалам ICGEM. Здесь <i>S</i> – данные спутниковых гравиметрических миссии; <i>G</i> – данные наземных гравиметрических измерений; <i>A</i> – данные альтиметрических измерений					

При создании моделей использованы комбинации различных типов данных. Разработчики приводят комбинации данных, используемых для создания моделей ГПЗ. Примеры исходных данных для разработки комбинированных моделей ГПЗ приведены на рисунках 6, 7.



2, 30, ...360 – максимальные степени учитываемых гармонических коэффициентов геопотенциала

Рисунок 6 – Схема комбинации различных типов данных при создании модели GGM03C



2, 30, ...2190 – степени учитываемых гармонических коэффициентов геопотенциала

Рисунок 7 – Схема комбинации различных типов данных при создании модели EIGEN-6C4

Модель GGM03C является комбинированной глобальной моделью гравитационного поля Земли и содержит гармоники геопотенциала до 360-й степени.

Комбинация данных при создании модели GGM03C сформирована следующим образом:

- гармонические коэффициенты геопотенциала степени от 2 до 180, полученные в результате межспутниковых измерений проекта GRACE за период с января 2003 г. по декабрь 2006 г.;

- наземные данные обеспечили наполнение ряда гармонических коэффициентов до степени 360 путем использования следующих данных: гравитационных аномалий агентства NIMA, данных о среднем уровне морской поверхности (MSS95), а также данных арктических гравитационных аномалий, полученных во время выполнения проекта ArcGP.

Модель EIGEN-6C4 является последней ультравысокостепенной глобальной моделью гравитационного поля Земли и содержит гармоники геопотенциала до 2190-й степени.

Комбинация данных при создании модели EIGEN-6C4 сформирована следующим образом (см. рисунок 7):

- гармонические коэффициенты геопотенциала степени от 2 до 30, полученные в результате лазерных траекторных наблюдений спутников Lageos за период с 1985 по 2010 г.;

- гармонические коэффициенты геопотенциала степени от 2 до 130, полученные в результате межспутниковых измерений проекта GRACE за период с 2003 по 2012 г.;

- гармонические коэффициенты геопотенциала до степени 235, полученные по данным GOCE-SGG, включая компоненты градиента силы тяжести T_{xx} , T_{yy} , T_{zz} и T_{xz} [109];

- наземные данные обеспечили наполнение ряда гармонических коэффициентов до степени 370 путем использования модели океанического геоида DTU12 [101] и высот геоида EGM-2008;

- полярные области заполнены с использованием данных гравитационного поля модели EIGEN-6C3stat.

2.5 Оценка погрешности аппроксимации геопотенциала и его дериват, обусловленной ограничением ряда Фурье по системе сферических функций

Любая функция с неограниченным спектром на сфере, имеющая непрерывные вторые производные, может быть равномерно аппроксимирована бесконечным рядом по системе сферических функций вида (1). Однако метод суммирования рядов Фурье с приближенными коэффициентами состоит в том, что в качестве приближенного значения такого ряда берется сумма конечного (обычно не слишком большого) числа его первых членов, т. е. ряд (1) ограничивают степенью N и представляют в виде ряда

$$V_N(\varphi, \lambda, r) = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right]. \quad (76)$$

Погрешность аппроксимации геопотенциала V ограниченным рядом (76) может быть оценена с помощью следующей формулы:

$$\varepsilon_N^2 = \|V - V_N\|^2 = (V, V) - 2(V, V_N) + (V_N, V_N), \quad (77)$$

где

$$(V, V) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} V^2(\varphi, \lambda) d\omega = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) = D \quad (78)$$

D – полная дисперсия потенциала силы тяжести V ;

$$\begin{aligned} (V_N, V_N) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega} \left[\sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right]^2 d\omega = \\ &= \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) = \sum_{n=2}^N D_n; \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned}
2(V, V_N) &= \frac{2}{4\pi} \iint_{\omega} V \left[\sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right]^2 d\omega = \\
&= 2 \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) = 2 \sum_{n=2}^N D_n; \tag{80}
\end{aligned}$$

$$D_n = \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \tag{81}$$

– степенная дисперсия потенциала силы тяжести.

Подставляя выражения (78), (79) и (80) в формулу (77), получим погрешность аппроксимации геопотенциала ограниченным рядом Фурье (76) степенью N

$$\varepsilon_N^2 = \|V - V_N\|^2 = D - \sum_{n=2}^N D_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} D_n. \tag{82}$$

Погрешность (82) зависит от остаточного члена в разложении (76). Для потенциала реальной Земли оценить остаточный член невозможно. Однако такую оценку можно сделать для мажорантного разложения. В работе [88] показано, что для Земли зональные коэффициенты разложения геопотенциала по сферическим функциям J_n убывают так, что соблюдается условие

$$|J_n| \leq n^{-\frac{5}{2}}. \tag{83}$$

Используя эту оценку, остаточный член мажоранты можно определить с помощью формулы [94]

$$O(k, N) \sum_{n=N+1}^{\infty} k^n n^{-\frac{5}{2}}, \tag{84}$$

где N – значение степени n , при котором ограничен ряд (2);

$$k = \frac{R}{r};$$

R – радиус Земли;

r – радиус-вектор точки, в которой вычисляется геопотенциал. Так как на поверхности Земли $R = r$ и, следовательно, $k = 1$, то получим оценку остаточного члена ряда (76)

$$O(1, N) \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\frac{5}{2}}. \quad (85)$$

Тогда погрешность аппроксимации, обусловленная ограничением ряда (76) степенью N , принимает следующий вид:

$$\varepsilon_N^2 = \|V - V_N\|^2 \approx O(1, N). \quad (86)$$

В работе [12] предложен следующий способ оценки погрешности аппроксимации геопотенциала и его дериват, обусловленной ограничением ряда Фурье по системе сферических функций, в основу которого положена дзета-функция Римана [84]

$$Z(k) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k}. \quad (87)$$

Ряд (87) при $k > 1$ сходится. Функцию $Z(k)$ можно аналитически продолжить, причем это продолжение однозначно и регулярно всюду, исключая точку. Если при некотором $k = k_0 > 1$, то

$$D_n \leq n^{-k_0}. \quad (88)$$

При $r = a_e$ в формуле (76) после преобразований получено выражение оценки сверху погрешности ограничения ряда (76) степенью N для геопотенциала V

$$\varepsilon_N^2(V) \leq \frac{1}{R^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-k} \quad (89)$$

и относительной погрешности геопотенциала

$$\left| \frac{V - V_N}{V} \right| \leq \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-k}}{2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}}. \quad (90)$$

По данным статистического анализа гравитационного поля Земли [65] установлено поведение ожидаемых степенных дисперсий для поля аномалий силы тяжести

$$D_n(\Delta g) = 166n^{-1.12} \quad (91)$$

и для высот квазигеода

$$D_n(\zeta) = 10^{-10} R^2 \frac{2n+1}{n^4}. \quad (92)$$

На основании этих данных в работе [12] получены формулы для вычисления погрешности аппроксимации, обусловленной ограничением ряда Фурье:

– для аномалий силы тяжести

$$\varepsilon_N^2(\Delta g) = 166 \left[Z(1,12) - \sum_{n=1}^N n^{-1,12} \right]; \quad (93)$$

– высот для квазигеоида

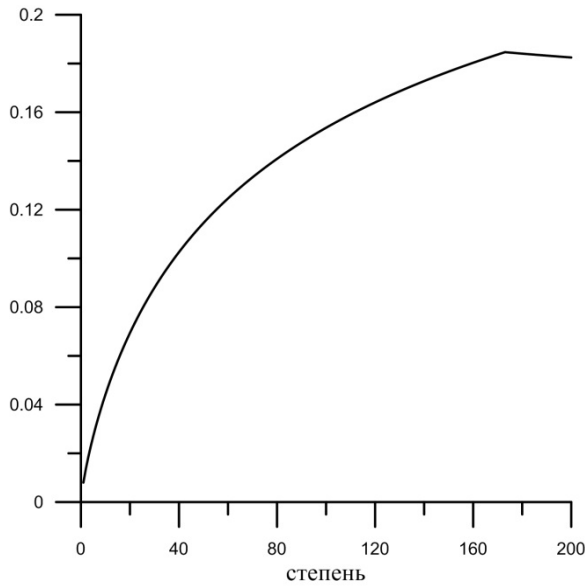
$$\varepsilon_N^2(\zeta) = 10^{-10} R^2 \left[2Z(3) + Z(4) - \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^4} \right]. \quad (94)$$

Результаты оценок $\left| \frac{V - V_N}{V} \right|$, $\varepsilon_N^2(\Delta g)$ и $\varepsilon_N^2(\zeta)$ по формулам (90), (93) и (94)

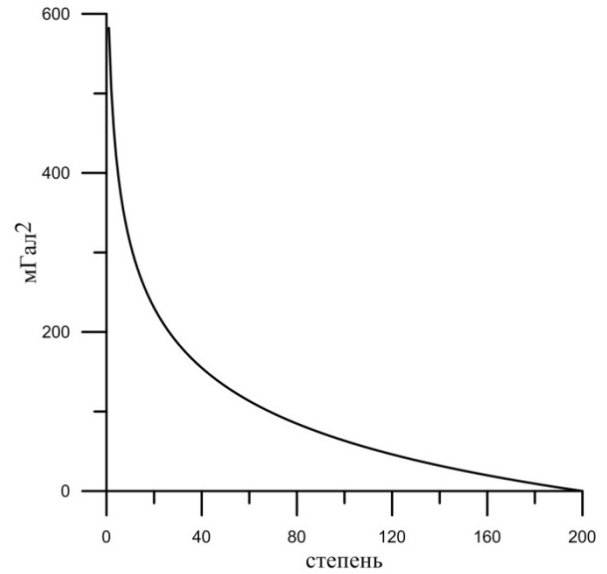
приведены в таблице 5 и на рисунке 8.

Таблица 5 – Оценки погрешности аппроксимации геопотенциала, аномалий силы тяжести и высот квазигеоида, обусловленной ограничением ряда Фурье степенью N

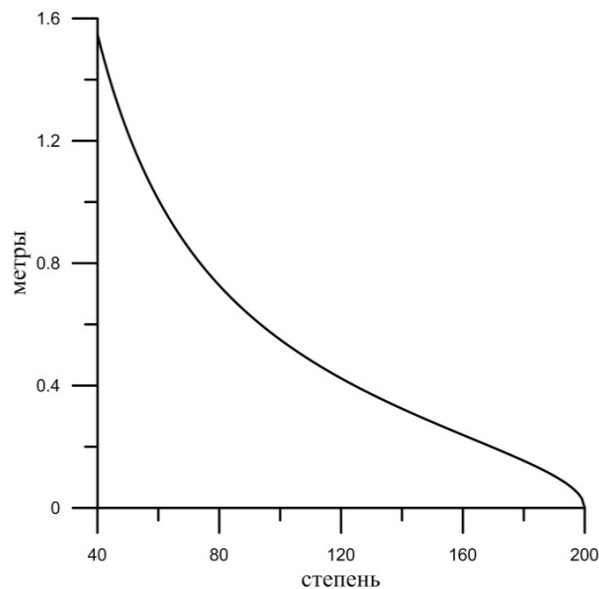
Степень ограничения ряда Фурье N	Относительная погрешность геопотенциала	Высота квазигеоида (в метрах)	Аномалия силы тяжести (10^{-5}м/с^2)
10	0,044	6,163	493,568
20	0,069	3,135	413,125
30	0,088	2,102	368,308
40	0,103	1,581	337,600
50	0,115	1,267	314,415
60	0,125	1,057	295,885
70	0,133	0,906	280,506
80	0,141	0,793	267,398
90	0,148	0,705	255,998
100	0,154	0,635	245,930
150	0,177	0,423	208,299
200	0,193	0,317	182,654
250	0,205	0,253	163,349
300	0,214	0,210	147,947
350	0,222	0,180	135,182
400	0,229	0,157	124,311
450	0,235	0,139	114,863
500	0,240	0,124	106,524
550	0,244	0,112	99,069
600	0,248	0,102	92,337
650	0,252	0,094	86,205
700	0,255	0,086	80,580
750	0,259	0,080	75,388
800	0,261	0,074	70,569



а)



б)



в)

Рисунок 8 – Графики оценок $O(1, N)$, $\left| \frac{V - V_N}{V} \right|$, $\varepsilon_N^2(\Delta g)$ и $\varepsilon_N^2(\zeta)$, вычисленных по формулам (90), (93) и (94): а) относительная погрешность геопотенциала; б) погрешности аппроксимации, обусловленной ограничением ряда Фурье для аномалий силы тяжести; в) погрешности аппроксимации, обусловленной ограничением ряда Фурье для высот квазигеоида

Анализируя поведение априорных оценок сверху величины погрешностей аппроксимации моделей геопотенциала в зависимости от числа учитываемых гармоник в ряде (10) можно сделать вывод, что увеличение количества учитываемых

мых членов приводит к тому, что априорная погрешность аппроксимации уменьшается. При этом оцениваются максимальные ожидаемые погрешности, превышение которых указывает на предельную степень N разложения геопотенциала (10), выше которой увеличение числа гармоник теряет смысл.

2.6 Регуляризирующие свойства стабилизирующего множителя устойчивого суммирования рядов Фурье по системе сферических функций при моделировании гравитационного поля Земли

Реальное гравитационное поле Земли имеет неограниченный спектр, а информацию об этом поле получают из измерений, которые содержат погрешности и определяют цифровые характеристики поля на дискретном множестве точек. В случае определения гравитационного поля спутниковыми методами получают конечные наборы гармонических коэффициентов геопотенциала в результате обработки различных сигналов как непрерывного, так и дискретного характера. При построении же модели приходится переходить к дискретному представлению, чтобы получить информацию в цифровой форме. Таким образом, информация о гравитационном поле, получаемая из различных измерений, дискретна и содержит погрешности измерений.

Наличие погрешностей в данных приводит к тому, что решение не будет единственным, а также возникают трудности в выяснении смысла полученного решения. Для решения задач такого рода может быть использовано применение методов регуляризации. Основная идея метода регуляризации заключается в сужении класса функций, среди которых идет поиск решения. Одним из эффективных методов приближенного решения таких задач является метод регуляризации Тихонова, в основе которого лежит понятие регуляризующего алгоритма [85, 91, 26, 123].

При изучении планетарной структуры гравитационного поля традиционно используется его представление в виде конечной суммы сферических гармоник [41, 23, 42, 43, 47]. По мере накопления экспериментальных данных детально-

го изучения глобального гравитационного поля Земли, получаемых в результате развития спутниковых технологий, появилась возможность увеличения количества гармоник в их разложении по сферическим функциям [25, 80, 60, 77, 116, 132].

Авторами рассмотрены практические аспекты применения методов регуляризации моделирования геопотенциала и его дериват рядом Фурье по системе сферических функций для моделей ITSG-Grace2014S и ITSG-Grace2014K, приведенных на сайте ICGEM.

В основу создания моделей ITSG-Grace2014S и ITSG-Grace2014K сотрудниками Института теоретической геодезии и спутниковой геодезии (Institute of Theoretical Geodesy and Satellite Geodesy, Австрия) положены результаты, представленные спутниковой миссией GRACE. Для реализации модели ITSG-Grace2014S использованы данные в промежутке времени с февраля 2003 г. по декабрь 2013 г., и получены результаты высокого разрешения до степени и порядка 200 при нерегуляризованном решении. Для реализации модели ITSG-Grace 2014K использован временной ряд возможных регуляризованных решений методом Каулы с высоким разрешением до степени и порядка 200 (февраль 2003 г. – декабрь 2013 г.).

В решении обратной гравиметрической задачи при изучении природы гравитационного поля возникает шум в предоставляемых данных спутниковой миссией GRACE, который медленно растет в средних и высоких степенях гармонических коэффициентов ежемесячных гравитационных данных [124].

Гравитационный потенциал Земли может быть представлен в виде гармонического разложения по степеням (76). Вклад высокостепенных гармонических коэффициентов геопотенциала затухает быстрее с увеличением высоты по сравнению с низкостепенными гармоническими коэффициентами и имеет меньшее влияние на параметры орбиты. Поэтому процедура инверсии для гравитационных гармоник вводит большую ошибку в оценках высших степеней гармонических коэффициентов по сравнению с коэффициентами низкой степени [130]. Эта неспособность процедуры оценки для «захвата» коротковолновых гравитационных аномалий является проблемой наблюдаемости. Оценка гравитационного поля, по-

лученного GRACE, в частности, зависит также от того, насколько хорошо покрыта наземными измерениями поверхность Земли на данный промежуток времени. Проблемы с пересчетом в нижнее полупространство и редкие наземные данные приводят к решению плохо обусловленной системы уравнений [115]. Это плохая обусловленность усиливает шум и вводит ошибки в оценке геопотенциала. Для того чтобы уменьшить эти ошибки, плохо обусловленная проблема также может быть стабилизирована методами регуляризации и путем добавления псевдоинформации [115]. Limoine и другие [131] стабилизировали гравитационные решения, ограничиваясь диапазоном степеней от 31 до 50 для статического гравитационного поля. Koch и Kusche [119] и Mayer-Guerr [120] предложили использовать правило Каулы [118] для эмпирического создания регуляризации ограничения с целью стабилизации проблемы гравитационной инверсии. Модель ITSG-Grace2014K разработана с учетом регуляризации Каула [117]. Но использование правила Каула для одновременных гравитационных решений вызывает значительное ослабление сигнала [126]. Регуляризацию данных GRACE в зависимости от степени и порядка выполняли Save и другие [125], Biancale и др. [98] и Bruinsma и др. [103].

В наших исследованиях рассмотрены регуляризованные методы суммирования рядов по сферическим функциям при моделировании трансформант глобального гравитационного поля Земли для моделей ITSG-Grace2014S и ITSG-Grace2014K, созданных по данным спутниковой миссии GRACE.

2.7 Устойчивые методы суммирования ряда Фурье по системе сферических функций

При моделировании глобального гравитационного поля Земли рядом Фурье по сферическим функциям в виде (76) гармонические коэффициенты определяются эмпирически и поэтому носят приближенный характер. Моделирование геопотенциала путем суммирования рядов Фурье по системе сферических функций с приближенными гармоническими коэффициентами $\{\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}\}$ состоит в том, что

в качестве приближенного значения суммы ряда (76) берется частичная сумма первых членов этого ряда, ограниченная степенью N , в виде (79).

Суммирование рядов Фурье с приближенными коэффициентами не обладает свойством устойчивости и, следовательно, является некорректно поставленной задачей [85]. В этой связи целесообразно воспользоваться методом регуляризации [50]. Наиболее простой регуляризацией является суммирование небольшого числа первых гармоник ряда Фурье.

Погрешность моделирования глобального гравитационного поля Земли $V(P)$ с помощью ряда Фурье $V_N(P)$ в точке $P \in \omega$ с приближенными гармоническими коэффициентами $\{\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}\}$ запишем в виде

$$\Delta_N = \rho(V, V_N) + \max_{P \in \omega} |\delta_N|, \quad (95)$$

где

$$\rho(V, V_N) = \max_{P \in \omega} |V(P) - V_N(P)|; \quad (96)$$

δ_N – погрешность моделирования поля $V(P)$, обусловленная погрешностью гармонических коэффициентов $\{\delta C_{nm}, \delta S_{nm}\}$.

Если ряд Фурье (76) в области ω сходится к исходному полю $V(P)$, то значение $\rho(V, V_N)$ убывает с увеличением степени N , а значение $\max_{P \in \omega} |\delta_N|$ наоборот возрастает. Тогда при некоторой степени N_0 существует минимум функции

$$\max_{P \in \omega} |\Delta_N| = \Delta_{N_0} = \rho(V, V_{N_0}) + \max_{P \in \omega} |\delta_{N_0}|. \quad (97)$$

Соответствующее минимуму (31) значение степени N_0 определяет оптимальное число учитываемых гармоник в ряде Фурье (10) функции $V_N(P)$.

В работе [50] показано, что дисперсия погрешности аппроксимации геопотенциала $V(P)$, рядом Фурье $V_N(P)$ по системе сферических функций оценивается по формуле (82), которая с учетом погрешности гармонических коэффициентов принимает следующий вид:

$$D\{\Delta_N\} = D - \sum_{n=0}^N (D_n - d_n), \quad (98)$$

где D – дисперсия исходного геопотенциала $V(P)$, имеющего неограниченный спектр,

$$D_n = \left(\frac{a_e}{r}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2); \quad (99)$$

– степенная дисперсия геопотенциала

$$d_n = \left(\frac{a_e}{r}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\delta\bar{C}_{nm}^2 + \delta\bar{S}_{nm}^2) \quad (100)$$

– степенная дисперсия погрешностей $\{\delta\bar{C}_{nm}^2, \delta\bar{S}_{nm}^2\}$ определения гармонических коэффициентов геопотенциала $V(P)$.

Из формулы (97) следует, что оптимальное число используемых гармоник может быть выбрано в зависимости от величины дисперсии $D\{\Delta_N\}$. Чем она меньше, тем больше должна быть степень N .

Другой метод регуляризации основан на выборе оптимального числа гармоник в ряде Фурье (76) по системе сферических функций в зависимости от величины относительной погрешности определения гармонических коэффициентов, определяемой по следующей формуле:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^n (\delta\bar{C}_{nm}^2 + \delta\bar{S}_{nm}^2)}{\sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2)}}. \quad (101)$$

В формуле (101) максимальная величина относительной погрешности $|\sigma_N|=1$ и соответствует случаю, когда погрешности гармонических коэффициентов $\{\delta\bar{C}_{nm}, \delta\bar{S}_{nm}\}$ равняются по величине абсолютным значениям коэффициентов $\{\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}\}$.

Соответствующее этому максимуму значение степени N_0 определяет оптимальное число суммируемых гармоник в ряде Фурье $V_N(P)$. Таким образом, если в классическом методе суммирования ряда Фурье путем перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ в частичной сумме (2) число N брать согласованным с погрешностью гармонических коэффициентов $\delta_N = \{\delta\bar{C}_{nm}, \delta\bar{S}_{nm}\}$, то такое суммирование будет устойчивым [85].

Более сложные методы регуляризации основаны на применении регуляризирующих множителей R_n . В этом случае ряд (10) будет иметь вид

$$V(\varphi, \lambda, r) = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^n R_n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (102)$$

где $R_n = \frac{1}{1 + K_n}$ – регуляризирующий множитель.

Если положить

$$R_n = \begin{cases} 1, & n \leq N, \\ 0, & n \geq N, \end{cases}$$

то получаем обычный метод суммирования ряда по формуле (76).

При малых степенях n значения $K_n = 0$, при больших степенях n значения $K_n \rightarrow \infty$. В этом случае регуляризация по числу членов ряда (102) означает, что $K_n = 0$ при $n \leq N_0$ и $K_n \rightarrow \infty$ при $n \geq N_0$, где значение степени N_0 определяет оптимальное число учитываемых гармоник в ряде Фурье (102).

В вариационном методе регуляризации по А. Н. Тихонову [85] при разложении геопотенциала в ряд Фурье по системе сферических функций в качестве стабилизирующего множителя в ряде (102) можно положить

$$R_n = \frac{1}{1 + \alpha(n+1)n}, \quad (103)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

Так как собственные числа $\lambda_n = (n+1)n$ всегда положительны и быстро растут при $n \rightarrow \infty$, то влияние погрешности гармонических коэффициентов геопотенциала на высоких частотах подавляется. Значение параметра регуляризации α должно быть согласовано с погрешностью исходных данных. На рисунке 9 приведен график стабилизирующего множителя R_n , вычисленного для $n = 3, \dots, N$ по формуле (103) при $\alpha = 0,001, 0,0001$ и $0,00001$.

В работе [50] предложено выражение для определения регуляризирующего множителя, при котором обеспечивается минимальная дисперсия погрешности аппроксимации реального геопотенциала $V(P)$, рядом Фурье $V_N(P)$ по системе сферических функций, в следующем виде:

$$R_n = \frac{1}{1 + \frac{d_n}{D_n}} = \frac{D_n}{D_n + d_n}, \quad (104)$$

где D_n и d_n – степенная дисперсия геопотенциала и степенная дисперсия его погрешности (погрешности гармонических коэффициентов геопотенциала n -й степени), вычисляемые по формулам (99) и (100).

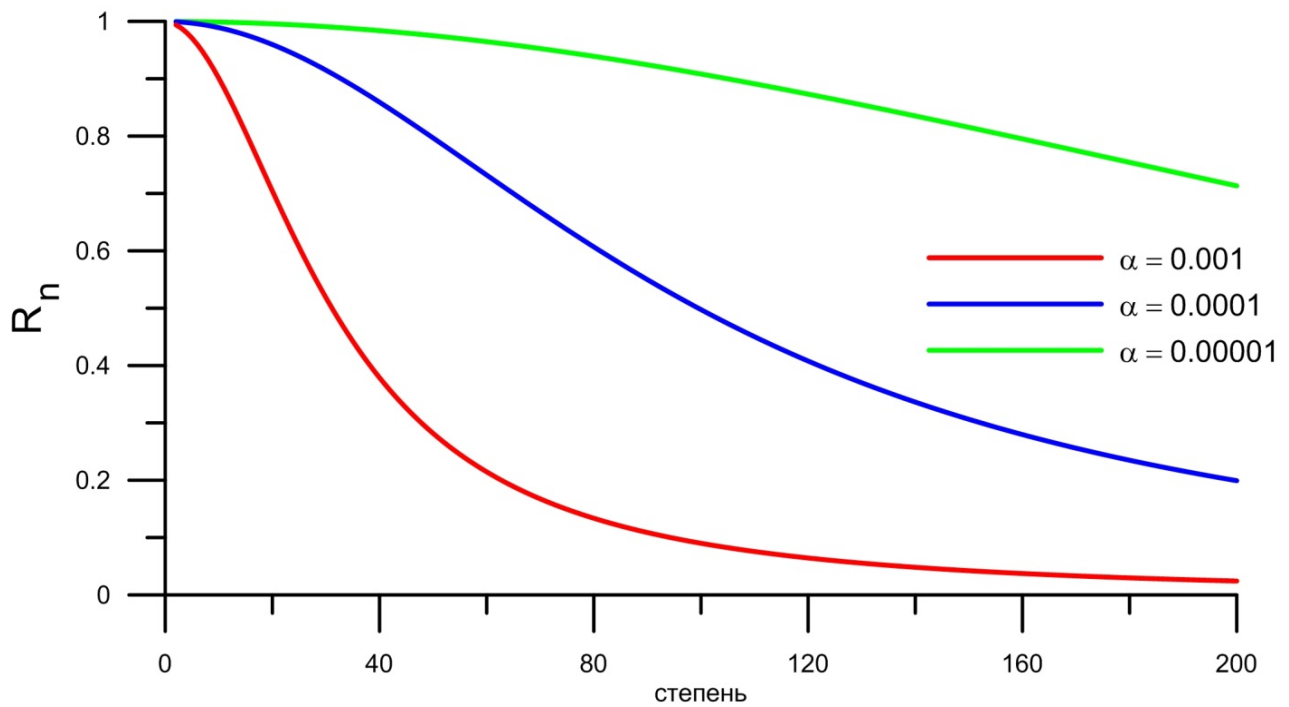


Рисунок 9 – График стабилизирующего множителя R_n , вычисленного для $n = 3, \dots, N$ по формуле (103)

На рисунке 10 представлены графики функции R_n вычисленные для $n = 3, \dots, N$ по формуле (103) с учетом эмпирически определенных степенных дисперсий геопотенциала и его погрешностей для рассматриваемых моделей.

Если оптимальный регуляризирующий множитель определить невозможно, то для вычисления значений R_n можно использовать модифицированный метод Пуассона – Абеля [75]

$$R_n = \exp\left(1 - \frac{n(n+1)}{(N+1)(N+2)}\right). \quad (105)$$

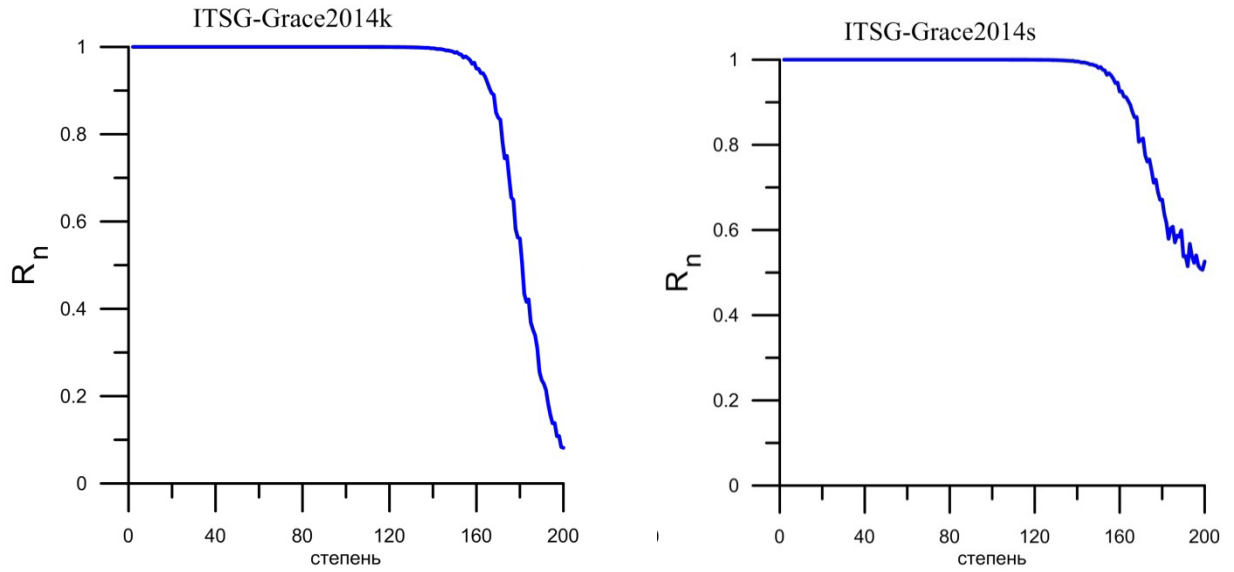


Рисунок 10 – Графики функции R_n вычисленные для $n = 3, \dots, N$ по формуле (103) с учетом эмпирически определенных степенных дисперсий геопотенциала и его погрешностей для исследуемых моделей

На рисунке 11 приведены график функции R_n , вычисленной для $n = 3, \dots, N$ по формуле (105).

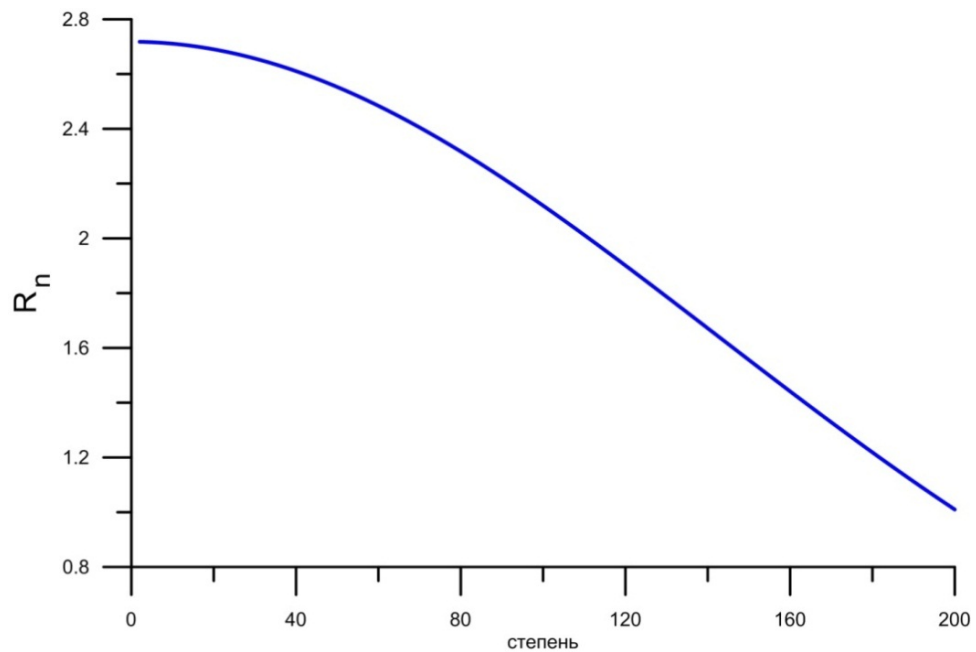


Рисунок 11 – График функции R_n , вычисленной для $n = 3, \dots, N$ по формуле (105)

2.8 Количественные характеристики точности моделирования глобального гравитационного поля Земли с учетом регуляризирующих множителей

Для оценки эффективности моделирования глобального гравитационного поля Земли с учетом регуляризирующих множителей R_n использованы наборы $\{\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}\}$ нормированных гармонических коэффициентов геопотенциала модели ITSG-Grace2014s и результаты измерений силы тяжести и высот квазигеоида на территории Новосибирской области. Сравнительная оценка точности регуляризированной глобальной модели высот квазигеоида выполнялась по формуле

$$\Delta\zeta(P) = \zeta_T(P) - \zeta_S(P), \quad (106)$$

где $\zeta_S(P)$ – высота квазигеоида, вычисленная в точке $P(\varphi, \lambda, r)$ по модифицированной формуле

$$\zeta(\varphi, \lambda, r) = R \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^n R_n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (107)$$

где $\Delta\bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm}^0$ – разность коэффициентов нормированных сферических функций реального и нормального поля силы тяжести;

\bar{C}_{nm}^0 – коэффициенты нормального геопотенциала отнесены к эллипсоиду WGS-84;

$$\zeta_T(P) = H^\Gamma(P) - H^\gamma(P) \quad (108)$$

– высота квазигеоида, в которой $H^\Gamma(P)$ – геодезическая высота, полученная по спутниковым данным; $H^\gamma(P)$ – нормальная высота, полученная из геометрического нивелирования.

Нормальные высоты $H^{\gamma}(P)$ были заданы для 208 пунктов $P(\phi, \lambda)$ на территории Новосибирской области. На этих же пунктах были выполнены спутниковые координатные определения в рамках развития геодезической сети активных базовых станций. В результате были получены геодезические высоты $H^{\Gamma}(P)$, средние квадратические погрешности которых находятся в интервале от 1,5 до 3,1 см, в среднем составляют – 1,8 см [29, 30].

Сравнительная оценка точности регуляризированной глобальной модели аномалии силы тяжести выполнялась по формуле

$$\delta g(P) = \Delta g_T(P) - \Delta g_S(P), \quad (109)$$

где $\Delta g_T(P)$ – аномалия силы тяжести, полученная из гравиметрических измерений на поверхности Земли;

$\Delta g_S(P)$ – аномалия силы тяжести, вычисленная в точке $P(\phi, \lambda, r)$ (по модифицированной формуле

$$\Delta g_S(P) = \gamma(\phi)R \sum_{n=2}^N (n-1)R_n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi), \quad (110)$$

где $\gamma(\phi)$ – нормальное значение силы тяжести.

В таблицах 6, 7 приведены результаты численного эксперимента по использованию регуляризирующих множителей R_n , полученных по формулам (103, 104) для модели ITSG-Grace2014s на территории Новосибирской области.

В этих таблицах строка А – результат применения регуляризирующего множителя по формуле (104), Б – по формуле (105), С – по формуле (103), столбец D вычисляется как модуль разности среднего квадратического отклонения (СКО), полученного по модели ITSG-Grace2014k и СКО, полученного по модели ITSG-Grace2014s с соответствующим множителем R_n .

Таблица 6 – Статистические параметры распределения разности $\Delta\zeta(P)$

(в метрах)		max	min	Среднее	СКО	D
А		-1,044	0,553	-0,098	0,359	0,120
Б		-3,362	3,135	0,081	1,591	1,352
С	$\alpha = 0,00001$	-1,183	0,804	-0,061	0,457	0,218
	$\alpha = 0,0001$	-1,193	0,556	-0,045	0,380	0,141
	$\alpha = 0,001$	-2,270	0,737	-0,378	0,686	0,447
	$\alpha = 0,01$	-6,826	-3,464	-4,654	0,766	0,527
ITSG-Grace2014s		-1,349	1,161	-0,045	0,613	0,374
ITSG-Grace2014k		-0,861	0,251	-0,144	0,239	

Таблица 7 – Статистические параметры распределения разности $\delta g(P)$

(в мГал)		max	min	Среднее	СКО	D
А		-17,315	22,198	1,282	10,061	2,843
Б		-53,967	96,081	-1,324	46,709	39,491
С	$\alpha = 0,00001$	-16,102	28,711	1,347	12,579	5,361
	$\alpha = 0,0001$	-12,548	16,817	2,888	7,383	0,164
	$\alpha = 0,001$	-11,503	24,102	3,321	10,626	3,407
	$\alpha = 0,01$	-14,688	24,159	1,613	11,712	4,493
ITSG-Grace2014s		-16,648	39,087	0,820	17,493	10,275
ITSG-Grace2014k		-18,420	13,571	1,735	7,218	

Приведенные в таблице 6 данные о точности суммирования ряда Фурье (107) со стабилизирующими множителями различной модификации показывают, что применение метода регуляризации со стабилизирующим множителем (19) при $\alpha = 0,000\ 072\ 85$ позволило повысить точность моделирования на 57 %. Модуль разности СКО, полученной по модели ITSG-Grace2014k и СКО, полученной по модели ITSG-Grace2014s с регуляризирующим множителем (103) при $\alpha = 0,000\ 072\ 85$ составил 0,115 м. Эта разность меньше погрешности определения высот квази-геода, полученных по данным глобальных моделей геопотенциала, примерно в 1,5–2,0 раза, и поэтому можно считать, что применение метода регуляризации со стабилизирующим множителем (103) при соответствующем выборе α аналогично методу регуляризации Каулы.

Приведенные в таблице 7 данные о точности суммирования ряда Фурье (110) показывают, что применение метода регуляризации со стабилизирующим множителем позволило повысить точность моделирования на 41 %. Модуль разности СКО, полученного по модели ITSG-Grace2014k, и СКО, полученного по модели ITSG-Grace2014s с регуляризирующим множителем (103) при $\alpha = 0,000\ 072\ 85$ составил всего 0,015 мГал, что подтверждает предыдущие выводы о равнозначности метода с регуляризирующим множителем (103) и метода Каулы.

2.9 Алгоритм определения разрешающей способности и точности современных глобальных моделей гравитационного поля Земли

Обычной формой описания глобального гравитационного поля Земли является разложение геопотенциала в ряд Фурье по системе сферических функций в геоцентрических координатах – геоцентрических радиуса-вектора r , широты φ , и долготы λ в виде (76).

Так как начало координат совмещено с центром масс Земли, то в выражении (76) отсутствуют сферические функции со степенями $n = 0$ и $n = 1$.

Суммирование в формуле (76) выполняется до бесконечности, а модели гравитационного поля Земли ограничиваются максимальной степенью N_0 . Соответственно ряд (76), ограниченный максимальной степенью N_0 , представляет собой спектральное разложение структуры гравитационного поля Земли по волнам длиной $360^\circ/N_0$, что соответствует пространственному угловому разрешению

$$\Delta = \frac{180^\circ}{N_0}. \quad (111)$$

В современных моделях гравитационного поля Земли обычно используют не «чистые» коэффициенты геопотенциала, а нормированные – \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} ,

и нормированные погрешности определения коэффициентов – $\sigma\bar{C}_{nm}$ и $\sigma\bar{S}_{nm}$. Так же нормируются присоединенные функции Лежандра.

Преобразовав уравнение (76), получим математическое ожидание. Так как сферические функции ортогональны, то в результате получим степенные дисперсии

$$D_n = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2), \quad (112)$$

где \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} – нормированные гармонические коэффициенты модели геопотенциала.

Совокупность степенных дисперсий (112) составляет спектр гравитационного поля в предположении его изотропности.

Имея погрешности определения коэффициентов, можно получить степенные дисперсии погрешностей

$$D(\sigma)_n = \sum_{m=0}^n (\sigma\bar{C}_{nm}^2 + \sigma\bar{S}_{nm}^2), \quad (113)$$

где $\sigma\bar{C}_{nm}$ и $\sigma\bar{S}_{nm}$ – погрешности определения коэффициентов.

Относительные погрешности гармонических коэффициентов можно вычислить, используя (112) и (113), по формуле

$$d_n = \frac{D_n}{D(\sigma)_n}, \quad (114)$$

где $n = 2 \dots N_0$.

Значение n при $d_n = 1$ является предельным значением степени разложения для модели геопотенциала, при котором погрешности коэффициентов превосходят сами коэффициенты.

Полная дисперсия модели вычисляется по формуле

$$D_{N_0} = \sum_{n=2}^{N_0} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2), \quad (115)$$

где N_0 – максимальная степень модели.

Используя формулы (112) и (115), получим погрешность аппроксимации геопотенциала рядом (76), ограниченного степенью N

$$\delta_N^2 = D_{N_0} - \sum_{n=2}^N D_n, \quad (116)$$

где $N = 2 \dots N_0 - 1$.

Величина δ_N характеризует точность модели, а значение N – предельную степень разложения геопотенциала для модели при достижении точности δ_N . Предельная степень N в свою очередь определяет по (111) пространственное угловое разрешение модели.

Используя выше описанные зависимости можно определить для модели геопотенциала погрешности аппроксимации аномалий силы тяжести и высот квазигеоида [79, 76, 78, 110].

Для аномалий силы тяжести Δg представим ряд (76) в виде

$$\Delta g = \gamma \sum_{n=2}^N (n-1) \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (117)$$

где $\Delta\bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm}^0$;

γ – нормальное значение силы тяжести;

\bar{C}_{nm}^0 – нормированные коэффициенты нормального потенциала;

\bar{P}_{nm} – нормированные присоединенные функции Лежандра.

Сферические степенные дисперсии Δg выражаются через коэффициенты $\Delta\bar{C}_{nm}$ и \bar{S}_{nm} следующим образом:

$$D_{\Delta g_n} = \gamma^2 (n-1)^2 \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm}^2 + \Delta\bar{S}_{nm}^2). \quad (118)$$

Используя формулы (118), (115) и (116), получим зависимость погрешности аппроксимации $\delta_{\Delta g_N}$ аномалий силы тяжести от степени N , представленную в виде ограниченного ряда Фурье (117) по системе сферических функций.

Для высот квазигеоида ζ представим ряд (76) в виде

$$\zeta = R \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (119)$$

где R – средний радиус Земли.

Сферическая степенная дисперсия высот квазигеоида ζ определяется выражением

$$D_{\zeta_n} = R^2 \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm}^2 + \Delta\bar{S}_{nm}^2). \quad (120)$$

Соответственно используя формулы (111), (115) и (116), получим зависимость погрешности аппроксимации δ_{ζ_N} высот квазигеоида от степени N , представленного в виде ограниченного ряда Фурье (76) по системе сферических функций.

2.10 Оценка разрешающей способности современных моделей глобального гравитационного поля Земли

Для оценки разрешающей способности современных моделей глобального гравитационного поля Земли использована информация, которая содержится в коэффициентах разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям.

Исследованы 15 современных глобальных моделей гравитационного поля Земли. Разделим условно эти модели на четыре вида: ультровысокостепенные с максимальной степенью 2190–2159 – 4 модели, высокостепенные с максимальной степенью 1420–1949 – 3 модели, высокостепенные с максимальной степенью 720 – 2 модели и 6 моделей с максимальной степенью разложения 360.

Особое место среди современных моделей занимает ультравысокостепенная гравитационная модель EGM-2008 в виде сферических гармоник геопотенциала до 2190-й степени [24, 108]. При создании этой модели были использованы: глобальная цифровая модель рельефа, уточненные наземные и морские гравиметрические, альтиметрические данные и данные международного космического проекта GRACE. Пространственное разрешение созданной модели EGM-2008 составляет около 10 км при восстановлении поля до 2190-й степени [60].

Обобщение имеющихся на данный момент экспериментальных данных, полученных при тестировании модели EGM2008, позволяет считать ультравысокостепенную модель EGM2008 вариантом опорной модели для вычисления характеристик глобального гравитационного поля Земли [60].

На рисунке 12 представлены графики отношений степенных дисперсий коэффициентов \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} к их ошибкам – d_n , вычисленных по формуле (114).

На вертикальной оси отложена логарифмическая шкала относительных погрешностей d_n . Значение, равное 1, соответствует погрешности, равной абсолютным значениям гармонических коэффициентов.

На рисунках 13–20 представлены графики степенных дисперсий коэффициентов аномалий силы тяжести Δg (a) и высот квазигеоида ζ (b) и степенные дисперсии

их абсолютных погрешностей, вычисленные по формулам (112), (113) и (118), (120) соответственно. На рисунках 13–20 оси шкал логарифмические.

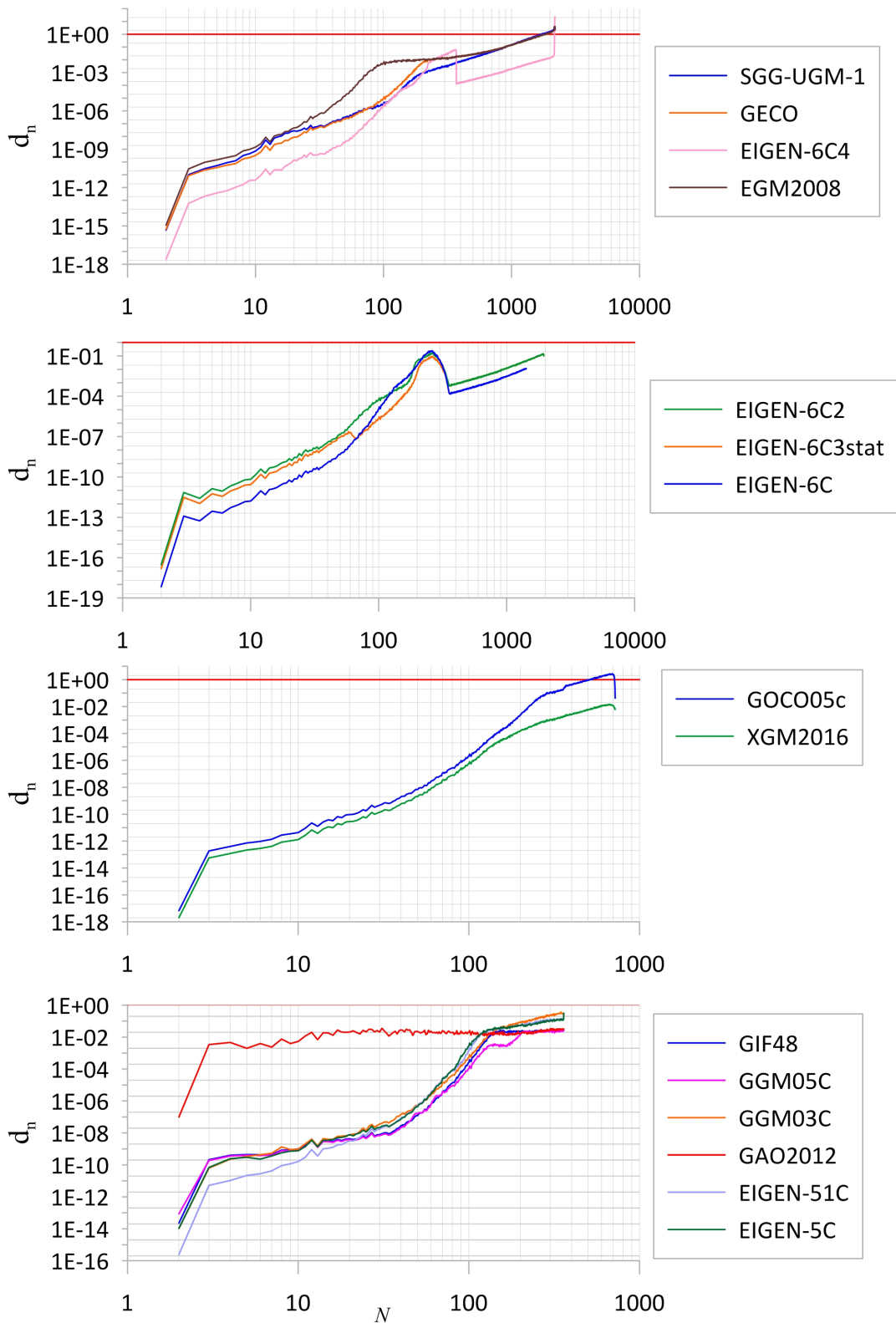


Рисунок 12 – Графики относительных погрешностей гармонических коэффициентов для исследованных моделей

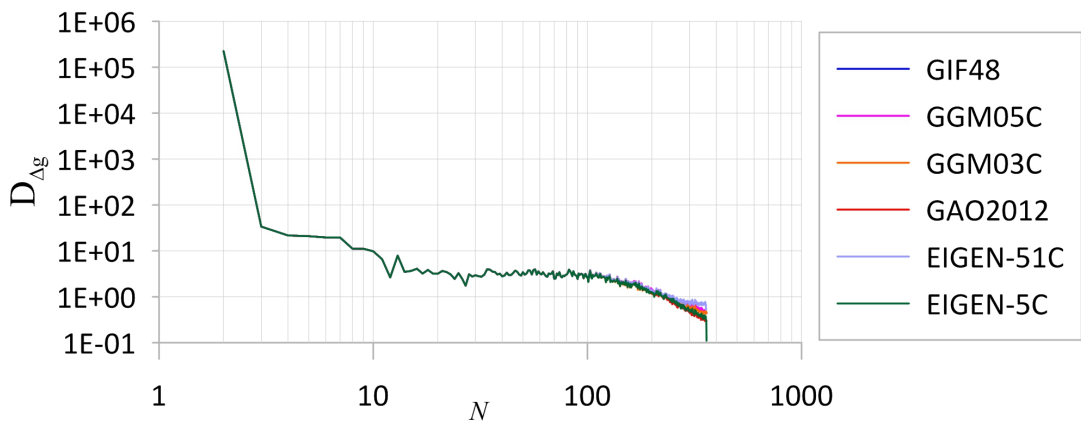
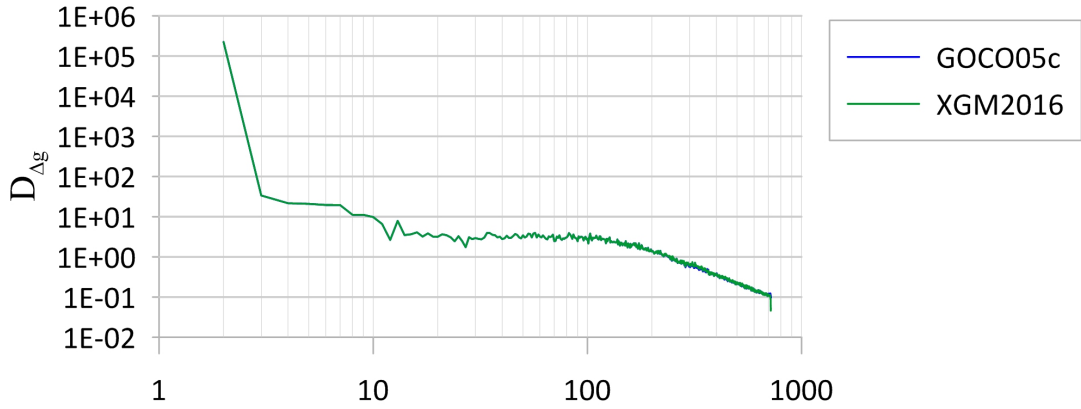
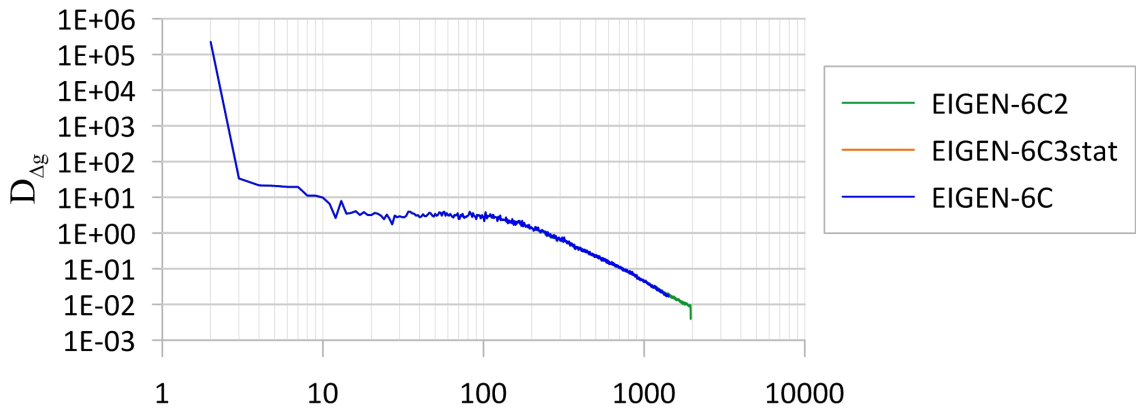
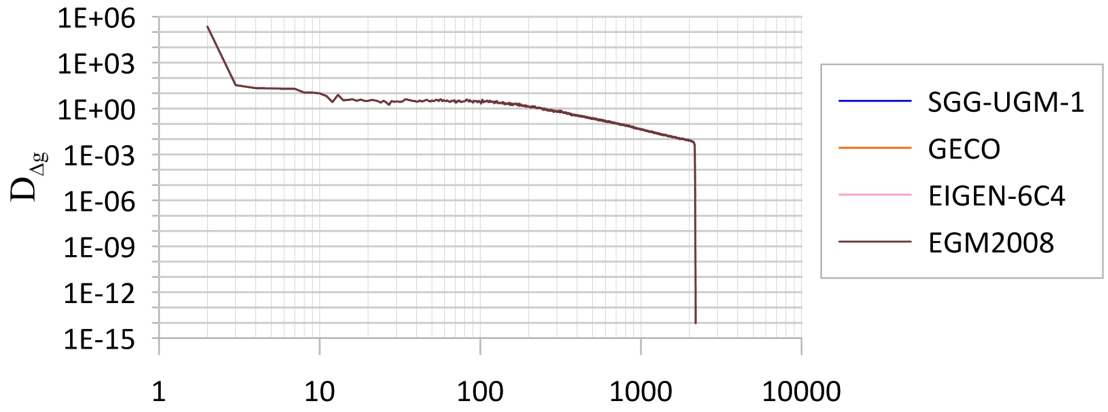


Рисунок 13 – Степенные дисперсии коэффициентов аномалий силы тяжести Δg (мГал)

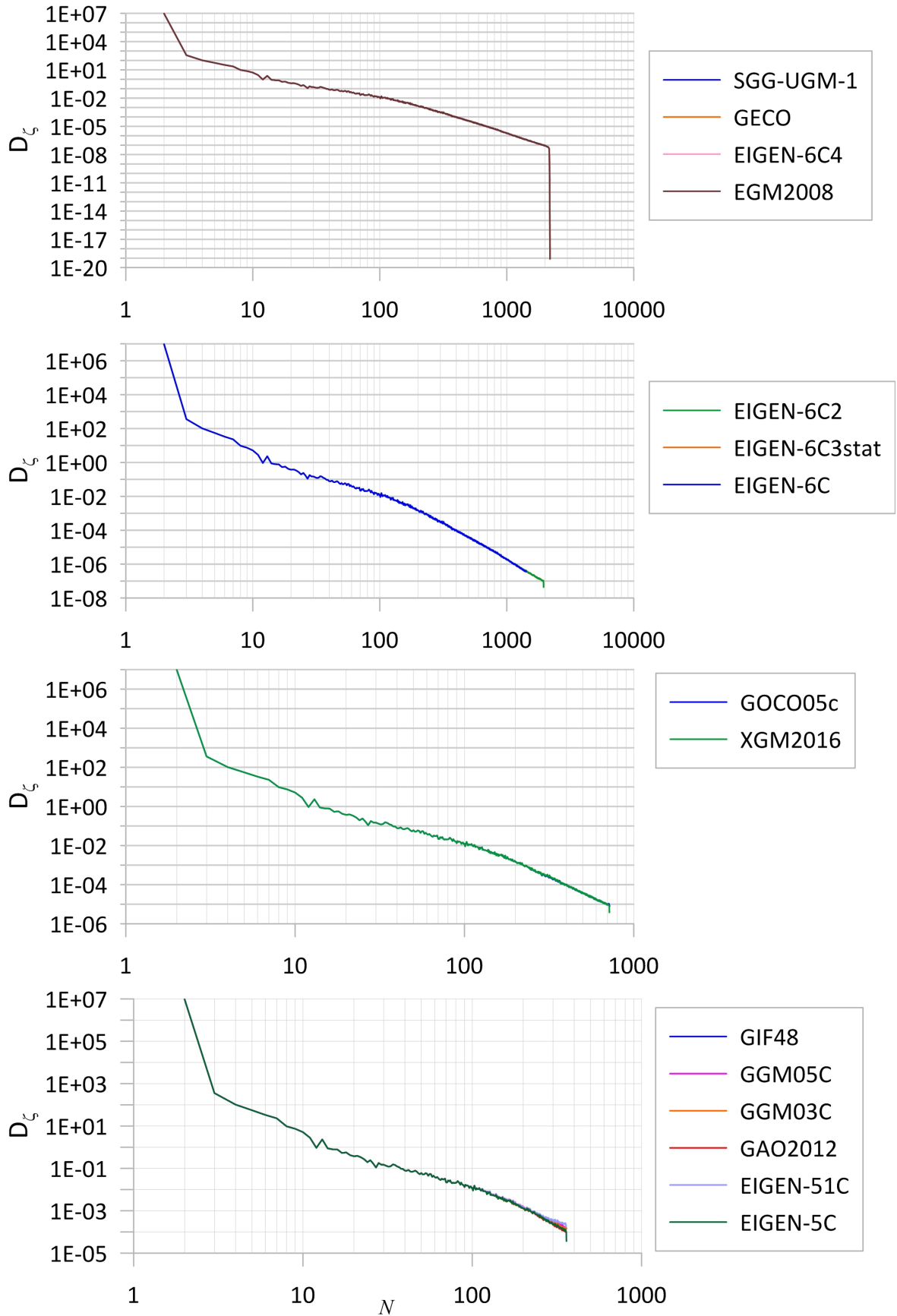


Рисунок 14 – Степенные дисперсии коэффициентов
высот квазигеоида ζ (м)

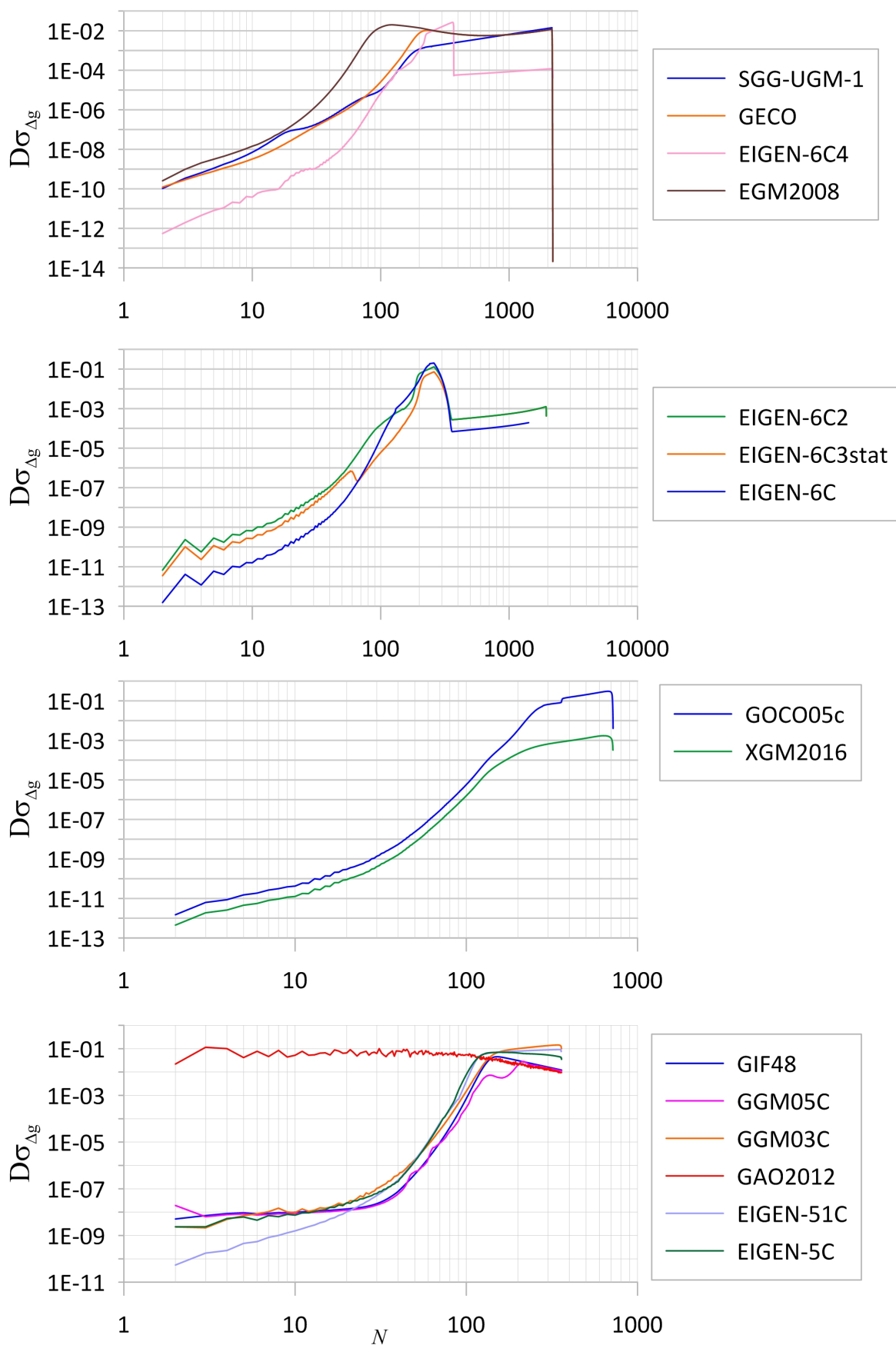


Рисунок 15 – Степенные дисперсии абсолютных погрешностей коэффициентов аномалий силы тяжести Δg (мГал)

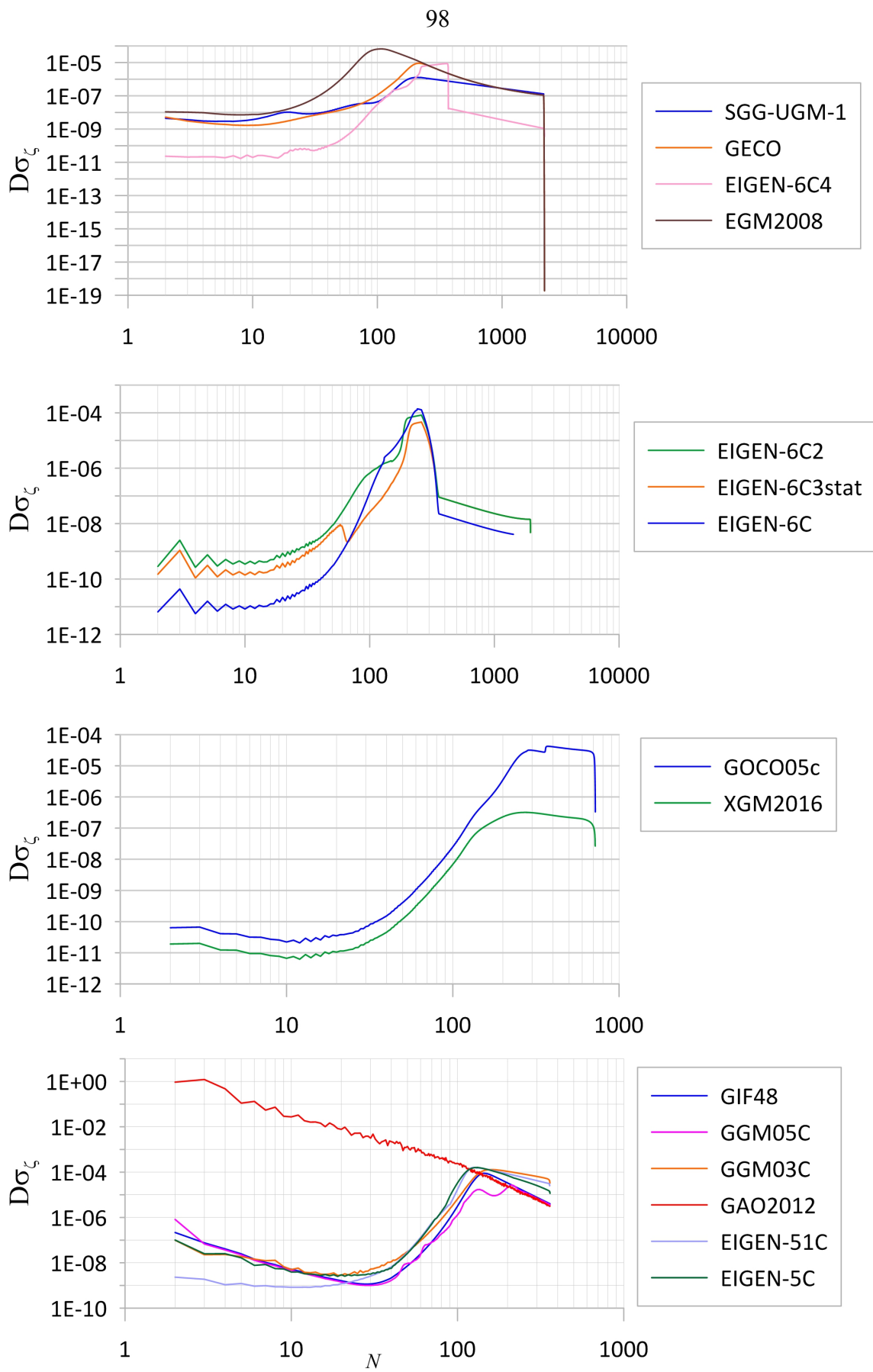


Рисунок 16 – Степенные дисперсии абсолютных погрешностей коэффициентов высот квазигеоида ζ (м)

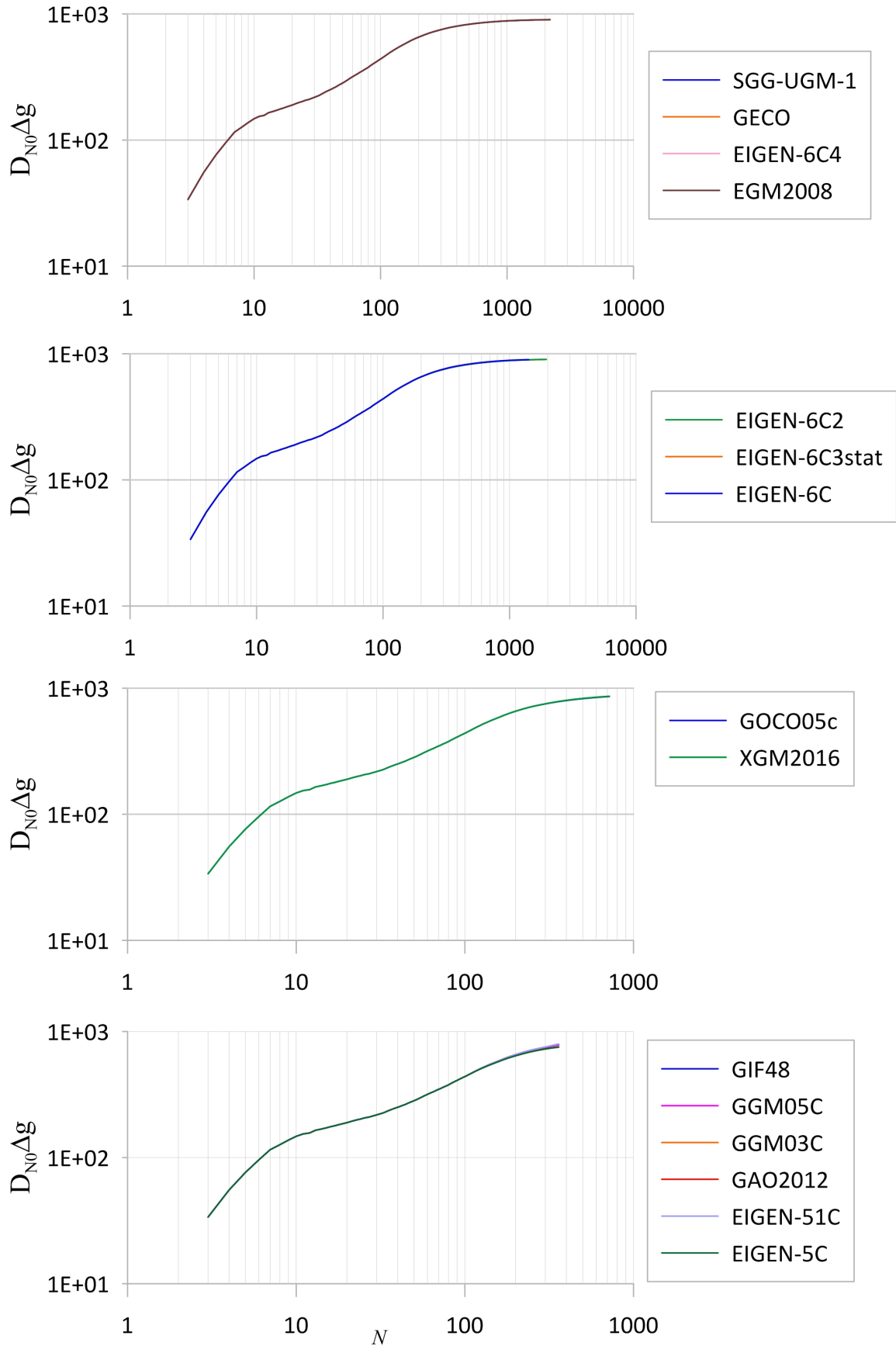


Рисунок 17 – Зависимость изменения дисперсии моделей от степени разложения ряда Фурье по сферическим функциям аномалий силы тяжести Δg (мГал)

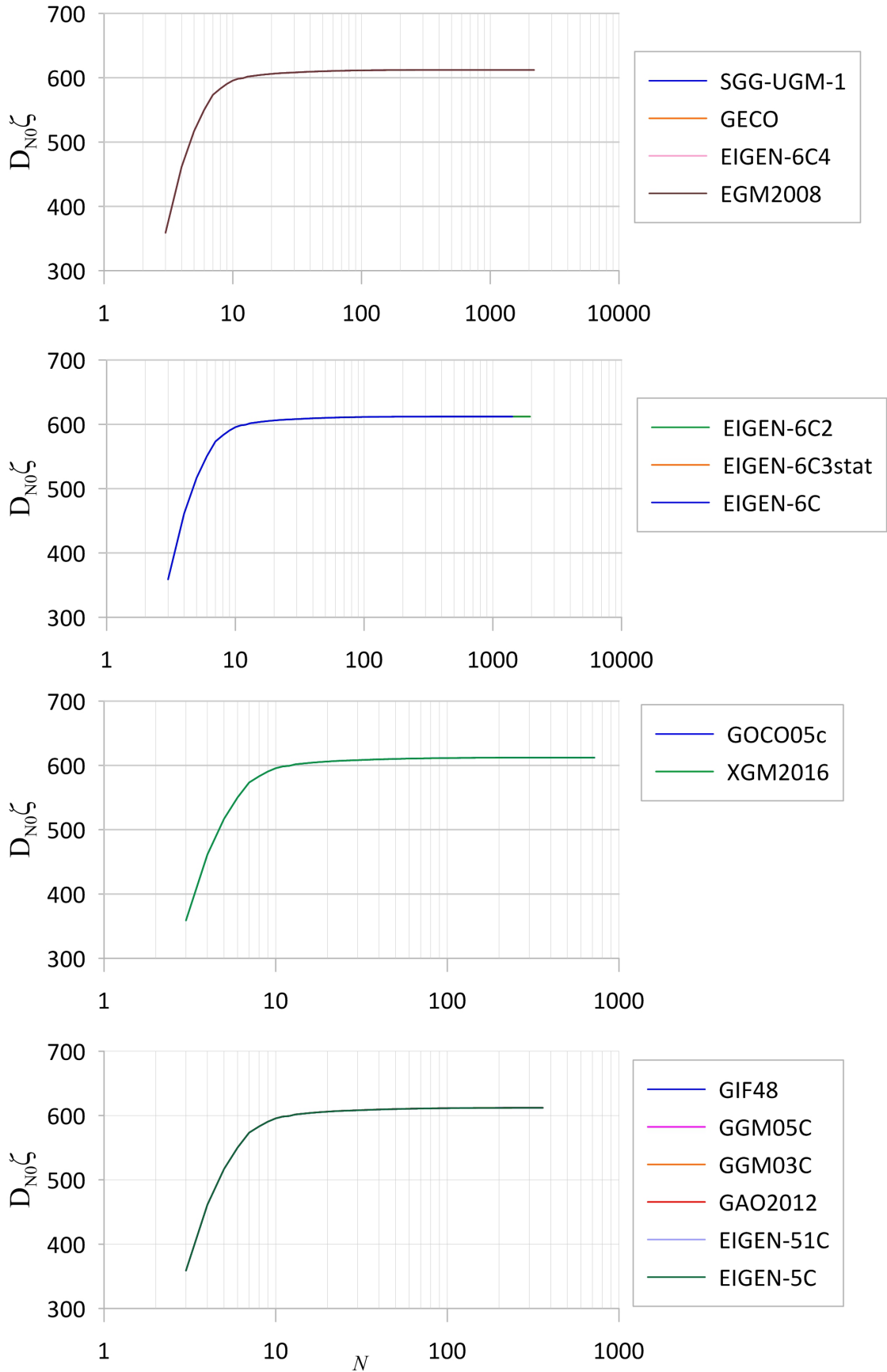


Рисунок 18 – Зависимость изменения дисперсии моделей от степени разложения ряды Фурье по сферическим функциям высот квазигеоида ζ (м)

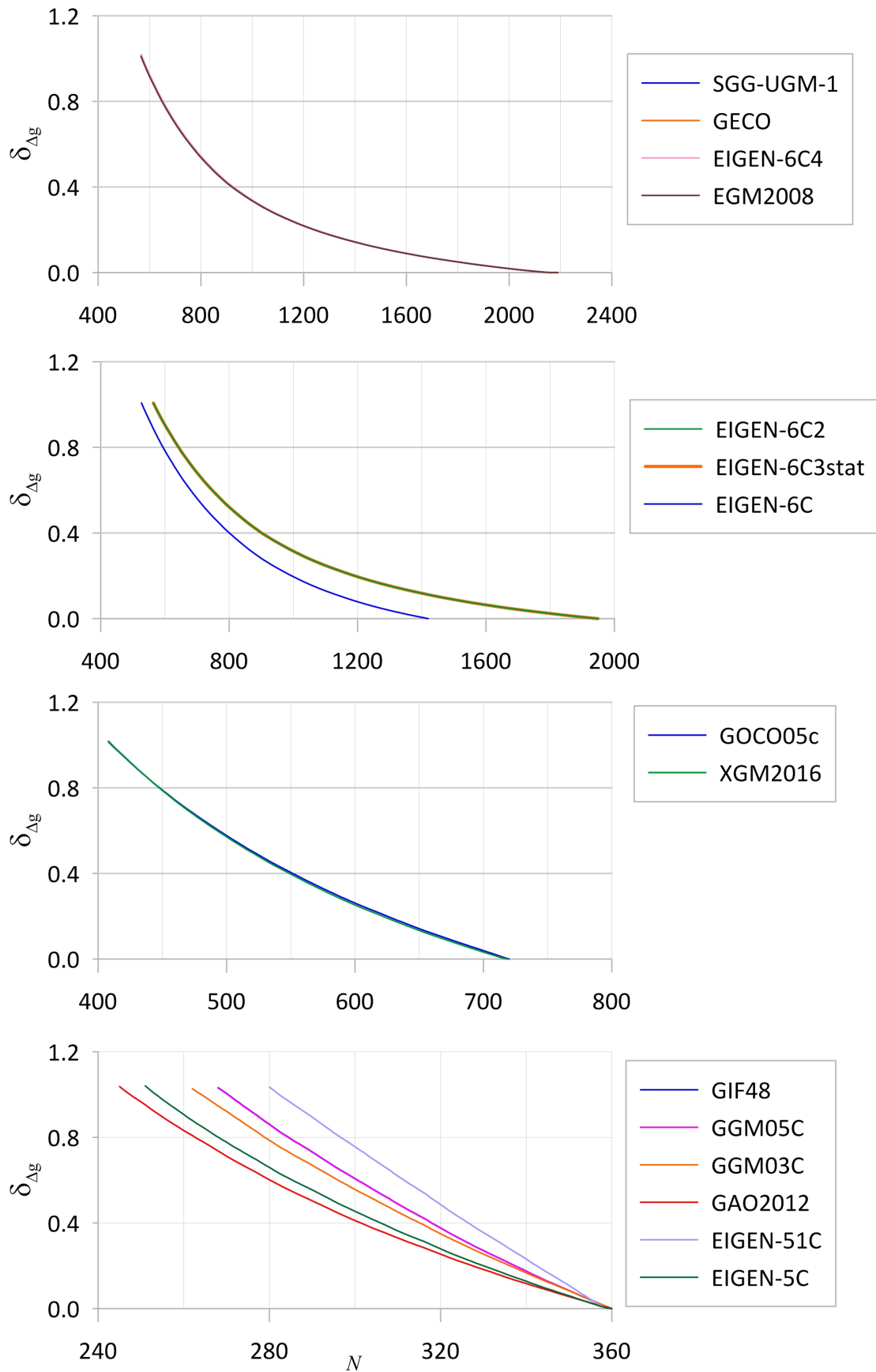


Рисунок 19 – Зависимости погрешности аппроксимации аномалий силы тяжести от степени N для исследованных моделей

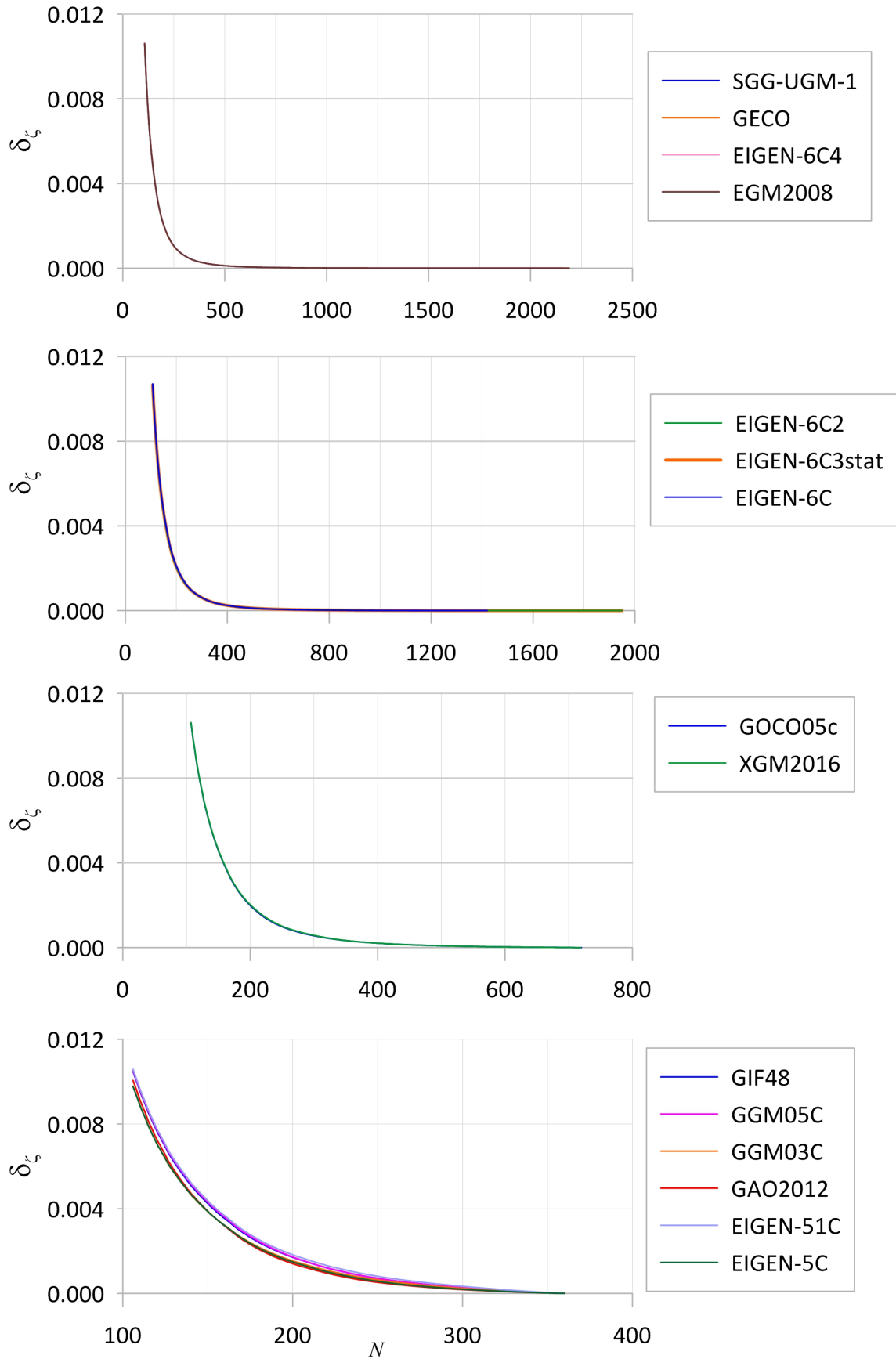


Рисунок 20 – Зависимости погрешности аппроксимации высот квазигеоида от степени N для исследованных моделей

На рисунках 17, 18 приведены графики изменения дисперсий аномалий силы тяжести Δg (мГал) и высот квазигеоида ζ (м) исследуемых моделей в зависимости от степени разложения N в ряды (115) соответственно.

На рисунках 19, 20 представлены результаты вычисления по формуле (116) зависимости от степени N погрешности аппроксимации аномалий силы тяжести и высот квазигеоида, обусловленной ограничением рядов (117) и (119) соответственно для моделей геопотенциала.

Результаты оценки разрешающей способности современных глобальных моделей геопотенциала приведены в таблице 8. Критерием оценки точности для значения высоты квазигеоида ζ и аномалии силы тяжести приняты значения, заявленные разработчиками проекта GOCE: 1 см и 1 мГал соответственно [99].

Таблица 8 – Спектральные характеристики исследуемых моделей ГПЗ

Модель	Максимальная степень модели N_0	Δ (км) при N_0	Степень n при $d_n = 1$	Δ (км) при $dn = 1$	Степень n при $\delta\zeta < 1$ см	Δ (км) при $\delta\zeta < 1$ см	Степень n при $\delta\Delta g < 1$ мГал	Δ (км) при $\delta\Delta g < 1$ мГал
1 EIGEN-6C4	2190	9	2170	9	110	177	574	34
2 SGG-UGM-1	2159	9	1702	12	110	177	571	35
3 EGM2008	2190	9	1845	11	110	177	571	34
4 GECCO	2190	9	1787	11	110	177	571	34
5 EIGEN-6c	1420	14	–	–	111	175	530	37
6 EIGEN-6c2	1949	10	–	–	110	177	567	34
7 EIGEN-6c3stat	1949	10	–	–	110	177	567	34
8 XGM2016	719	28	–	–	110	177	411	49
9 GOCO05c	720	28	506	39	110	177	411	49
10 GGM05C	360	56	–	–	109	183	271	74
11 GAO2012	360	56	–	–	107	187	248	81
12 GIF48	360	54	–	–	109	178	271	72
13 EIGEN -51c	359	54	–	–	109	178	283	69
14 EIGEN -5c	360	54	–	–	106	183	254	77
15 GGM03C	360	54	–	–	106	183	265	75

Из таблицы 8 видно, что значение высоты квазигеоида ζ со среднеквадратической погрешностью не более 1 см можно определить для всех рассматриваемых моделей при учете гармоник до степеней n от 106 до 110. Значения аномалии силы тяжести со среднеквадратической погрешностью не более 1 мГал можно получить для исследуемых моделей при учете гармоник до степеней n от 177 до 183.

Разрешающая способность модели EGM2008 ограничена максимальным порядком сферической гармоники $n=1845$, что соответствует пространственному разрешению 11 км.

Разрешающая способность модели EIGEN-6C4 ограничена максимальным порядком сферической гармоники $n = 2170$, что соответствует заявленному разработчиками пространственному разрешению 9 км.

Для модели GGM03C ошибки гармонических коэффициентов не достигают предельного значения погрешности и разрешающая способность модели соответствует заявленной разработчиками, а именно 54 км.

Наилучшее разрешение в пространстве имеют ультравысокостепенная модель EIGEN-6C4 и модель EGM2008.

Выводы по второму разделу

Проанализировав полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- большинство исследуемых современных глобальных моделей гравитационного поля Земли показали высокую внутреннюю точность, позволяющую получать аномалии силы тяжести до 1 мГал и высоты квазигеоида до 1 см;
- гармонические коэффициенты геопотенциала, полученные для современных моделей ГПЗ, согласуются между собой в пределах среднеквадратических погрешностей.

3 МЕТОДИКА КОМПЛЕКСНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ПО ДАННЫМ СОВРЕМЕННЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

3.1 Дифференциальные операции в гравитационном поле

В последние годы одна за другой появляются глобальные модели геопотенциала, в которых возрастает число рассматриваемых сферических гармоник и увеличивается разрешающая способность этих моделей [108]. Глобальные модели геопотенциала обеспечивают вычисление таких его характеристик, как высоты квазигеоида, уклонения отвесной линии, аномалии силы тяжести, а также компоненты тензора градиентов силы тяжести, необходимые для вычисления градиентов силы тяжести, кривизны уровенных поверхностей и силовых линий ГПЗ в любой точке земного шара.

В первом разделе диссертации было отмечено, что общепринятой и наиболее простой формой представления потенциала силы тяжести Земли в точке $P(\varphi, \lambda, \rho)$ является ряд сферических функций [8] следующего вида:

$$W(P) = \frac{fM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{C}_{n0} \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^n \bar{P}_{n0}(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi, \quad (121)$$

где φ, λ, ρ – геоцентрические широта, долгота и радиус вектор притягиваемой точки P ;

\bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} – безразмерные нормированные гармонические коэффициенты геопотенциала;

ω – угловая скорость вращения Земли;

a_e – большая полуось эллипсоида.

Поэтому и для его производных первого и второго порядков целесообразно использовать представление в форме таких же рядов сферических функций, как и ряд (121).

Как отмечено в работе [8] для производных от потенциала силы тяжести первого и второго порядков относительно координат x, y, z известны очень сложные математические выражения в виде функций сферических координат и стоксовых координат.

В диссертации предлагается методика поэтапного вычисления его производных и компонент тензора градиента силы тяжести. На первом этапе вычисляются первые производные от потенциала силы тяжести по сферическим координатам, которые имеют следующий вид:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{fM}{r^2} \sum_{n=0}^{N_0} (n+1) \frac{a_e^n}{r^n} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) + \omega^2 r \cos^2 \varphi; \quad (122)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{fM}{r} \sum_{n=0}^{N_0} \frac{a_e^n}{r^n} \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi); \quad (123)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{fM}{r} \sum_{n=0}^{N_0} \frac{a_e^n}{r^n} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \frac{d\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} - \omega^2 r^2 \cos \varphi \sin \varphi. \quad (124)$$

На втором этапе вычисляются вторые производные от производных потенциала первого порядка по сферическим координатам в геоцентрической сферической системе координат. Эти производные имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \frac{fM}{r^3} \left[\sum_{n=0}^N (n+1)(n+2) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] - \omega^2 \cos^2 \varphi; \quad (125)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \frac{fM}{r^3} \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \left(\frac{d^2 \bar{P}_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi^2} \right) - r^2 \omega^2 \cos^2 \varphi \right]; \quad (126)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} = \frac{fM}{r^3 \cos^2 \varphi} \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m^2 (-\bar{C}_{nm} \cos m\lambda - \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right]; \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} = & -\frac{fM}{r^3} \left[\sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \left(\frac{d\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} \right) \right] - \\ & - 2r\omega^2 \cos \varphi \sin \varphi; \end{aligned} \quad (128)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \lambda} = -\frac{fM}{r^3} \left[\sum_{n=0}^N (n+1) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right]; \quad (129)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \lambda} = -\frac{fM}{r^3 \cos \varphi} \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right]. \quad (130)$$

С использованием полученных формул в работе выполняется преобразование первых и вторых производных от потенциала силы тяжести относительно прямоугольных координат x, y, z .

Соответствующие выражения для производных первого порядка от потенциала силы тяжести имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \\ W_y &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \\ W_z &= \frac{\partial W}{\partial r} \end{aligned} \right\}. \quad (131)$$

Производные от W второго порядка определяются с помощью матрично-тензорного уравнения, в котором тензор производных в прямоугольной топоцентрической системе координат x, y, z выражается через тензор производных в геоцентрической сферической системе координат:

$$\begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{xy} & W_{zz} \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} W_{\varphi\varphi} & W_{\varphi\lambda} & W_{\varphi r} \\ W_{\lambda\varphi} & W_{\lambda\lambda} & W_{\lambda r} \\ W_{r\varphi} & W_{r\lambda} & W_{rr} \end{pmatrix}. \quad (132)$$

где R – матрица поворота.

Предполагается, что выражения для производных от потенциала W относительно сферических координат, следующие из (121), подставляются в правые части уравнений.

Полученные выражения для вторых производных и выражение для матрицы подставляются в уравнение (132).

В итоге, выражения (131) и (133) зависят не только от функций Лежандра, но также от их первых и вторых производных потенциала силы тяжести

$$\left. \begin{aligned} W_{xx} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}; \\ W_{yy} &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}; \\ W_{zz} &= \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}; \\ W_{xy} &= \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right); \\ W_{xz} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \varphi}; \\ W_{yz} &= \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial^2 W}{\partial r \lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

в котором тензор производных в прямоугольной топоцентрической системе координат x, y, z выражается через тензор производных в геоцентрической сферической системе координат.

По формулам (121)–(133) разработаны алгоритмы, для реализации которых составлены программы (свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2017614543, № 2018665784, № 2018666260, № 2015660860, № 2015661197, № 2017614700, № 2015661196, № 2019617930).

3.2 Методы определения уклонений отвесных линий

Уклонение отвесной линии (УОЛ) можно определить как угол между нормалью к отсчетной поверхности и направлением вектора силы тяжести. Если отсчетной поверхностью является общеземной эллипсоид, то уклонение отвеса называется абсолютным, если отсчетная поверхность – референц-эллипсоид, то уклонение отвеса называется астрономо-геодезическим и если отсчетная поверхность – поверхность уровенного эллипсоида, то уклонение отвеса называется гравиметрическим [33, 44, 52, 58, 68, 90, 121].

Источниками абсолютных УОЛ являются аномальное распределение масс Земли. Астрономо-геодезические УОЛ зависят от размеров и ориентировки референц-эллипсоида, а также от распределения масс Земли. Гравиметрические УОЛ обусловлены отступлением действительного гравитационного поля Земли от нормального.

УОЛ является одной из важных характеристик геометрической структуры гравитационного поля Земли. Данные об УОЛ необходимы для решения редуцированных задач геодезии и требуются, в частности, для высокоточной автономной навигации, где неточное знание УОЛ искажает показания инерциальных навигационных систем (ИНС). УОЛ содержит в себе информацию о напряженности и распределении аномальных масс в земной коре, которая необходима при решении задач геофизики и геодинамики. Проблема определения уклонений отвесных линий актуальна для всех регионов Земли [35, 1, 53, 32, 28, 22].

Уклонение отвесной линии u определяется по формуле

$$u = \xi \cos A + \eta \sin A, \quad (134)$$

где ξ и η – составляющие УОЛ в плоскости меридиана и плоскости первого вертикала соответственно; A – азимут плоскости полного уклонения отвеса u .

Традиционные методы определения уклонений отвесных линий сложны и трудоемки. Так, например, *астрономо-геодезический метод* требует выполнения высокоточных полевых астрономических и геодезических наблюдений. В этом методе составляющие уклонения отвеса ξ , η в формуле (134) можно определить в результате сравнения астрономических координат φ и λ с геодезическими B и L на пунктах геодезических сетей. Система координат $(\varphi, \lambda, W_0 - W)$ связана с силовыми линиями и уровенными поверхностями действительного потенциала силы тяжести $W(P) = C$. Система координат $(B, L, U_0 - U)$ связана с нормальной силовой линией и уровенной поверхностью нормального потенциала силы тяжести $U(P) = C'$, проходящими через данный пункт P . Нормальное поле не совпадает с действительным, поэтому координаты в нормальном поле отличаются от натуральных. Установим, для иллюстрации, связь этих систем координат. Введем топоцентрическую систему координат XYZ с центром в точке P на поверхности Земли и опишем вокруг этой точки вспомогательную единичную сферу (рисунок 21). Ось Z совместим с вектором γ нормальной силы тяжести, ось X направлена по касательной к меридиану на север, а ось Y – на восток. Проведем через точку P вектор g – действительной и вектор γ – нормальной силы тяжести, которые являются отвесными линиями действительного и нормального поля соответственно. В натуральной системе широта φ и долгота λ определены направлением вектора действительной силы тяжести g , в нормальной системе нормальная широта и долгота L определены направлением вектора нормальной силы тяжести γ .

Гравиметрический метод вычисления уклонений отвесных линий предполагает наличие детальной гравиметрической съемки на всей земной поверхности. Теоретические основы этого метода можно проиллюстрировать рисунком 22.

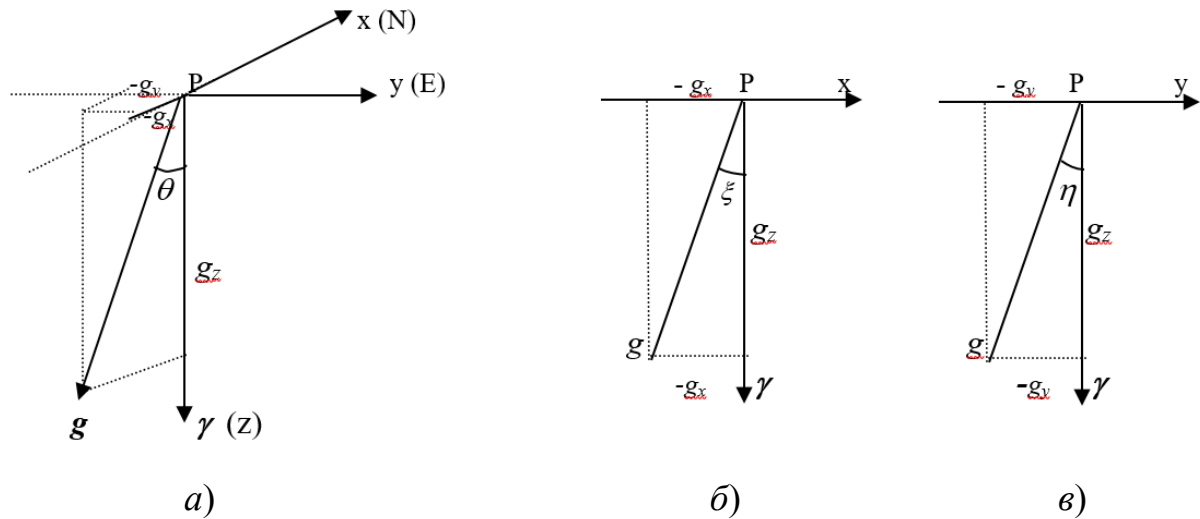


Рисунок 22 – Теоретические основы метода: а) гравиметрическое уклонение отвеса; б) составляющая уклонения отвеса в плоскости меридиана; в) составляющая уклонения отвеса в плоскости первого вертикала

Вектор g действительной силы тяжести можно разложить на составляющие g_x , g_y , g_z по осям координат X , Y и Z . На рисунке 22, а составляющие по осям X и Y противоположны направлениям осей, потому что вектор реальной силы тяжести отклонился к юго-западу от нормального. При таком взаимном положении векторов действительной и нормальной силы тяжести уклонение отвеса будем считать положительным.

Прямая Pg на рисунке 22, б является проекцией вектора g силы тяжести на плоскости меридиана и первого вертикала. Поэтому углы между Pg и осью Z будут составляющими ξ , η уклонения отвеса u в плоскости XPZ меридиана и в плоскости YPZ первого вертикала. Из рисунка 22 следует, что

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{g_x}{g_z}; \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{g_y}{g_z}. \quad (142)$$

Согласно определению потенциала, составляющие g_x и g_y силы тяжести равны производным от этого потенциала вдоль осей X и Y

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}; \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (143)$$

Так как потенциал силы тяжести W равен

$$W = U + T, \quad (144)$$

где U – потенциал нормальной силы тяжести; T – возмущающий потенциал.

Тогда выражения (143) с учетом (144) можно записать в следующем виде:

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}; \quad g_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (145)$$

Так как ось Z совмещена с нормальной силой тяжести γ (см. рисунок 22) и оси X и Y перпендикулярны вектору γ , то производные в выражениях (145) будут равны

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (146)$$

Нормальный потенциал U обычно выбирают близким к действительному W , составляющие отклонения отвеса невелики и не превышают нескольких секунд дуги. В связи с этим в (142) тангенсы углов можно разложить в ряд и оставить только первые члены этих разложений, а в знаменателе равенств (142) составляющую g_z силы тяжести вдоль оси z заменить нормальной силой тяжести γ . Учиты-

вая равенства (146), получим составляющие гравиметрических уклонений отвеса в следующем виде

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \eta = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (147)$$

Считая, что геоцентрический радиус-вектор точки M

$$\rho = R + H, \quad (148)$$

где R – средний радиус Земли;

H – геодезическая высота точки M ,

получим дифференциалы дуг меридиана и параллели

$$dx = \rho dB; \quad (149)$$

$$dy = \rho \cos B dL, \quad (150)$$

где B и L – геодезическая широта и долгота.

Подставив эти выражения в (147), получим:

$$\xi_{\text{гр}} = \frac{1}{\gamma \rho} \frac{\partial T}{\partial B}; \quad (151)$$

$$\eta_{\text{гр}} = \frac{1}{\gamma \rho \cos B} \frac{\partial T}{\partial L}. \quad (152)$$

Проблема определения возмущающего потенциала T , высот квазигеоида и уклонений отвеса по аномалиям силы тяжести, заданным на физической поверхности Земли, теоретически строго решена Молоденским М. С. в середине

прошлого века. Формулы Молоденского М. С. для вычисления уклонений отвеса содержат главный член, соответствующий формулам Венинг-Мейнеса, и ряд поправок, которые учитывают сложный характер физической поверхности Земли. Причем учет этих поправок очень сложен, а методика их вычислений для реальных условий, разработанная Юркиной М. И., Еремеевым В. Ф., Пеллиненом Л. П., Орловой Е. М., Коротковой Э. И., Ароновым В. И., Броваром В. В., Бьерхаммаром А. А. и др., пока недостаточно отработана.

В настоящее время при вычислении уклонений отвеса практическое применение имеют лишь известные формулы Венинг-Мейнеса [93]

$$\xi'' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g Q(\psi) \cos A dA d\psi, \quad \eta'' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g Q(\psi) \sin A dA d\psi, \quad (153)$$

где

$$Q(\psi) = -\frac{\rho''}{2\gamma} \cos^2 \frac{\psi}{2} \left[\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - \right. \\ \left. - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (154)$$

– функция Венинг-Мейнеса.

В таблице 9 приведены значения функции Венинг-Мейнеса $Q(\psi)$, вычисленные по формуле (154).

Функция $Q(\psi)$ непрерывна по всей области $0^\circ < \psi \leq 180^\circ$, кроме $\psi = 0^\circ$. С увеличением ψ значения функции $Q(\psi)$ убывают; при $\psi \approx 20^\circ$ $Q(\psi) < 1$, а при $\psi \approx 70^\circ$ $Q(\psi) = 1$. Эти особенности поведения функции $Q(\psi)$ используются при вычислении составляющих уклонения отвеса методами численного интегрирования.

Таблица 9 – Значения функции Венинг-Мейнесса

ψ°	Q	ψ°	Q	ψ°	Q
0		60	+0,22	130	-0,34
1	+12,35	70	+0,03	140	-0,24
10	+1,59	80	-0,15	150	-0,16
20	+1,02	90	-0,29	160	-0,08
30	+0,79	100	-0,38	170	-0,02
40	+0,61	110	-0,41	180	0,00
50	+0,43	120	-0,40		

Формулы (154) получены в результате дифференцирования выражения для возмущающего потенциала (155)

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\omega} \Delta g S(\psi) d\omega, \quad (155)$$

в формуле (151) – по широте, а в формуле (152) – по долготе.

Формулы (153) являются нулевым приближением к формулам Молоденского М. С. [48]. В нулевом приближении не учитывается сжатие Земли и наклоны физической поверхности, краевая поверхность сглаживается и становится сферой. Формулы нулевого приближения обеспечивают достаточную для решения практических задач геодезии точность только для пунктов, расположенных на равнине или на поверхности океана. Однако в холмистой и горной области формулы (153) не дают приемлемой точности. Например, уклонения отвеса по формулам нулевого приближения в равнинных районах получаются со средней квадратической ошибкой $\pm 0,3-0,5''$, тогда как в горах – с ошибкой $\pm 1,0-1,4''$ [55]. При этом в работах [63, 62, 95] показано, что удовлетворительный результат в горах можно получить, если исключить из аномалий силы тяжести влияние топографических масс, и все вычисления уклонений отвеса производить в поле остаточных аномалий силы тяжести. Затем необходимо восстановить влияние исключенных масс непосредственно на уклонения от-

веса. Искомые уклонения отвеса определяют как сумму двух слагаемых – влияния топографических масс и влияния аномальных масс. Влияние последних вычисляется по формулам Венинг-Мейнеса.

Наиболее удобны для вычислений формулы, предложенные Пеллине-ном Л. П. [63]

$$\xi'' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta g_{\text{нтр}} + 2\pi f \delta H^\gamma) Q(\psi) \cos A \, dA d\psi + \Delta \xi_p''; \quad (156)$$

$$\eta'' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta g_{\text{нтр}} + 2\pi f \delta H^\gamma) Q(\psi) \sin A \, dA d\psi + \Delta \eta_p'', \quad (157)$$

где $\Delta g_{\text{нтр}}$ – аномалия в неполной топографической редукции;

$2\pi f \delta H^\gamma$ – редукция Буге;

$\Delta \xi_p''$ и $\Delta \eta_p''$ – поправки за влияние топографических масс на составляющие уклонения отвеса ξ'' и η'' ;

δ – плотность топографических масс;

H^γ – нормальная высота.

В работах [63, 93] поправки $\Delta \xi_p''$ и $\Delta \eta_p''$ – разности притяжений некоторого топографического масса на ξ'' и η'' , расположенного между физической поверхностью и поверхностью, $H = H^\gamma = \text{const}$, проходящей через исследуемую точку, которые вычисляются по формулам

$$\begin{Bmatrix} \Delta \xi_p'' \\ \Delta \eta_p'' \end{Bmatrix} = \frac{\rho'' f \delta R^2}{\gamma} \iiint \frac{h}{r_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \begin{Bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{Bmatrix} d\omega, \quad (158)$$

где r – расстояние между исследуемой точкой и текущей точкой на физической поверхности Земли;

r_0 – расстояние между их проекциями на отсчетную поверхность;

A – азимут сферического расстояния ψ ;

γ – нормальная сила тяжести;

$h = H^\gamma - H_0^\gamma$ – разность нормальных высот между текущей на физической поверхности и исследуемой точек.

Исключить из аномалий силы тяжести влияния топографических масс можно путем сглаживания физической поверхности. Эти процедуры удаления топографических масс можно интерпретировать как перенос без изменения аномалий силы тяжести на поверхность $H = H^\gamma = \text{const}$, проходящей через исследуемую точку. При этом в работах [122, 93] предлагается для повышения точности формул (156) и (157) при переносе аномалий с физической поверхности на поверхность $H = H^\gamma = \text{const}$ учесть их вертикальный градиент. В работе [62] показано, что учет поправки за рельеф в формулах (156) и (157) дает с точностью порядка $\frac{\Delta g}{\gamma} H$ тождественный результат, который получился бы в случае применения формулы Молоденского в первом приближении [48].

3.3 Методика вычисления составляющих уклонения отвесной линии по данным глобальных моделей геопотенциала

В последние годы регулярно публикуются глобальные модели геопотенциала в виде частичной суммы гармонических коэффициентов \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} ряда Фурье по системе сферических функций координат – геоцентрического радиуса вектора r , широты φ и долготы λ , ограниченной степенью N [118]

$$V(\varphi, \lambda, r) = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (159)$$

где fM – геоцентрическая гравитационная постоянная;

a_e – экваториальный радиус Земли;

r – радиус-вектор точки наблюдения (φ, λ, r) ;

\bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} – безразмерные нормированные гармонические коэффициенты геопотенциала степени n и порядка m ;

$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ – нормированные присоединенные функции Лежандра.

Для вычисления составляющих уклонения отвесной линии используются гармонические коэффициенты возмущающего потенциала $(\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm})$, получаемые путем вычитания гармонических коэффициентов нормального поля из гармонических коэффициентов геопотенциала.

Определяя производные возмущающего потенциала путем гармонического синтеза по коэффициентам, вычисляют составляющие уклонения отвесной линии в плоскости меридиана ξ и первого вертикала η в точке с полярными пространственными координатами φ, λ, r по следующим формулам:

$$\eta'' = - \left[fM \sum_{n=2}^{N_0} \frac{a_e^n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n m (-\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] \cdot \sec \varphi \cdot \frac{\rho''}{N}; \quad (160)$$

$$\xi'' = - \left[fM \sum_{n=2}^{N_0} \frac{a_e^n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \frac{d\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} \right] \cdot \frac{\rho''}{M}, \quad (161)$$

где $\rho'' = 206\,265$;

$\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm}^0$ – разность нормированных коэффициентов сферических функций реального и нормального поля силы тяжести;

\bar{C}_{nm}^0 – коэффициенты нормального поля силы тяжести (например, общеземного эллипсоида WGS-84);

N – радиус кривизны в первом вертикале;

M – радиус кривизны в меридиане.

Полярные пространственные координаты φ, λ, r для каждого определяемого пункта преобразуют из геодезических координат B, L, H в общеземной системе отсчета (например, общеземного эллипсоида WGS-84).

Радиусы кривизны в первом вертикале и меридиане вычисляют по формулам

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B})^3}. \quad (162)$$

В формулах (162) a и e – большая полуось и эксцентриситет общеземного эллипсоида, соответственно.

3.4 Методика вычисления составляющих уклонения отвесной линии в горах по данным глобальных моделей геопотенциала

Результаты вычисления уклонения отвесных линий, полученные по данным модели геопотенциала EIGEN-6C4 для горных районов (высота более 500 м), показывают неудовлетворительную сходимость с наземными данными. Это обусловлено тем, что разрешающая способность используемой модели геопотенциала недостаточна в районах с относительно большими перепадами высот. В этом случае имеет место эффект сглаживания высоких частот гравитационного влияния топографических масс. Если увеличивать максимальную степень разложения N ряда, то можно было бы описать потенциал и его производные, какими бы слож-

ными они ни были. Однако в настоящее время расширить спектральный состав глобальных моделей геопотенциала в область высоких частот пока не удастся. Решить эту проблему можно лишь с помощью специальных спутниковых проектов, суть которых заключается в том, что спутник играет роль высокоточного гравитационного зонда, способного нащупать малейшие изменения в структуре поля Земли. Добиться этого можно только при условии выполнения трех базовых принципов [129]:

- минимально возможная высота орбиты (от 200 до 500 км);
- непрерывное слежение за спутником в трех пространственных измерениях;
- вдоль больших орбитальных дуг;
- дифференциация гравитационных и негравитационных сил, воздействующих на спутник.

Более подробную информацию о будущих проектах спутниковой гравиметрии можно найти в [82].

В работе [34] был рассмотрен способ детализации глобальных моделей геопотенциала на основе информации о рельефе земной поверхности высокого разрешения. Этот способ базируется на использовании космической информации о рельефе земной поверхности высокого разрешения, обеспечивающей учет тонкой структуры гравитационного поля Земли без привлечения дополнительной гравиметрических данных. Но и такой подход имеет ограниченные возможности повышения разрешающей способности модели.

Для учета влияния топографических масс на уклонение отвесной линии в ближней зоне в горных районах, в диссертации разработана новая методика, в которой автоматически определяется радиус учитываемой области и плотность горных пород.

В основе данной методики лежит построение в окрестности результирующей точки трехмерной модели топографических масс. Эти массы аппроксимируются набором элементарных параллелепипедов, аппликаты которых задаются цифровой моделью местности [100]. Для каждого параллелепипеда задается плотность,

соответствующая геологическим данным, и вычисляются первые производные потенциала притяжения, суммирование которых определяет гравитационное влияние топографических масс на составляющие отклонения отвесной линии в плоскости первого вертикала и в плоскости меридиана.

От каждого однородного прямоугольного параллелепипеда путем интегрирования вычисляют элементарные значения вариаций гравитационного потенциала и его производных и суммируют, определяют их полные значения в исследуемой точке.

Для вывода формул и построения алгоритма разместим элементарные прямоугольные параллелепипеды так, чтобы их грани были параллельны координатным плоскостям принятой условной прямоугольной системы координат $OXYZ$ (рисунок 23).

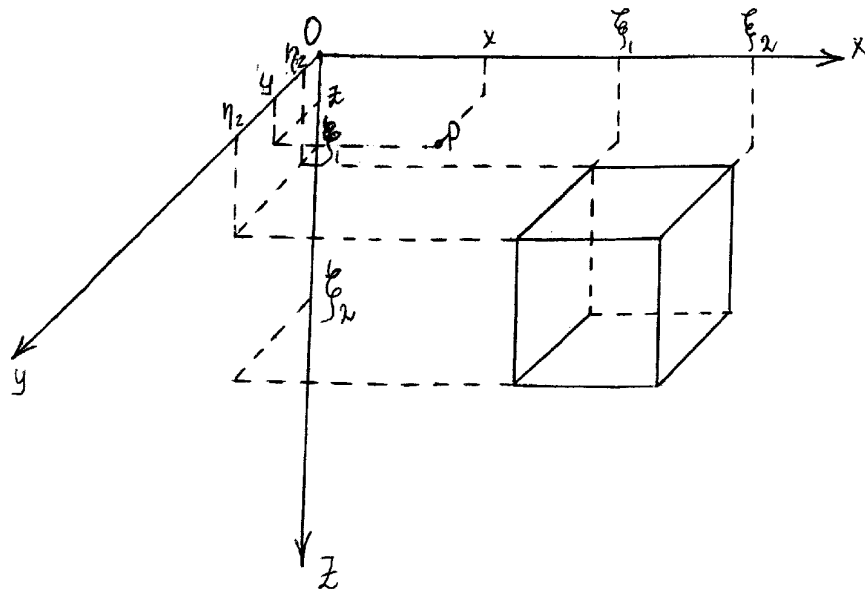


Рисунок 23 – Расположение элементарного прямоугольного параллелепипеда относительно принятой условной системы координат

Пусть в этой системе координат ось Z совпадает с направлением вектора силы тяжести в точке, принятой за начало условной системы координат; x, y, z – координаты точки P , в которой вычисляют вариации гравитационного потенциала

и его производные; $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ – координаты вершин параллелепипеда. Вариации гравитационного потенциала и его первых производных, создаваемые моделью топографических масс в виде системы из $n = K \times L$ однородных прямоугольных параллелепипедов $(M) = \{\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2\}$, вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} V(T) &= f\delta \iiint_M (d\xi d\eta d\zeta) / R; \\ R &= (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)^{1/2}; \\ \xi - x &= \xi', \eta - y = \eta', \zeta - z = \zeta'; \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

$$V(T) = f\delta \iiint_M \frac{d\xi}{R} \frac{d\zeta}{R} \frac{d\eta}{R}; \quad (164)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(P) = \frac{dV(P)}{dx} = f\delta \iiint_M \frac{\xi' d\xi}{R^3} \frac{d\zeta}{R} \frac{d\eta}{R} \quad (165)$$

– горизонтальная составляющая притяжения параллелепипеда M по оси X ;

$$\frac{\partial V}{\partial y}(P) = \frac{dV(P)}{dy} = f\delta \iiint_M \frac{\eta' d\xi}{R^3} \frac{d\zeta}{R} \frac{d\eta}{R} \quad (166)$$

– горизонтальная составляющая притяжения параллелепипеда M по оси Y .

В формулах (163)–(166): δ – плотность масс однородного параллелепипеда M ; f – гравитационная постоянная.

Выполняя последовательно интегрирование по ξ', ζ', η' , получают выражения для вычисления в точке $P(x, y, z)$ потенциала притяжения однородного прямоугольного параллелепипеда M и его производных в виде

$$V(P) = f\delta \left[\begin{array}{l} \eta'\zeta'\ln(\xi'+R) + \eta'\xi'\ln(\zeta'+R) + \xi'\zeta'\ln(\eta'+R) + \frac{\xi'^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{\xi'R}{\eta'\zeta'} + \\ + \frac{\eta'^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{\eta'R}{\zeta'\xi'} + \frac{\zeta'^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{\zeta'}{\xi'\eta'} \end{array} \right]_{\substack{\xi_2' \eta_2' \zeta_2' \\ \xi_1' \eta_1' \zeta_1'}}; \quad (167)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(P) = -f\delta \left[\zeta'\ln(\eta'+R) + \eta'\ln(\zeta'+R) + \xi' \operatorname{arctg} \frac{\xi'R}{\eta'\zeta'} \right]_{\substack{\xi_2' \eta_2' \zeta_2' \\ \xi_1' \eta_1' \zeta_1'}}; \quad (168)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(P) = -f\delta \left[\zeta'\ln(\zeta'+R) + \xi'\ln(\zeta'+R) + \eta' \operatorname{arctg} \frac{\eta'R}{\xi'\zeta'} \right]_{\substack{\xi_2' \eta_2' \zeta_2' \\ \xi_1' \eta_1' \zeta_1'}}. \quad (169)$$

В формулах (168)–(169) определенные интегралы вычисляются с помощью алгоритма

$$F(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\substack{\xi_2 \eta_2 \zeta_2 \\ \xi_1 \eta_1 \zeta_1}} = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{p=1}^2 (-1)^{m+n+p} F(\xi_m \eta_n \zeta_p), \quad (170)$$

где $F(\xi, \eta, \zeta)$ – подынтегральные функции в формулах (167)–(169).

Поправка за топографические массы вычисляется в результирующей точке P по следующим формулам:

$$\eta_P'' = \frac{\rho''}{\gamma_T} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^L \left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x} \right); \quad (171)$$

$$\xi_P'' = \frac{\rho''}{\gamma_T} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^L \left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial y} \right), \quad (172)$$

где η''_p и ξ''_p – влияние топографических масс на уклонение отвесной линии в результирующей точке в плоскости первого вертикала и меридиана соответственно;

γ_T – нормальное значение силы тяжести в результирующей точке;

V_{ij} – потенциал притяжения от i, j -го элемента модели;

K и L – количество учитываемых зон вдоль меридиана и первого вертикала соответственно. Алгоритм построен таким образом, чтобы предел значений K и L , характеризующих радиус учитываемой области, определялся автоматически.

В таблице 10 приведены стандартные отклонения между составляющими уклонения отвеса в горных районах Западной Сибири, полученными по формулам (160) и (161) с учетом ограниченного набора гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 с учетом и без учета поправки за рельеф и астрономо-геодезическими уклонениями отвеса, полученными из измерений на пунктах Лапласа.

Таблица 10 – Стандартные отклонения между составляющими УОЛ в горных районах Западной Сибири, полученными по данным глобальной модели геопотенциала, с учетом и без учета поправки за рельеф и астрономо-геодезическими УОЛ, полученными из измерений на пунктах Лапласа, по модели EIGEN- 6C4

Степень разложения N	Разрешение в линейной мере (км)	Стандартные отклонения			
		без поправки за рельеф		с поправкой за рельеф	
		$m\xi''$	$m\eta''$	$m\xi''$	$m\eta''$
2190	10	1,24	2,1	0,5	0,76
1420	15	1,5	2,33	0,6	0,75
720	30	1,6	2,5	0,7	0,9
360	50	2,3	3,7	0,9	1,7

Из таблицы 10 видно, что стандартные отклонения увеличиваются с уменьшением степени разложения составляющих УОЛ в ряд по сферическим функциям (160), (161) и, следовательно, ухудшается пространственное разрешение модели гравитационного поля. Кроме этого, стандартные отклонения между составляющими УОЛ в горных районах Западной Сибири, полученными по ограниченному набору гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 и астрономо-геодезическими УОЛ, полученными из измерений на пунктах Лапласа с учетом поправки за рельеф, почти в два раза меньше, чем без ее учета.

По формулам (163)–(172) разработаны алгоритмы, для реализации которых составлены программы (свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2019617929, № 2019617930).

3.5 Программный комплекс, реализующий методику комплексного определения характеристик ГПЗ

Для реализации методики требуется выполнить следующие операции.

- 1 Выбор модели геопотенциала.
- 2 Подготовка набора точек вычисления на заданную территорию.
- 3 Подготовка набора контрольных точек с наземными измерениями на заданной территории.
- 4 Вычисление в подготовленных точках требуемых характеристик гравитационного поля.
- 5 Вычисление в контрольных точках требуемых характеристик гравитационного поля.
- 6 Определение точностных характеристик на заданную территорию по результатам сравнения в контрольных точках.
- 7 Формирование цифровой модели характеристик ГПЗ на заданную территорию.

Структурная схема методики приводится на рисунке 24.

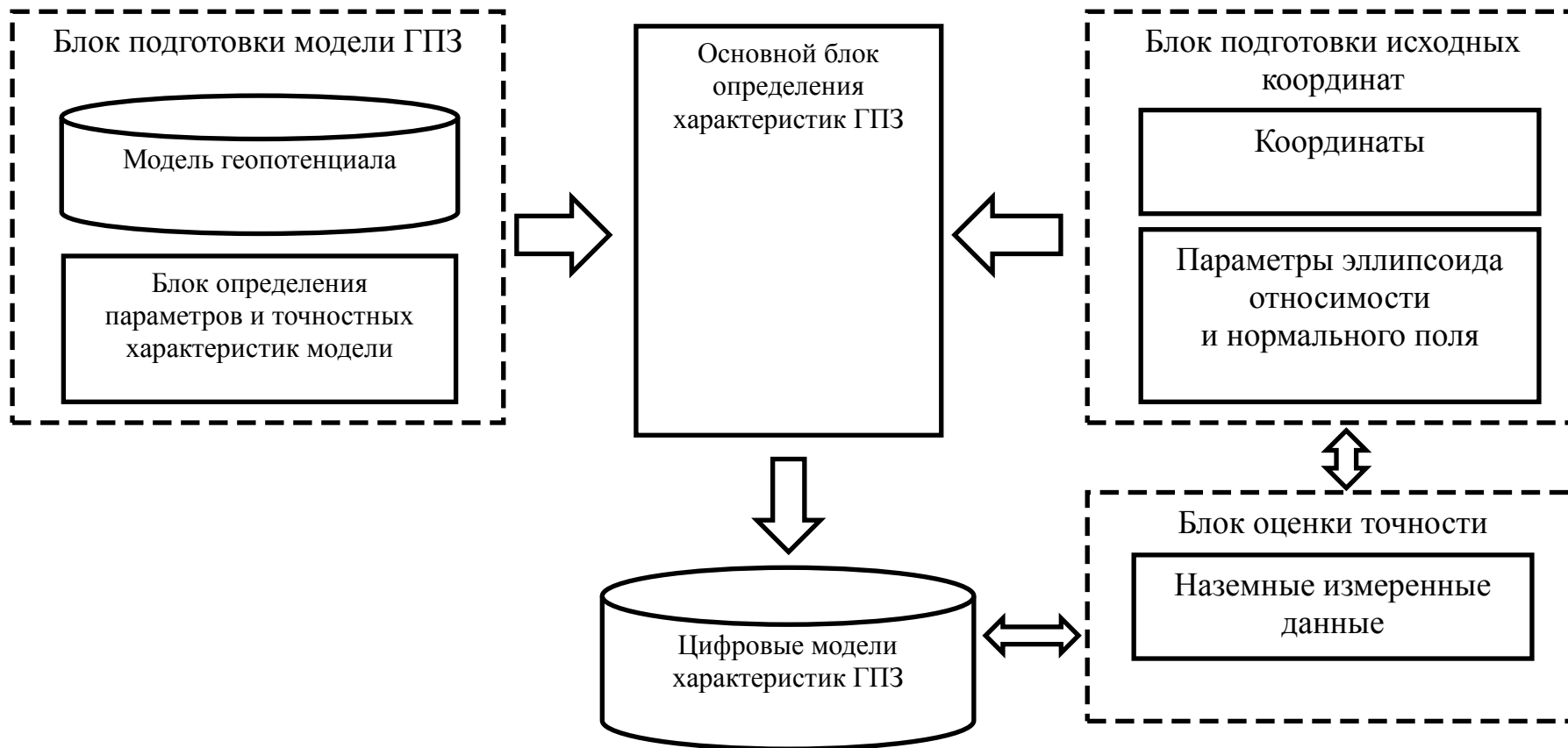


Рисунок 24 – Структурная схема разработанной методики определения характеристик ГПЗ

В блоке подготовки модели ГПЗ, из ряда выбранных моделей, с помощью алгоритма определения точностных характеристик модели геопотенциала, основанного на формулах (111)–(116) определяется модель геопотенциала, удовлетворяющая заданным требованиям, или просто определяются точностные характеристики заданной модели геопотенциала.

В блоке подготовки исходных координат формируется набор точек на заданную территорию в геодезических координатах на заданном эллипсоиде относимости. Так же формируется набор контрольных точек на заданной территории с известными (измеренными) характеристиками ГПЗ.

В основном блоке определения характеристик ГПЗ выполняются вычисления, в результате которых в каждой заданной и контрольной точке определяется характеристика ГПЗ в соответствии с формулами (120)–(133), (117), (119), (160), (161).

В блоке оценки точности выполняется сравнение вычисленных характеристики ГПЗ с их измеренными значениями в контрольных точках. На основании этого сравнения выполняется оценка точности определения конкретной характеристики ГПЗ на заданной территории.

В последнем блоке формируется цифровая модель характеристик ГПЗ.

Весь процесс определения характеристик ГПЗ по данным глобальной модели геопотенциала реализован в программном комплексе.

Программный комплекс обладает следующими общими характеристиками:

- отсутствие ограничения по количеству учитываемых гармоник;
- встроены параметры более 20 эллипсоидов;
- встроены пять вариантов параметров нормального гравитационного поля;
- возможность получения характеристик ГПЗ в сферической геоцентрической, в прямоугольной геоцентрической и прямоугольной топоцентрической системах координат.

Особенность алгоритма является возможность получения производных потенциала как силы тяжести, так и притяжения.

Оригинальность алгоритма вычисления производных полиномов Лежандра позволяет показывать разработанному программному комплексу высокую производительность. При 8-поточном вычислении производительность комплекса составляет 17 точек в секунду.

Модульная структура программного комплекса позволяет на его основе создавать системы вычисления характеристик ГПЗ в реальном времени.

Структурная схема блока подготовки данных изображена на рисунке 25. По набору гармонических коэффициентов, заданных в глобальной модели геопотенциала в формате GFC, в соответствии с формулами (111)–(116), выполняется определение спектральных характеристик данной модели. Основными критериями для выбора модели являются точность аппроксимации и разрешающая способность Δ .

На заданную территорию заранее формируется файл с набором точек в соответствии с поставленной задачей. Набор точек может быть задан как узлы регулярной сетки, так и как «облако» точек.

Координаты точек задаются в координатной системе выбранного эллипсоида относимости.

В программе выбираются геометрические параметры эллипсоида относимости и параметры нормального гравитационного поля.

Далее подготовленные координаты точек преобразуются в сферические геоцентрические координаты.

Структурная схема определения параметров ГПЗ в геоцентрических сферических координатах приведена на рисунке 26. В этом блоке выполняются вычисления в заданной точке в системе геоцентрических сферических координат потенциала притяжения, производных потенциала притяжения первого и второго порядка.

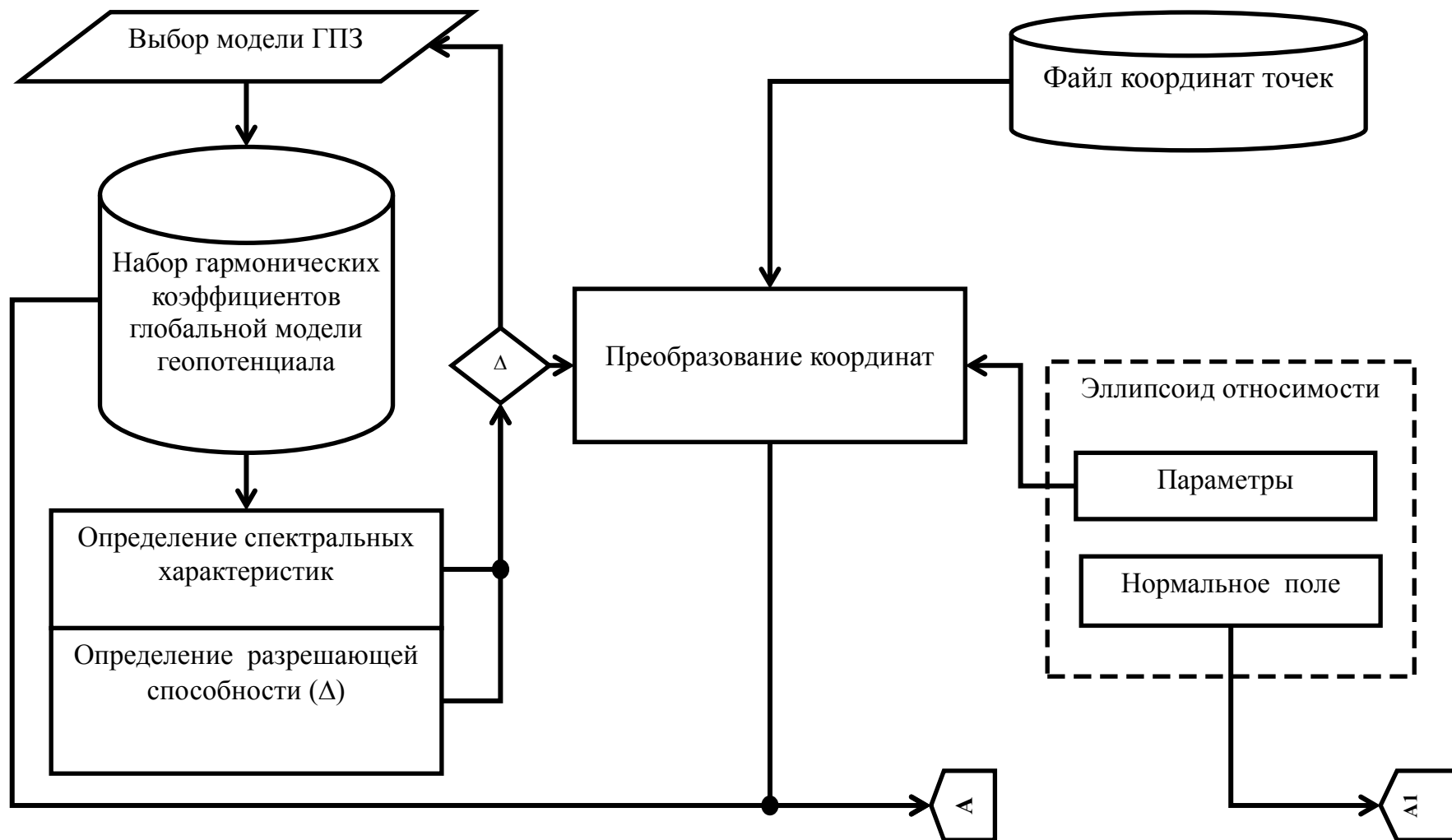


Рисунок 25 – Структурная схема программного комплекса (подготовка данных)

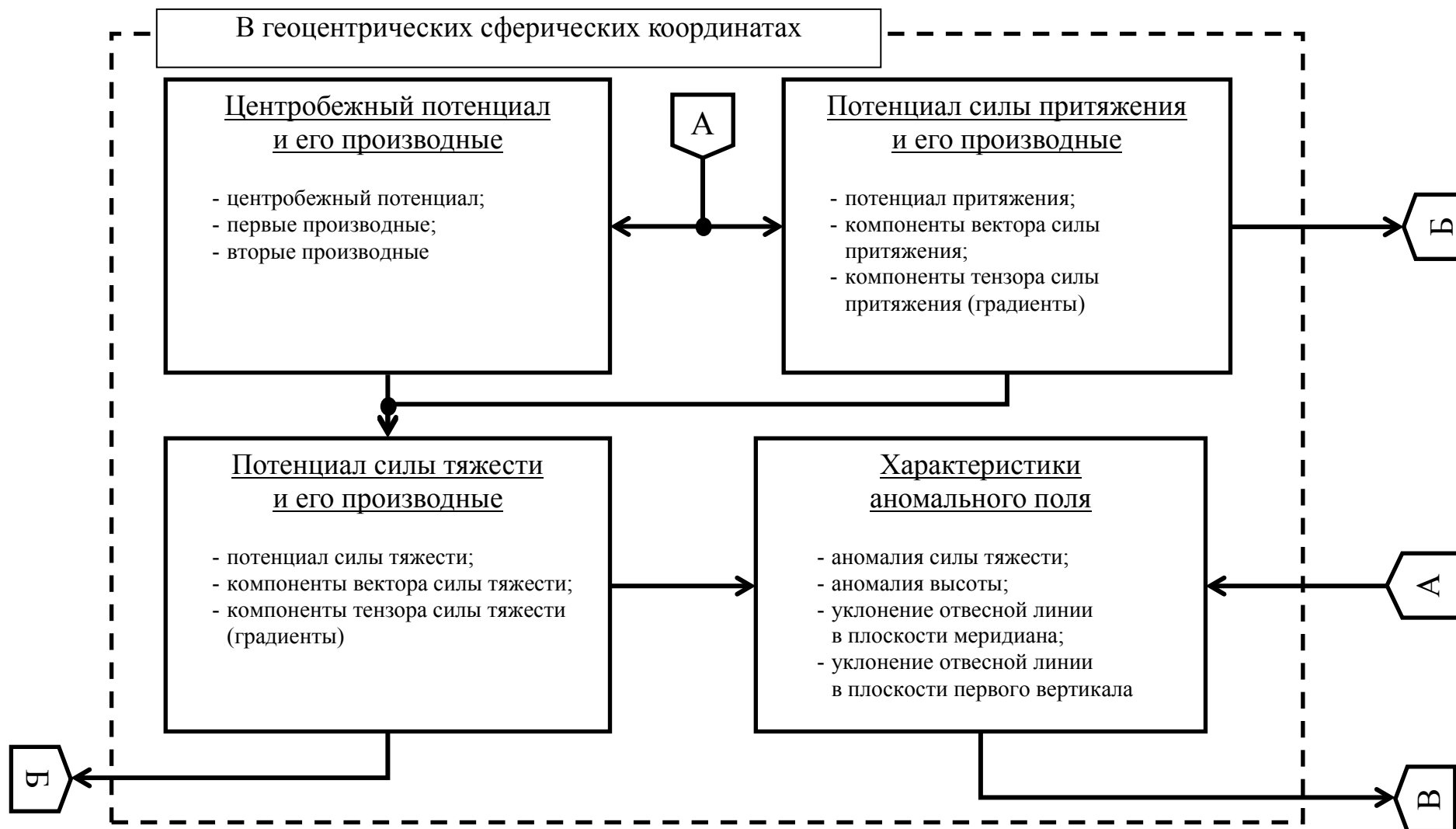


Рисунок 26 – Структурная схема программного комплекса (определения параметров ГПЗ в сферических координатах)

Отдельно вычисляется центробежный потенциал и его производные первого и второго порядка. Потенциал силы тяжести и его производные вычисляются простым сложением соответствующих производных потенциала притяжения и центробежного потенциала.

Для получения характеристик аномального поля из набора гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала вычитаются соответствующие коэффициенты нормального поля до 8-й степени включительно и вычисляются аномалии силы тяжести, высоты квазигеоида и составляющие уклонения отвесной линии в плоскостях меридиана и первого вертикала

В данном блоке реализованы формулы (120)–(130), (117), (119), (160), (161).

Полученные таким образом производные потенциала притяжения, силы тяжести и характеристики аномального поля в системе сферических геоцентрических координатах сохраняются в массиве данных в памяти компьютера для последующей обработки.

Структурная схема определения параметров ГПЗ в топоцентрических прямоугольных координатах приведена на рисунке 27. В этом блоке выполняется преобразование полученных в предыдущем блоке производных потенциала притяжения и потенциала силы тяжести в системе сферических геоцентрических координат в систему топоцентрических прямоугольных координат в соответствии с формулами (131)–(133).

По полученным производным потенциала определяются в точке вычисления средняя кривизна уровенной поверхности, гауссова кривизна уровенной поверхности, а также кривизны силовой линии в плоскостях меридиана и первого вертикала (26), (33), (31).

Полученные значения производных потенциала притяжения и силы тяжести в системе топоцентрических прямоугольных координат и значения кривизны уровенной поверхности и силовой линии сохраняются в массиве данных в памяти компьютера.

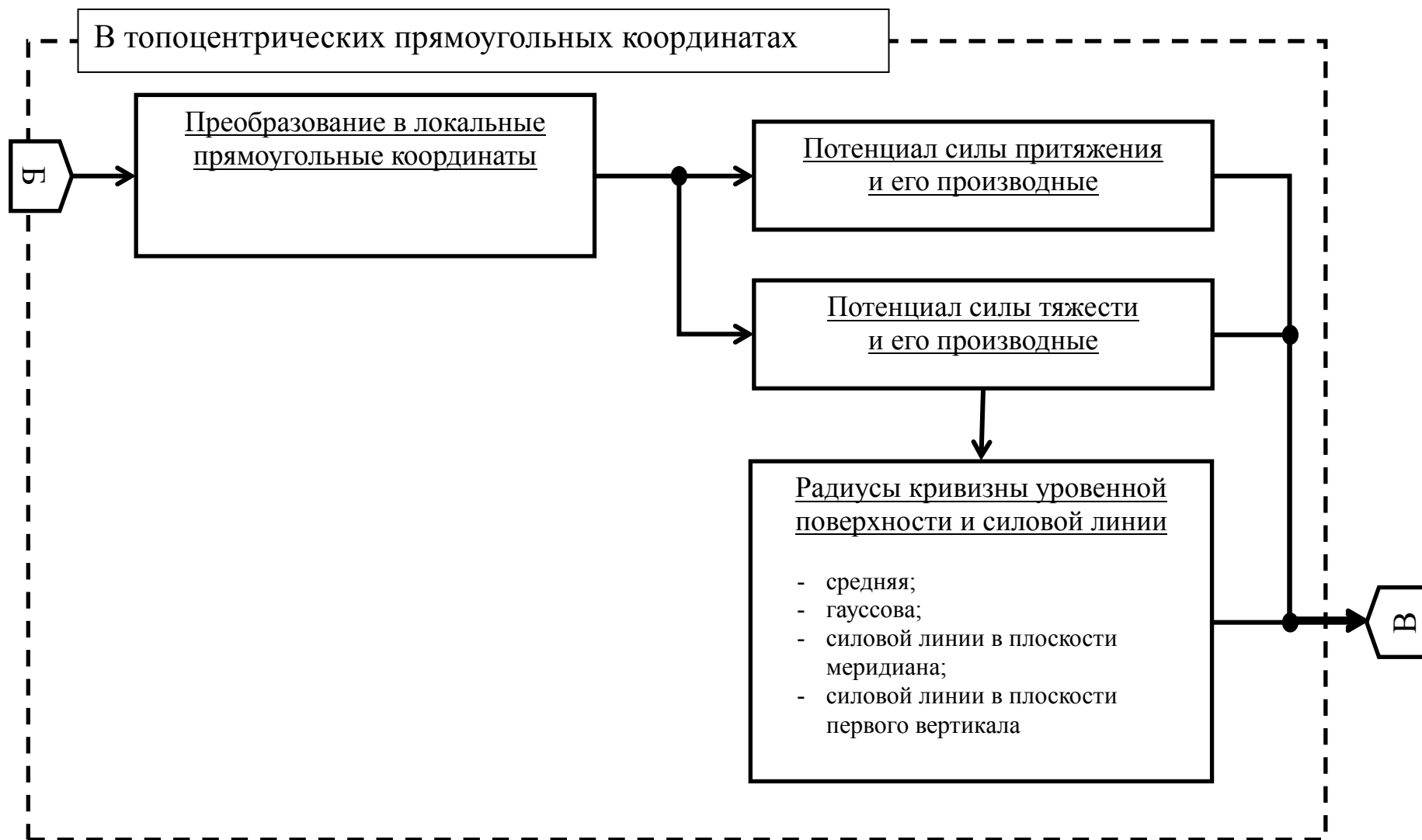


Рисунок 27 – Структурная схема программного комплекса
(определения параметров ГПЗ в топоцентрических координатах)

Таким образом, для каждой расчетной точки формируется комплект характеристик ГПЗ.

Для набора контрольных точек повторяется весь комплекс вычислений и формируется массив вычисленных характеристик ГПЗ для контрольных точек.

Структурная схема завершающего блока формирования цифровой модели характеристик ГПЗ и оценка точности приведена на рисунке 28. В этом блоке массив полученных характеристик ГПЗ выводится в файл в требуемом формате.

Если исходный набор точек задан в виде узлов регулярной сетки, формируется цифровая модель характеристик ГПЗ на заданную территорию.

По значениям вычисленных характеристик ГПЗ в контрольных точках выполняется оценка точности полученной цифровой модели.

3.6 Программный комплекс, реализующий методику учета влияния топографических масс на уклонения отвесной линии в горных районах

Методика учета влияния топографических масс на уклонения отвесной линии в горных районах основана на построении в окрестности результирующей точки трехмерной модели топографических масс. Эти массы аппроксимируются набором элементарных параллелепипедов, аппликаты которых задаются цифровой моделью местности. В контрольной точке определяется радиус учитываемой области, характеризующийся K и L – количеством учитываемых зон по широте и долготе соответственно. Используя полученные K и L , вычисляются поправки в уклонение отвесной линии в результирующей точке, расположенной в окрестности контрольной.

Структурная схема методики учета влияния топографических масс на уклонения отвесной линии приведена на рисунке 29. Исходными данными являются

координаты контрольной точки с определенным астрономо-геодезическим уклоном, модельные уклонения в этой же точке, полученные по глобальной модели геопотенциала, координаты результирующей точки. Модель рельефа задается в формате VIL. При наличии геологических данных задается плотность горных пород или используется средняя плотность.

Программа строит в автоматическом режиме трехмерную модель топографических масс в окрестности контрольной точки в виде набора параллелепипедов. Трехмерная модель строится в соответствии с параметрами цифровой модели местности.

Каждой элементарной массе (параллелепипеду) задается собственная плотность при наличии геологических данных либо средняя плотность.

На рисунке 30 приведена структурная схема программы на этапе определения радиуса учитываемой области. По начальным значениям K и L строится 3D модель масс в окрестности контрольной точки. От каждой элементарной массы вычисляется производная потенциала притяжения в контрольной точке и находится суммарное влияние от всех масс модели.

Модельное значение уклонения в контрольной точке исправляется за это влияние и сравнивается с измеренным значением уклонения. Далее параметры K и L увеличиваются, и процесс повторяется. Критерием нахождения оптимальных K и L является минимум разности измеренного уклонения и исправленного модельного.

После нахождения оптимального значения K и L программа приходит в режим вычисления поправки в результирующей точке. Структурная схема этого режима работы программы приведена на рисунке 31.

Программа работает аналогично предыдущему этапу, при этом по оптимальным значениям K и L вычисляются поправки в модельные уклонения, полученные по глобальной модели геопотенциала в результирующей точке.

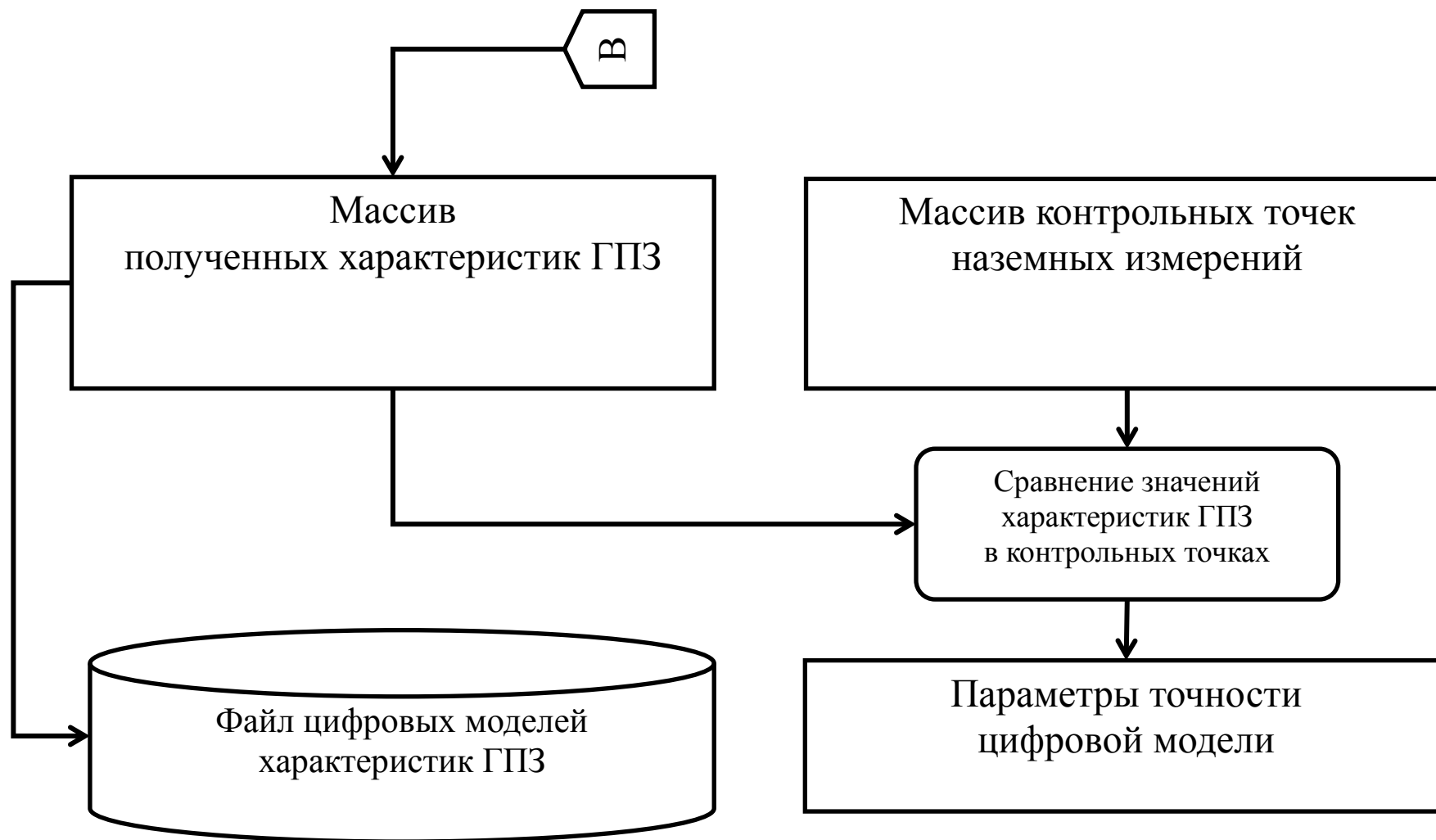


Рисунок 28 – Структурная схема программного комплекса (формирование ЦМ и оценка точности)

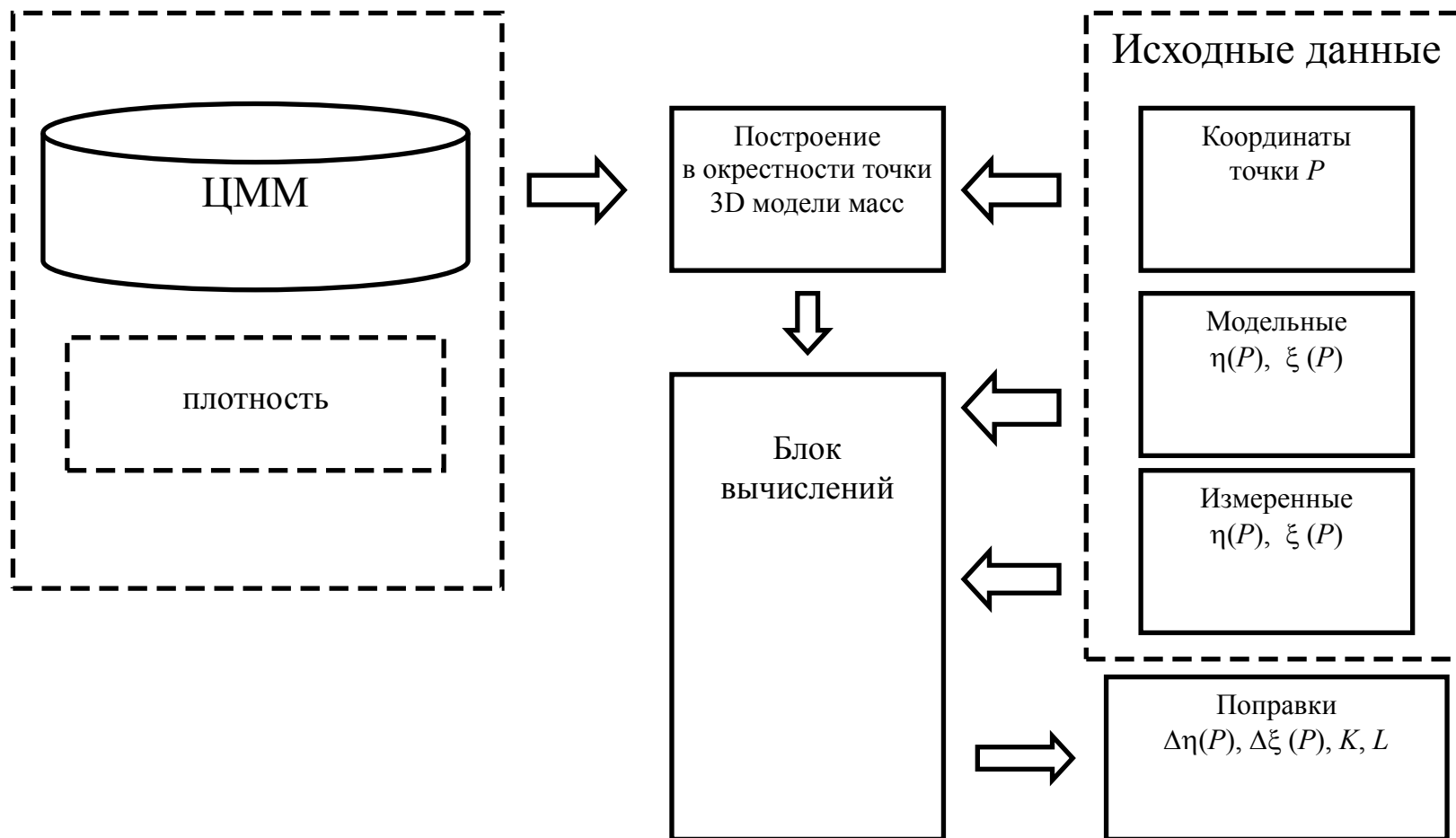


Рисунок 29 – Структурная схема разработанной методики учета влияния топографических масс на уклонения отвесной линии

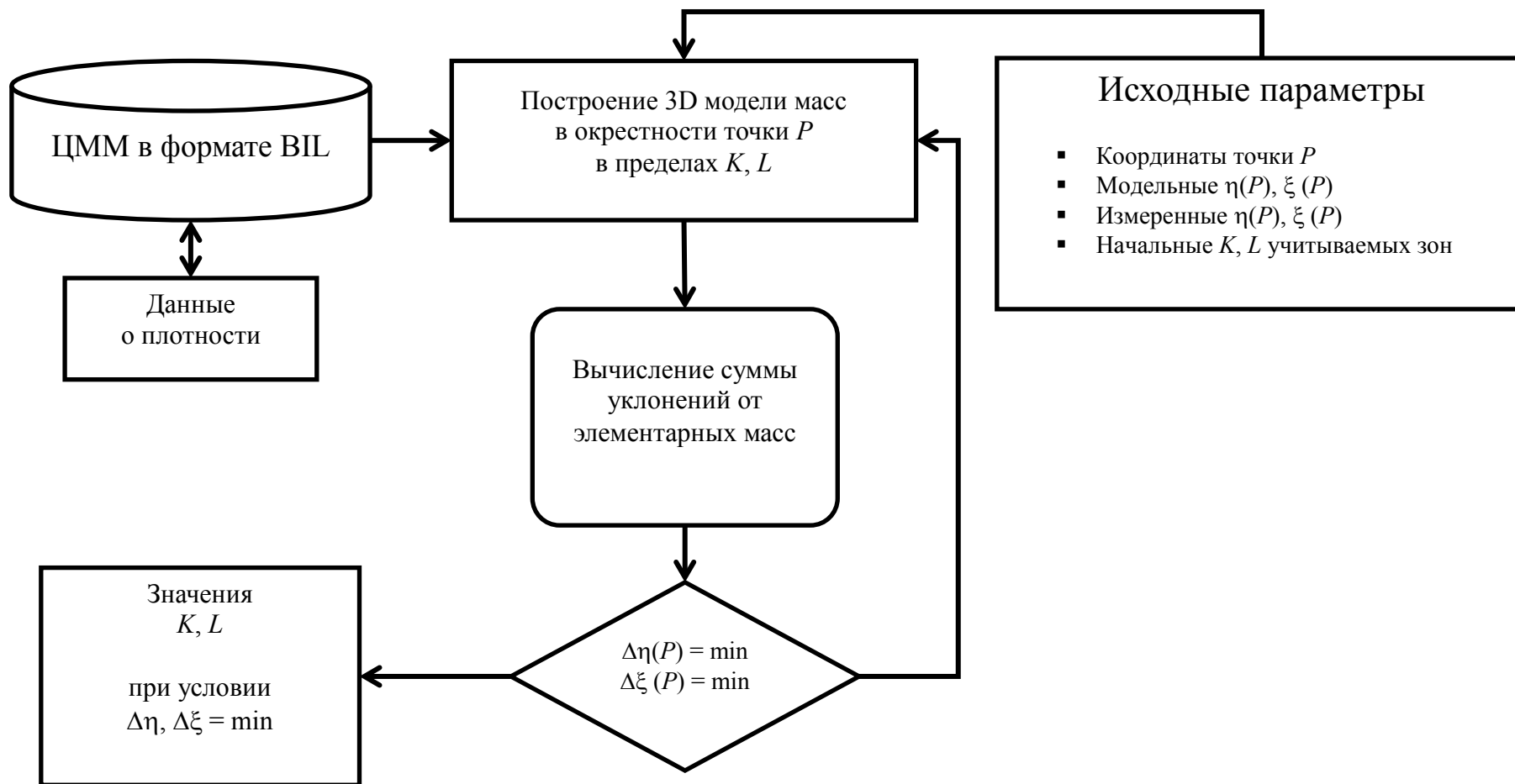


Рисунок 30 – Структурная схема программного комплекса
(определения радиуса учитываемой области)

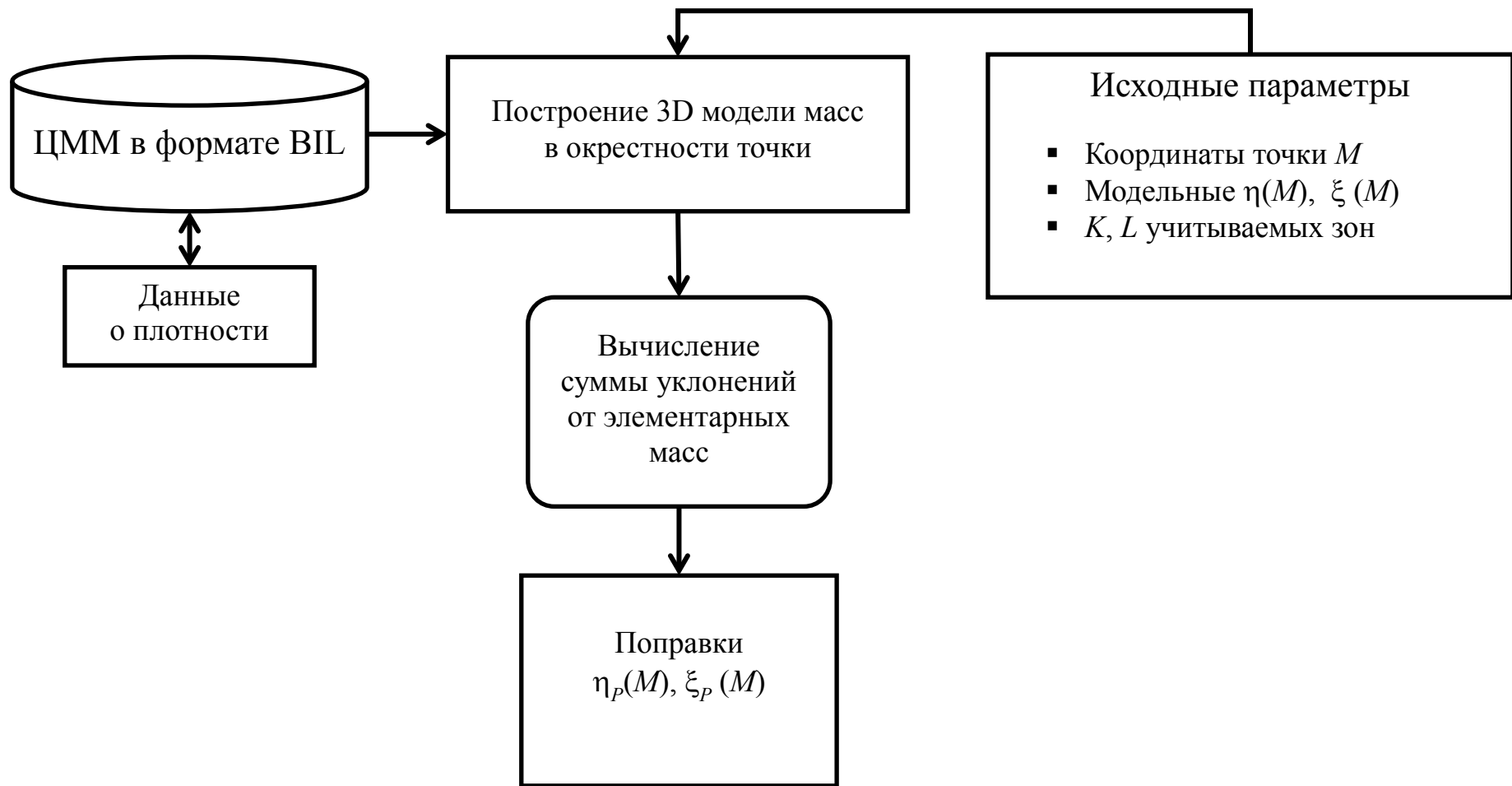


Рисунок 31 – Структурная схема программного комплекса
(определения поправки в уклонения)

4 АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ МЕТОДИКИ КОМПЛЕКСНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

4.1 Цифровые модели характеристик гравитационного поля на территории Западной Сибири

Для создания цифровых моделей гравитационного поля на территории Западной Сибири выполнены вычисления его характеристик в 168 113 точках (узлах) регулярной сетки с шагом 5", что составляет на местности около 9 км.

В результате на территорию Западной Сибири впервые получены цифровые модели гравитационного поля Земли (ГПЗ) и построены картосхемы следующих характеристик гравитационного поля:

- гравитационного потенциала силы тяжести;
- гравитационного потенциала тяготения;
- вертикальной и горизонтальной составляющих компонент вектора силы тяжести;
- вертикальной и горизонтальной составляющих компонент вектора тяготения;
- вертикального и горизонтального градиентов силы тяжести, а также градиентов в плоскостях меридиана, первого вертикала и горизонтальной плоскости в точке вычисления;
- вертикального и горизонтального градиентов тяготения, а также градиентов в плоскостях меридиана, первого вертикала и горизонтальной плоскости в точке вычисления;
- радиусов средней кривизны уровенной поверхности в точке вычисления;
- радиусов гауссовой кривизны уровенной поверхности в точке вычисления;
- радиусов кривизны силовой линии гравитационного поля в плоскости меридиана в точке вычисления;

- радиусов кривизны силовой линии гравитационного поля в плоскости первого вертикала в точке вычисления;
- высот квазигеоида;
- аномалий силы тяжести в свободном воздухе;
- уклонений отвесной линии в плоскости меридиана;
- уклонений отвесной линии в плоскости первого вертикала.

Картосхемы некоторых характеристик ГПЗ на территорию Западной Сибири приведены в приложениях А–Г.

4.2 Анализ точности аномалий силы тяжести, полученных по данным современных глобальных моделей геопотенциала на территории Новосибирской области

Для оценки точности получения аномалий силы тяжести по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 выполнено сравнение модельных данных с наземными измерениями на территории Новосибирской области (рисунок 32).

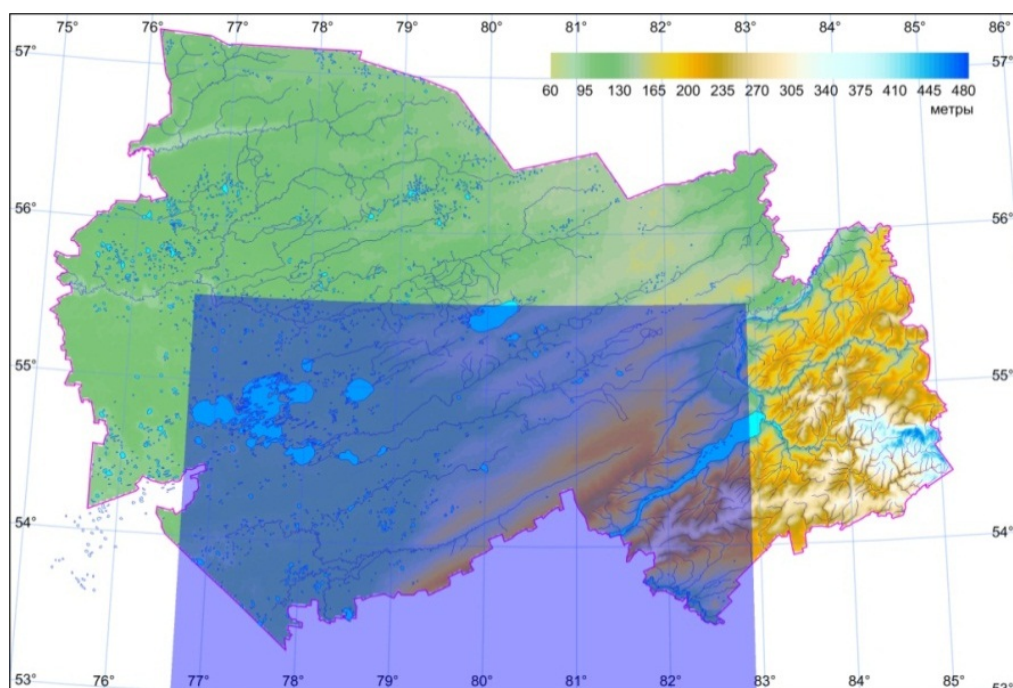


Рисунок 32 – Участок с измеренными значениями силы тяжести на территории Новосибирской области

В качестве контрольных точек использованы 27 пунктов, которые являются пунктами опорной гравиметрической сети II класса. Точность определения силы тяжести составляет $\pm 0,05$ мГал.

По формуле (117) в этих 27 пунктах гравиметрической сети восстановлены значения аномалий силы тяжести в свободном воздухе Δg_c , ультравысоко-степенной модели EIGEN-6C4.

По формулам (173) и (174) получены средние разности и их стандартные отклонения [27]

$$E = E[(\Delta g_n - \Delta g_c)]; \quad (173)$$

$$\sigma = \sigma[(\Delta g_n - \Delta g_c)^2], \quad (174)$$

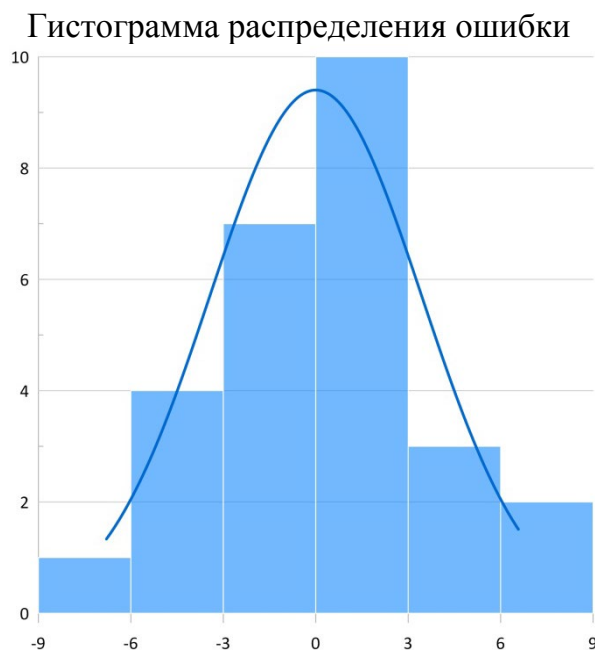
где Δg_n – наземные значения аномалий силы тяжести;

Δg_c – вычисленные значения аномалий силы тяжести.

На рисунке 33 представлены гистограмма и статистические параметры распределения разностей между восстановленными и наземными значениями аномалий силы тяжести, полученными для территории Новосибирской области, по модели EIGEN-6C4.

Из рисунка 33 видно, что стандартное отклонение, полученное для данной модели, составило 3,4 мГал при среднем значении $E = 2,3$ мГал.

Аналогичные исследования выполнены для 15 современных глобальных моделей геопотенциала. В таблице 11 приведены стандартные отклонения полученные по результатам сравнения с наземными данными для всех исследованных моделей.



Параметр	Значение, мГал
Минимальное	-9,07
Максимальное	4,30
Диапазон	13,37
Среднее	-2,27
Дисперсия	11,81
Стандартное отклонение	3,44
Асимметрия	0,099
Экцесс	-0,530

Рисунок 33 – Гистограмма и статистические параметры распределения погрешностей исследуемой модели EIGEN-6C4

Таблица 11 – Стандартные отклонения, полученные по результатам сравнения с наземными данными

Модель	Максимальная степень модели N_0	Δdg , мГал
1 EIGEN-6C4	2190	3,4
2 SGG-UGM-1	2159	6,8
3 EGM2008	2190	3,5
4 GECO	2190	3,6
5 EIGEN-6c	1420	6,2
6 EIGEN-6c2	1949	3,6
7 EIGEN-6c3stat	1949	3,6
8 XGM2016	719	3,9
9 GOCO05c	720	7,2
10 GGM05C	360	7,7
11 GAO2012	360	8,4
12 GIF48	360	7,6
13 EIGEN-51c	359	8,7
14 EIGEN-5c	360	8,3
15 GGM03C	360	7,0

4.3 Анализ точности высот квазигеоида, полученной по данным современных глобальных моделей на территории Новосибирской области

Для оценки точности определения высот квазигеоида [106] по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 использован участок размером 300 км вдоль меридиана и 450 км вдоль параллели, расположенный на территории Новосибирской области, в котором для 190 пунктах заданы нормальные высоты $H^{\gamma}(P)$, полученные из геометрического нивелирования 1-4-го классов (рисунок 34).

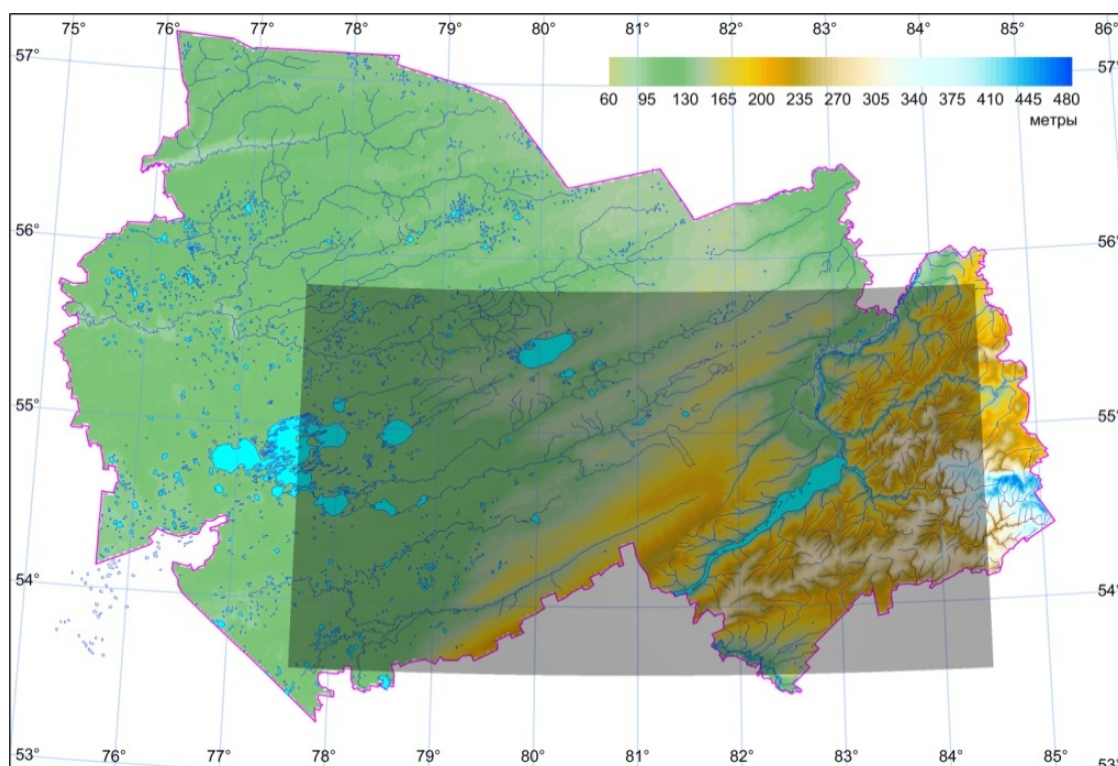


Рисунок 34 – Участок с пунктами ГНСС-нивелирования на территории Новосибирской области

На этих же пунктах выполнены спутниковые координатные определения в рамках развития геодезической сети активных базовых станций (ГС АБС) [14]. В результате получены геодезические высоты $H^{\Gamma}(P)$, средние квадратические погрешности которых из уравнивания спутниковой сети находятся в интервале от 1,5 до 3,1 см, в среднем – 1,8 см.

Для этих пунктов P по формуле (175) получены значения высот квазигеоида $\zeta_H(P)$, относительно эллипсоида WGS-84

$$\zeta_H(P) = H^\Gamma(P) - H^\gamma(P), \quad (175)$$

где $\zeta_H(P)$ – высота квазигеоида, в которой геодезическая высота $H^\Gamma(P)$ получена по спутниковым данным, нормальная высота $H^\gamma(P)$ получена из геометрического нивелирования.

Схема высот квазигеоида, построенная по наземным данным, приведена на рисунке 35.

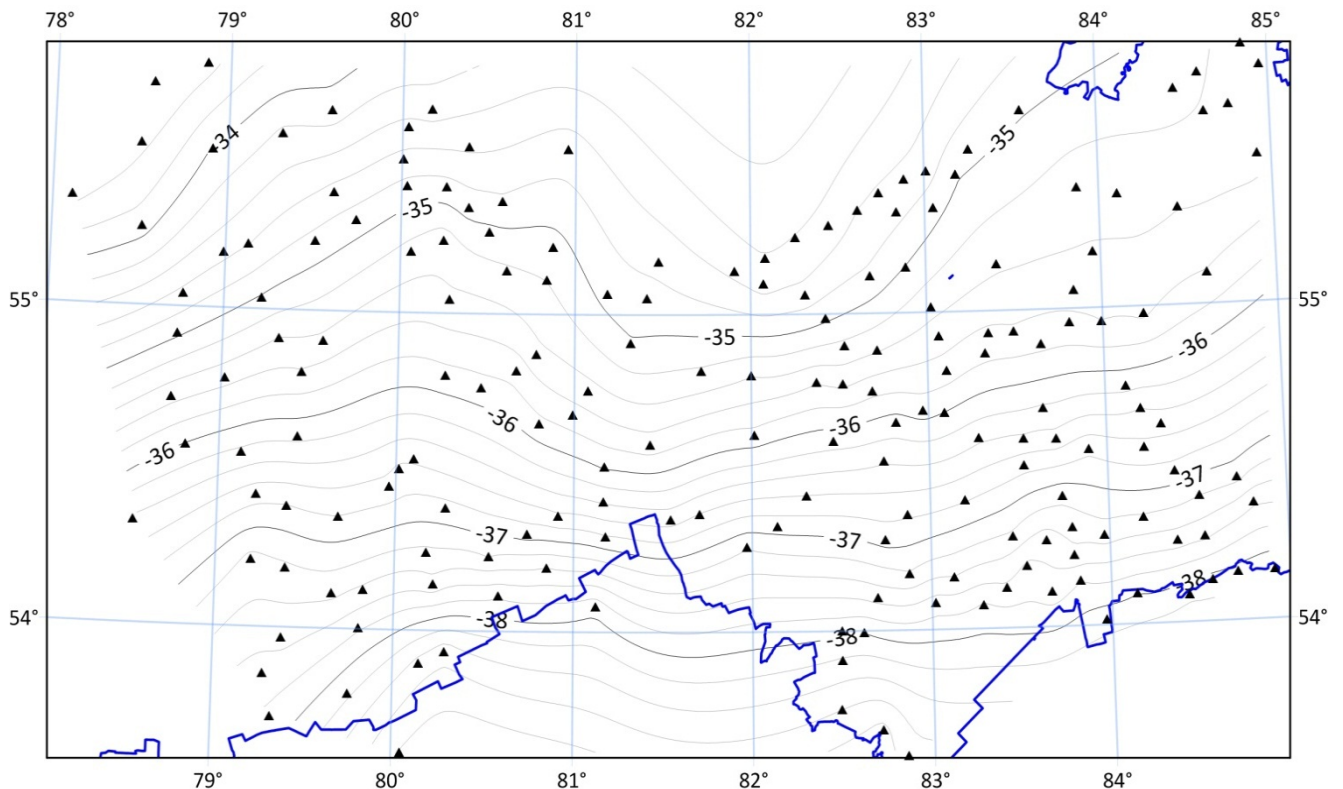


Рисунок 35 – Схема высот квазигеоида, построенная по наземным данным

Анализ точности современных глобальных моделей квазигеоида выполнялся по формуле

$$\Delta\zeta(P) = \zeta_H(P) - \zeta_C(P), \quad (176)$$

где $\zeta_C(P)$ – модельные значения высоты квазигеоида в точки P , вычисленные по формуле (119);

$\Delta\zeta(P)$ – разности между высотами квазигеоида, полученными по данным моделей, и высотами квазигеоида, полученными из геометрического нивелирования и GPS-измерений.

На рисунке 36 приведена картосхема разностей между восстановленными и наземными значениями аномалий силы тяжести, полученных для территории Новосибирской области, по модели EIGEN-6C4.

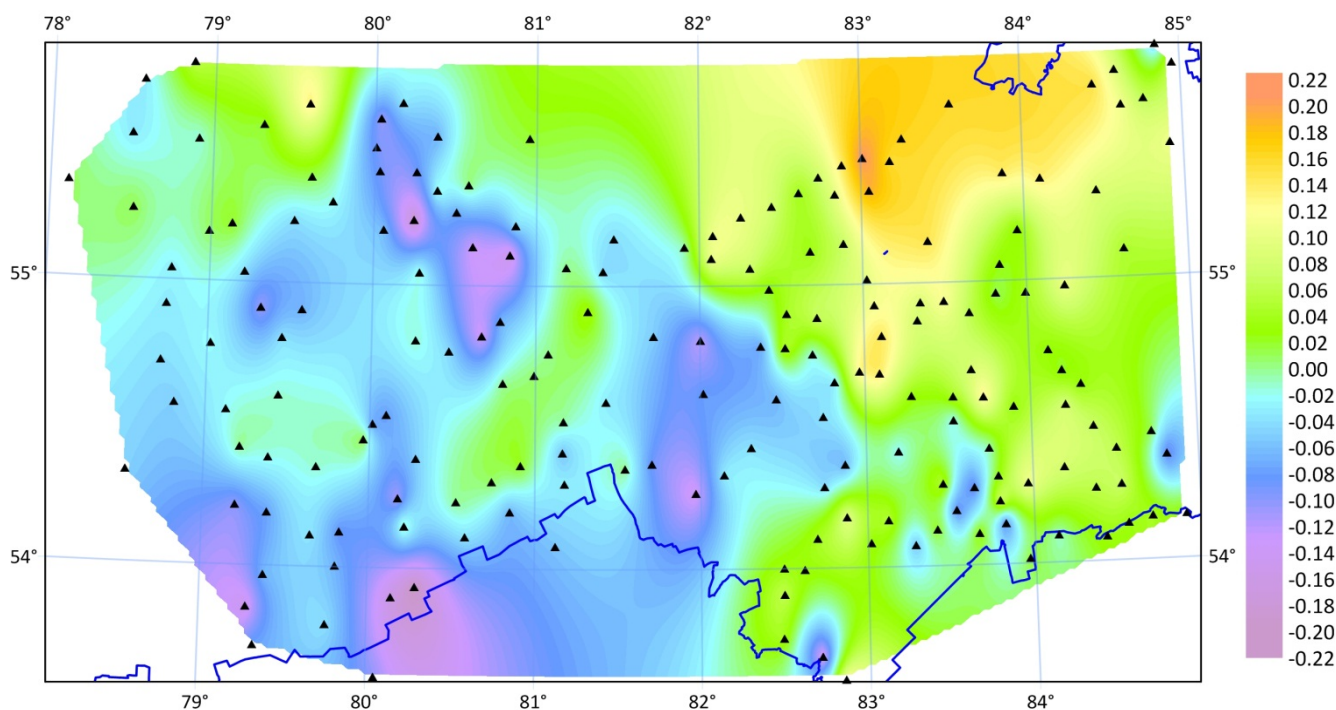


Рисунок 36 – Картосхема разностей между восстановленными и наземными значениями аномалий силы тяжести, полученными для территории Новосибирской области, по модели EIGEN-6C4

На рисунке 37 представлена гистограмма и статистические параметры распределения разностей между восстановленными и наземными значениями высот квазигеоида, полученными для территории Новосибирской области, по модели EIGEN-6C4.

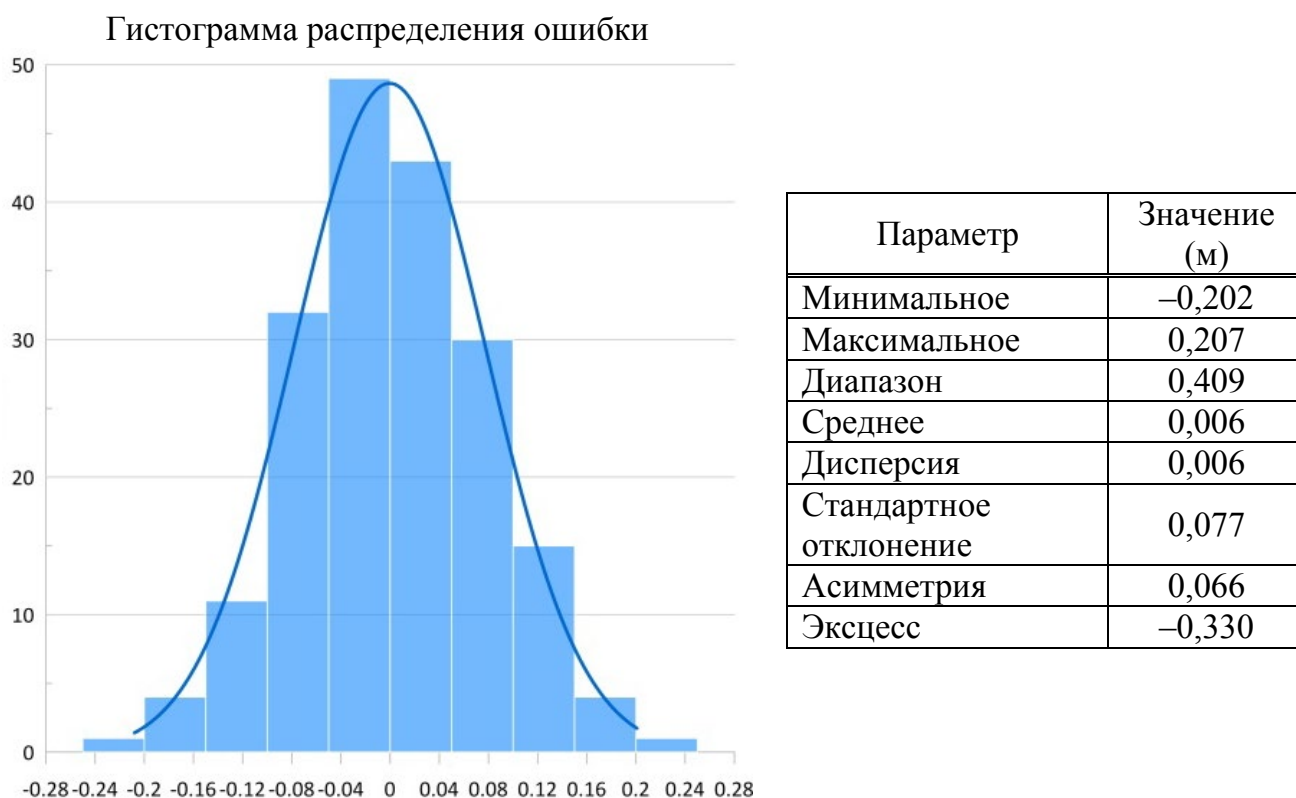


Рисунок 37 – Гистограмма и статистические параметры распределения погрешностей разности между высотами квазигеоида, полученными по данным модели EIGEN-6C4, и высотами квазигеоида, полученными из геометрического нивелирования и GPS-измерений

Аналогичные исследования выполнены для 15 современных глобальных моделей геопотенциала. В таблице 12 приведены стандартные отклонения полученные по результатам сравнения с наземными данными для всех исследованных моделей.

Таблица 12 – Стандартные отклонения, полученные по результатам сравнения с наземными данными

Модель	Максимальная степень модели N_0	$\Delta\zeta$, см
1 EIGEN-6C4	2190	7,7
2 SGG-UGM-1	2159	8,2
3 EGM2008	2190	8,6
4 GECO	2190	8,1
5 EIGEN -6c	1420	9,7
6 EIGEN -6c2	1949	7,9
7 EIGEN -6c3stat	1949	7,8
8 XGM2016	719	8,1
9 GOCO05c	720	11,5
10 GGM05C	360	12,3
11 GAO2012	360	18,6
12 GIF48	360	13,0
13 EIGEN -51c	359	14,3
14 EIGEN -5c	360	13,8
15 GGM03C	360	13,6

4.4 Анализ результатов сравнения уклонений отвесной линии, полученных по данным современных глобальных моделей геопотенциала, с астрономо-геодезическими уклонениями на территории Западной Сибири

На территории Западной Сибири при построении государственной геодезической сети (ГГС) выполнены астрономические измерения на пунктах Лапласа.

Из общего количества пунктов Лапласа было отобрано 320 пунктов. Из них 180 пунктов относятся к пунктам 1-го класса, а остальные – к пунктам 2-го класса. При отборе старались обеспечить их более-менее равномерное распределение, а также разнообразие физико-географических условий. На каждом пункте Лапласа выполнены определения геодезических координат B , L , H в государственной системе СК-95 [15, 16, 83].

Для корректного использования результатов наземных измерений геодезические координаты пунктов Лапласа преобразованы в общеземную координатную

систему отсчета WGS-84. Трансформирование координат выполнено по стандартным элементам, приведенным в Справочном документе «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11) [61].

В соответствии со значениями нормальных высот пунктов Лапласа, массив наземных данных был разделен на два: первый массив данных получен путем выделения точек по нормальным высотам в диапазоне от 0 до 500 м (равнинные районы), второй массив данных – все остальные точки, значения высот которых выше 500 м (горные районы).

С помощью разработанного программного комплекса, используя данные глобальной ультравысокостепенной модели EIGEN-6C4, вычислены составляющие абсолютных уклонений отвесных линий (отнесенных к эллипсоиду WGS-84) в плоскости меридиана и первого вертикала на каждом пункте Лапласа ($\xi_{\text{WGS-84}}$ и $\eta_{\text{WGS-84}}$).

Составляющие абсолютных уклонений отвесных линий в плоскости меридиана и первого вертикала $\xi_{\text{WGS-84}}$ и $\eta_{\text{WGS-84}}$, полученные по формулам (160), (161), преобразуют в составляющие относительных уклонений отвесных линий в плоскости меридиана и первого вертикала по формулам

$$\xi_{\text{СК-95}}^{\text{MOD}} = \xi_{\text{WGS-84}}'' + (B_{\text{WGS-84}} - B_{\text{СК-95}})''; \quad (177)$$

$$\eta_{\text{СК-95}}^{\text{MOD}} = \eta_{\text{WGS-84}}'' + (L_{\text{WGS-84}} - L_{\text{СК-95}})'' \cdot \cos(B_{\text{WGS-84}}). \quad (178)$$

Относительные уклонения отвесных линий, полученные по формулам (177), (178), сравнили с наземными измерениями УОЛ, выполненными на территории Западной Сибири. Получили разности уклонений отвесной линии

$$\Delta\xi'' = \xi_{\text{СК-95}}^{\text{MOD}} - \xi_{\text{СК-95}}''; \quad \Delta\eta'' = \eta_{\text{СК-95}}^{\text{MOD}} - \eta_{\text{СК-95}}''. \quad (179)$$

Результаты вычислений разности уклонений отвесной линии по наземным данным и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 в 320 пунктах Лапласа на территории Западной Сибири представлены на рисунках 38, 39, на рисунке 40 показана гистограмма распределения этих разностей.

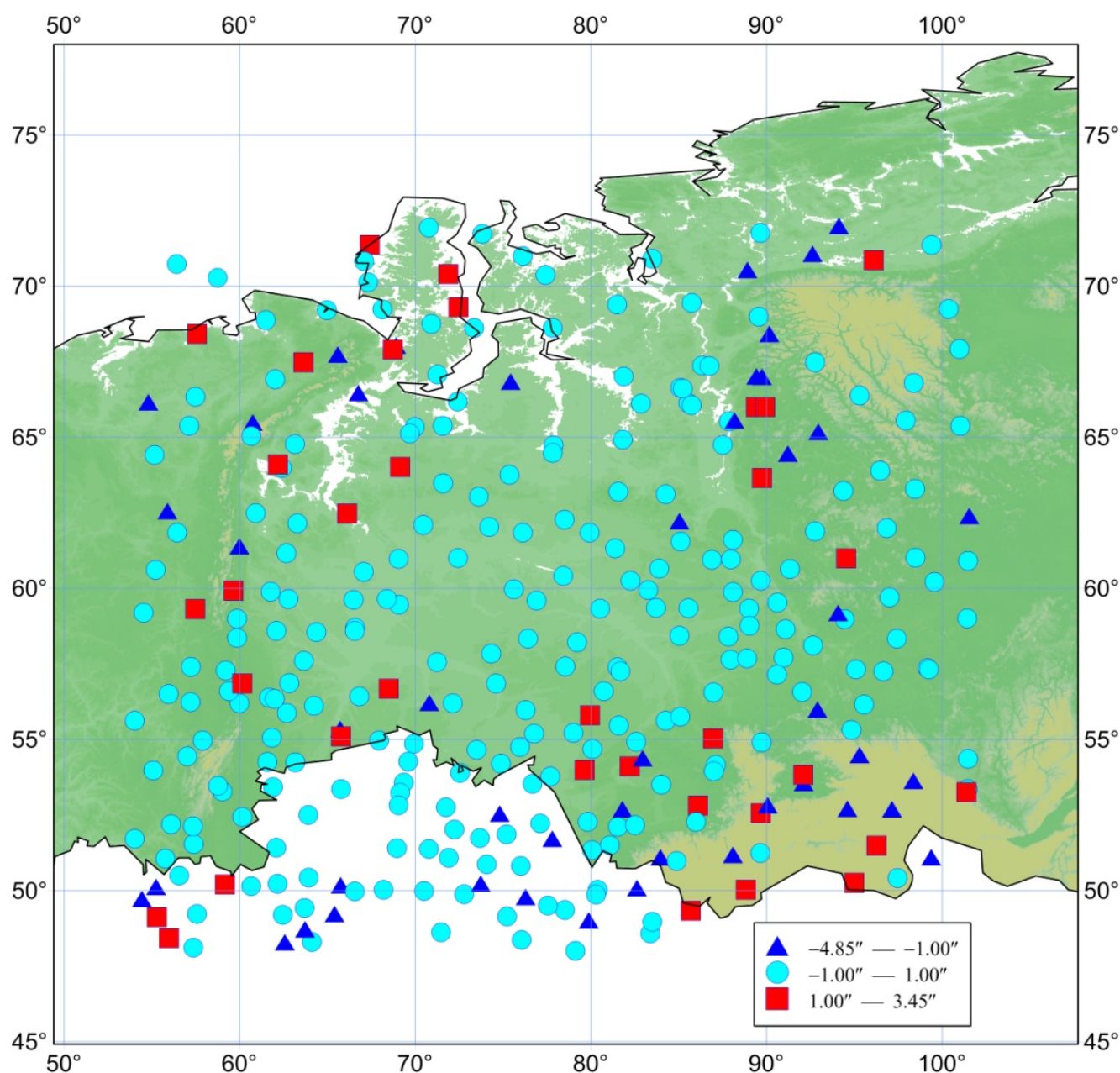


Рисунок 38 – Разности составляющих УОЛ в плоскости меридиана, полученные по наземным данным и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 в 320 пунктах Лапласа на территории Западной Сибири

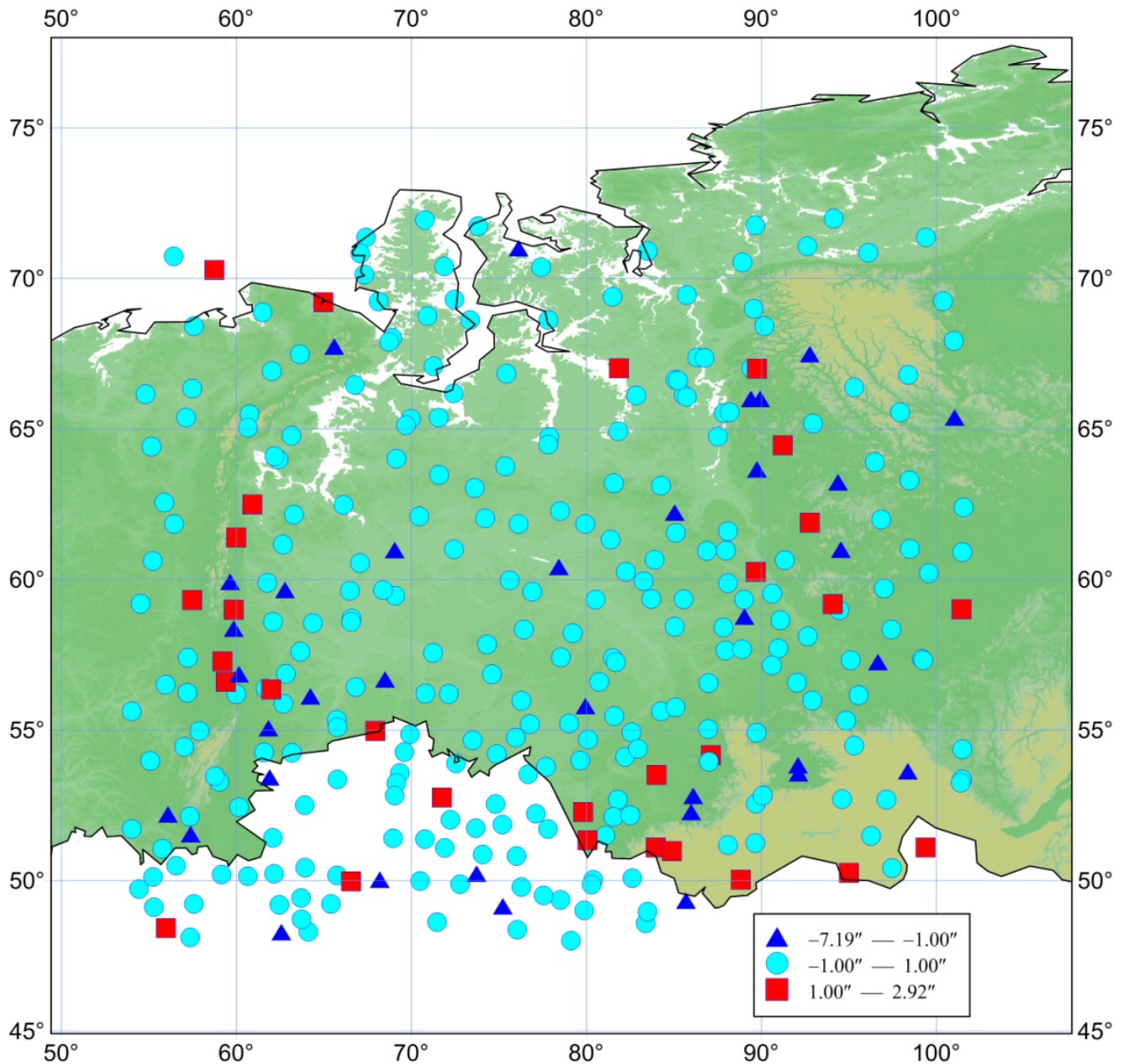


Рисунок 39 – Разности УОЛ в плоскости первого вертикала, полученные по наземным данным и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 в 320 пунктах Лапласа на территории Западной Сибири

В таблице 13 приведены статистические параметры распределения разностей составляющих УОЛ в 320 пунктах Лапласа на территории Западной Сибири, полученных по наземным данным и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4.

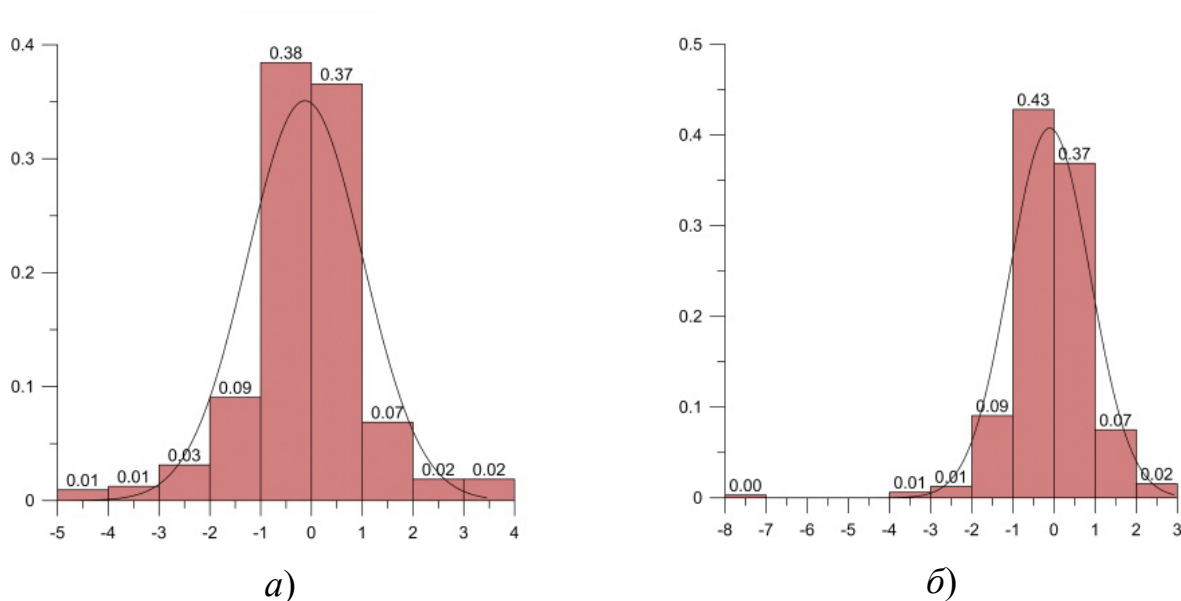


Рисунок 40 – Гистограммы распределения разностей УОЛ, полученных по наземным данным и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 в 320 пунктах Лапласа на территории Западной Сибири: а) в плоскости меридиана; б) в плоскости первого вертикала (по оси ординат – доля количества, по оси абсцисс – разность уклонений в секундах)

Таблица 13 – Статистические параметры распределения разностей $\Delta\xi''$ и $\Delta\eta''$ в 320 пунктах Лапласа на территории Западной Сибири

Параметры	$\Delta\xi''$	$\Delta\eta''$
Минимальная разность	-4,85	-7,19
Максимальная разность	3,45	2,92
Диапазон	8,30	10,10
Средняя	-0,13	-0,10
Дисперсия	1,29	0,96
Стандартное отклонение	1,14	0,98
Асимметрия	-0,41	-1,42
Экссесс	3,03	9,28

В таблице 14 приведены статистические параметры распределения разностей составляющих УОЛ, полученных по наземным данным и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4, для двух массивов данных на территории Западной Сибири: 251 пункт Лапласа (равнинные районы) и 69 пунктов Лапласа (горные районы).

Таблица 14 – Статистические параметры распределения разностей $\Delta\xi''$ и $\Delta\eta''$ для двух массивов данных на территории Западной Сибири

Параметры	0–500 м		от 500 и выше	
	$\Delta\xi''$	$\Delta\eta''$	$\Delta\xi''$	$\Delta\eta''$
Количество точек	251	251	69	69
Минимальная разность	-3,23	-3,62	-4,85	-7,19
Максимальная разность	3,19	2,02	3,45	2,92
Диапазон	6,41	5,64	8,30	10,10
Средняя	-0,08	-0,03	-0,29	-0,36
Дисперсия	0,69	0,57	3,45	2,28
Стандартное отклонение	0,83	0,76	1,86	1,51
Асимметрия	0,04	-0,49	-0,24	-1,17
Экссесс	2,03	2,51	0,06	4,83

На рисунках 41 и 42 показаны гистограммы распределения разностей составляющих УОЛ, полученные по наземным измерениям и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6С4 для двух массивов данных.

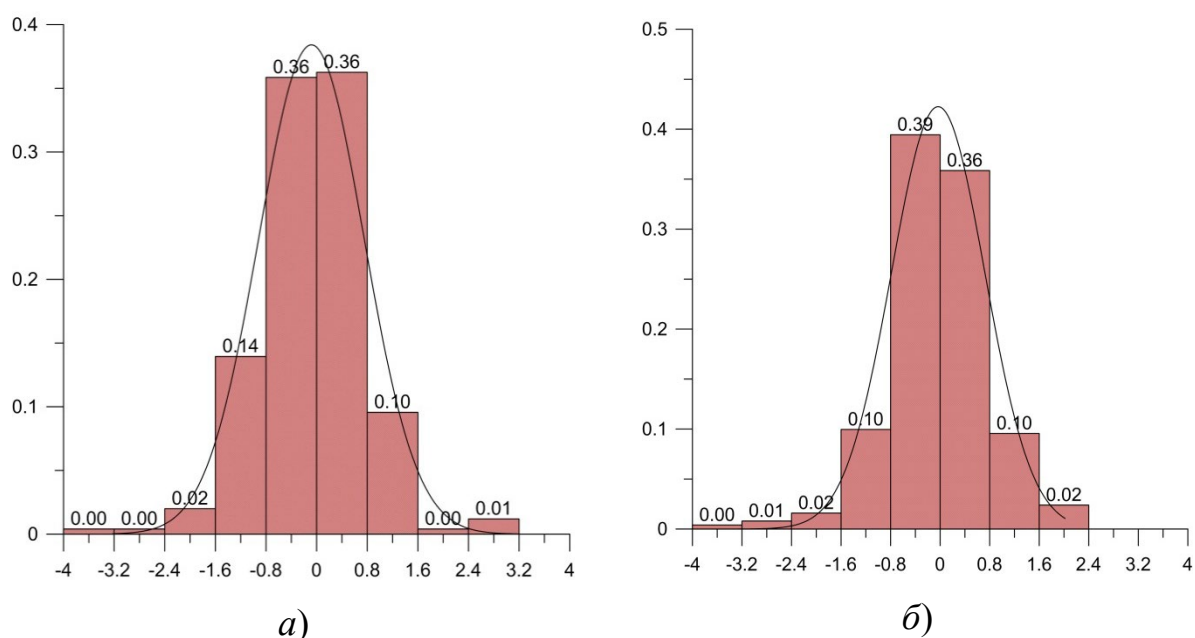


Рисунок 41 – Гистограммы распределения разностей составляющих УОЛ, полученные по наземным данным и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6С4 в пунктах с высотами до 500 м: а) в плоскости меридиана; б) в плоскости первого вертикала (по оси ординат – доля количества, по оси абсцисс – разность уклонов в секундах)

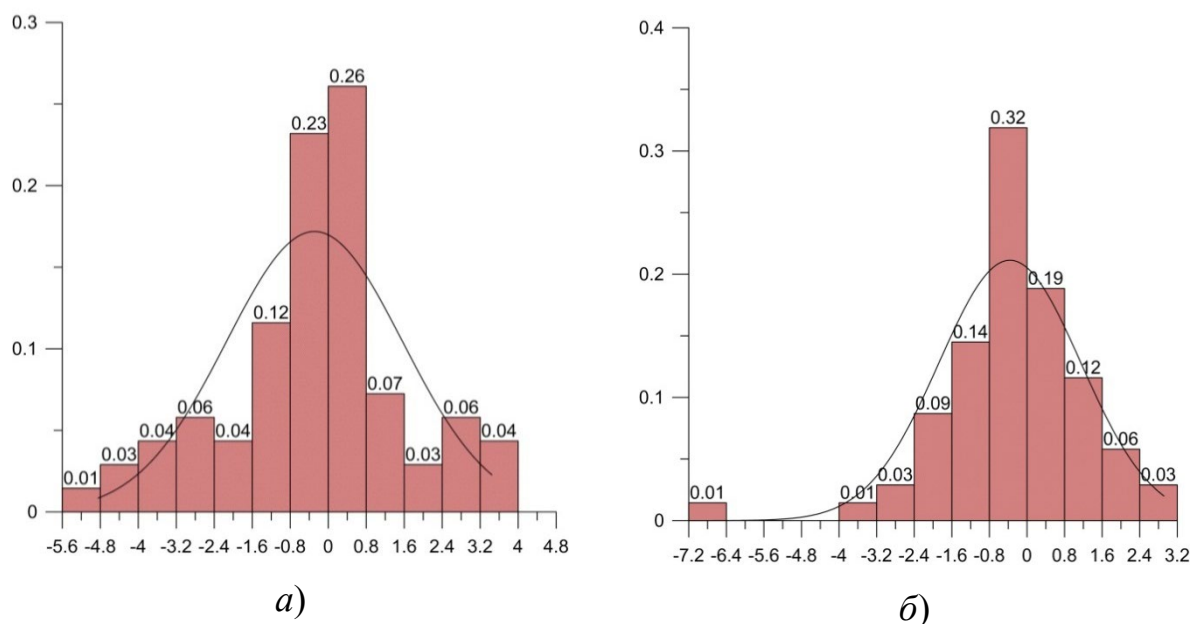


Рисунок 42 – Гистограммы распределения разностей, полученные по наземным данным и глобальной модели геопотенциала EIGEN-6С4 для горных районов: а) в плоскости меридиана; б) в плоскости первого вертикала (по оси ординат – доля количества, по оси абсцисс – разность уклонений в секундах)

Выводы. Анализируя статистические параметры распределения разностей $\Delta\xi''$ и $\Delta\eta''$ в 320 пунктах Лапласа на территории Западной Сибири, полученных по наземным данным и глобальной ультравысококачественной модели геопотенциала EIGEN-6С4, можно сделать следующие выводы:

- стандартное отклонение разностей УОЛ соответствует: $\Delta\xi'' = 1,14$, $\Delta\eta'' = 0,98$ при среднем значении $-0,13''$ и $0,10''$ соответственно;
- представленные гистограммы имеют распределение с небольшой отрицательной асимметрией и небольшим эксцессом и для выбранного уровня значимости 0,1, согласно критерию Kolmogorov-Smirnov;
- гистограммы распределения разностей, приведенные на рисунке 39, имеют распределение, близкое к нормальному.

Рисунки 39–41 показывают, что при выделении исходной наземной информации с учетом значений нормальной высоты пунктов Лапласа до 500 м, стандартное отклонение разностей УОЛ соответствует: $\Delta\xi'' = 0,83$, $\Delta\eta'' = 0,76$ при

среднем значении $-0,08''$ и $0,03''$ соответственно, а от 500 м и выше $\Delta\xi'' = 1,86$, $\Delta\eta'' = 1,51$ при среднем значении $-0,29''$ и $-0,36''$ соответственно.

Уклонения отвесных линий, полученные по модели геопотенциала EIGEN-6C4 для равнинных областей (высота менее 500 м), показывают удовлетворительную сходимость с наземными данными, что позволяет использовать ультровысокостепенные модели геопотенциала для получения уклонений отвесной линии с точностью до 1 угловой секунды для целей геодезии и навигации.

Уклонения отвесных линий, полученные по модели геопотенциала EIGEN-6C4 для горных районов (высота более 500 м), показывают неудовлетворительную сходимость с наземными данными.

Для улучшения сходимости уклонений отвесных линий, полученных по данным модели геопотенциала EIGEN-6C4 для горных районов с астрономо-геодезическими, применена методика учета влияния топографических масс в ближней зоне в горных районах.

В таблице 15 приведены статистические параметры распределения разностей составляющих УОЛ, астрономо-геодезических и полученных по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4, для пунктов Лапласа в горные районы.

Таблица 15 – Статистические параметры распределения разностей $\Delta\xi''$ и $\Delta\eta''$ для горных районов на территории Западной Сибири

Параметры	от 500 и выше	
	$\Delta\xi''$	$\Delta\eta''$
Количество точек	49	50
Минимальная разность	-2,58	-0,73
Максимальная разность	1,72	1,74
Диапазон	4,3	2,47
Средняя	-0,01	0,19
Дисперсия	0,55	0,24
Стандартное отклонение	0,74	0,49
Асимметрия	1,706	-0,075
Экцесс	2,952	-0,465

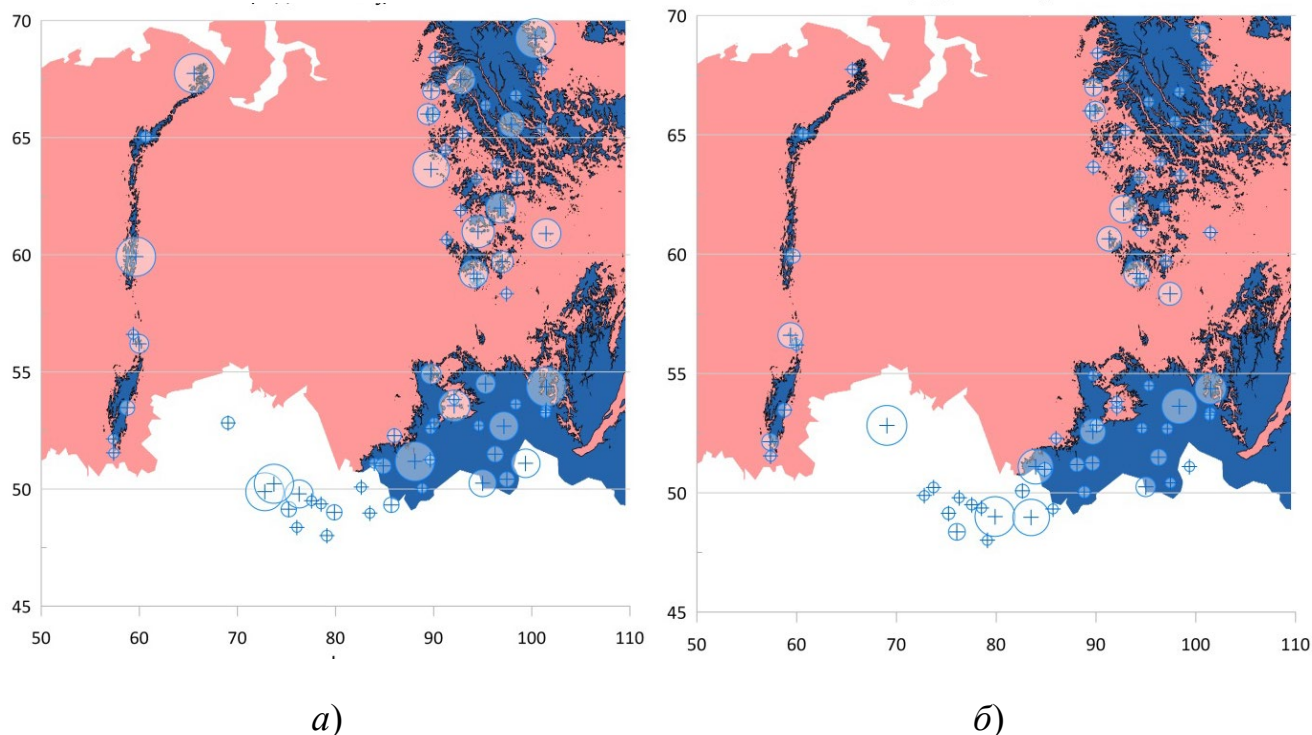
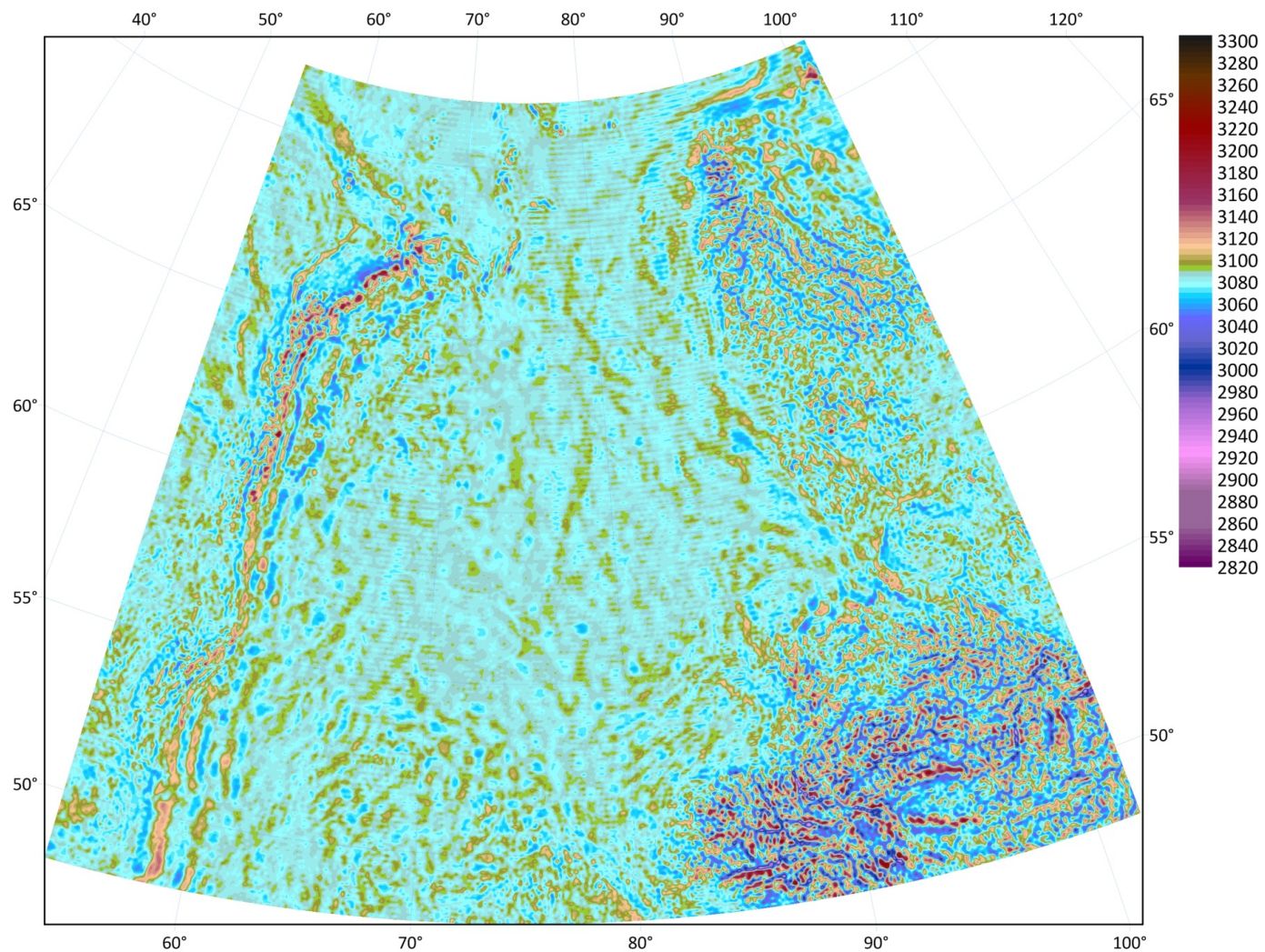


Рисунок 44 – Схема диаметров (относительные) зон учета:
a) в плоскости меридиана; *б)* в плоскости первого вертикала

4.5 Анализ результатов сравнения вертикального градиента силы тяжести, полученного по данным глобальной модели геопотенциала, с измеренным вертикальным градиентом

Рассмотрим определение вертикального градиента силы тяжести [19, 40, 37, 97, 105, 111, 133] на территории Западной Сибири с помощью разложения в ряд по сферическим функциям (133), в котором использованы гармонические коэффициенты глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4.

Вычисленные по формулам (133) значения вертикального градиента силы тяжести на территории Западной Сибири представлены на рисунке 45.



Модель геопотенциала

EIGEN-6C4

Модель рельефа

ETOPO1

$\Delta = 9$ км

Рисунок 45 – Картограмма вертикального градиента силы тяжести W_{zz} (Э) на территорию Западной Сибири

В таблице 16 приведены статистические параметры распределения значений вертикального градиента на территории Западной Сибири

Таблица 16 – Статистические параметры распределения значений вертикального градиента на территории Западной Сибири

Параметры	Значения
Минимальное	2 831
Максимальное	3 295
Диапазон	464
Среднее	3 084
Дисперсия	287

Из таблицы 16 видно, что значения вертикального градиента на территории Западной Сибири изменяются от 2 831 до 3 295 Э, причем среднее значение равно 3 084 Э.

Отклонения измеренного ВГСТ от его нормального значения на различных станциях наблюдений и даже площадях достигают значительных величин [5]. В таблице 17 приведены разности между измеренными и нормальными значениями ВГСТ, полученными по следующей формуле:

$$\Delta W_{zz} = W_{zz} - U_{zz}, \quad (180)$$

где $U_{zz} = 0,3086$ мГал – нормальный вертикальный градиент силы тяжести.

Таблица 17 – Статистические параметры распределения разности W_{zz} по формуле (180) для 16 точек измерения вертикального градиента

Параметры	Значение
Минимальное	-686
Максимальное	1 124
Диапазон	181
Среднее	46
Дисперсия	360
Стандартное отклонение	1,043
Асимметрия	3,246
Экссесс	-686

В таблице 18 приведены параметры распределения результатов сравнения ВГСТ, вычисленных по формуле (180), с полученными из измерений высокоточными гравиметрами на 16 гравиметрических пунктах.

Таблица 18 – Статистические параметры распределения результатов сравнения ВГСТ

Параметр	Значения
Минимальное	-688,7
Максимальное	217,5
Диапазон	306,2
Среднее	-24,5
Дисперсия	260,2
Стандартное отклонение	-1,421
Асимметрия	1,20

Выводы. Полученные результаты исследования вертикального градиента силы тяжести в различных пунктах на исследуемой территории с привлечением данных глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 позволяют сделать следующие выводы.

1 Измеренные в различных пунктах на исследуемой территории значения вертикального градиента силы тяжести значительно отличаются между собой и относительно нормального градиента (3 086 Э) на величину, достигающую 1 124 Э, при среднеквадратическом отклонении 360 Э. Это показывает достаточно большое отличие нормального вертикального градиента силы тяжести от измеренного на поверхности Земли.

2 Среднее значение вертикального градиента силы тяжести, вычисленного по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 с помощью разложения в ряд по сферическим функциям, отличается от нормального значения на территории Западной Сибири на величину 2,2 Э, что составляет 0,12 %. На значительной территории Западной Сибири эти расхождения не превышают 15 Э.

3 Расхождения между вычисленными значениями ВГСТ, полученными по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4, и измеренными высокоточными гравиметрами на пунктах наблюдений, достигают 688 Э, при среднеквадратическом отклонении 260 Э, что на 100 Э лучше, чем при использовании нормального ВГСТ.

4.6 Результаты определения геометрической структуры гравитационного поля на территории Западной Сибири по данным современных глобальных моделей геопотенциала

Вычисление вторых производных потенциала силы тяжести (градиентов гравитационного поля Земли) по полученным алгоритмам и составленным по ним вычислительных программ [70–75] было реализовано на тестовом участке территории Западной Сибири, которая ограничена:

- по широте – от 45 до 75° северной широты;
- по долготе – от 60 до 100° восточной долготы.

Расчеты для построения цифровых карт производились в узлах регулярной сетки 5' x 5' относительно эллипсоида WGS-84.

Для вычисления использованы гармонические коэффициенты глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 до 2190-й степени [116, 36, 107].

Результаты вычисления по формулам (133) компонент тензора градиентов силы тяжести на территории Западной Сибири представлены на рисунках 46–49 в виде картосхем векторов горизонтальной составляющей градиентов G и разности радиусов кривизны эллипсоида и радиусов гауссовой и средней кривизны уровенной поверхности соответственно. Модуль вектора горизонтального градиента силы тяжести G определяется по аномальным значениям вторых производных силы тяжести, вычисленным по формулам (133)

$$G = \sqrt{\left(W_{zx} - 8,11 \cdot 10^{-9} \cdot \sin 2\varphi\right)^2 + \left(W_{zy}\right)^2}. \quad (181)$$

Направление этого вектора определяется как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W_{zy}}{(W_{zx} - 8,11 \cdot 10^{-9} \cdot \sin 2\varphi)}. \quad (182)$$

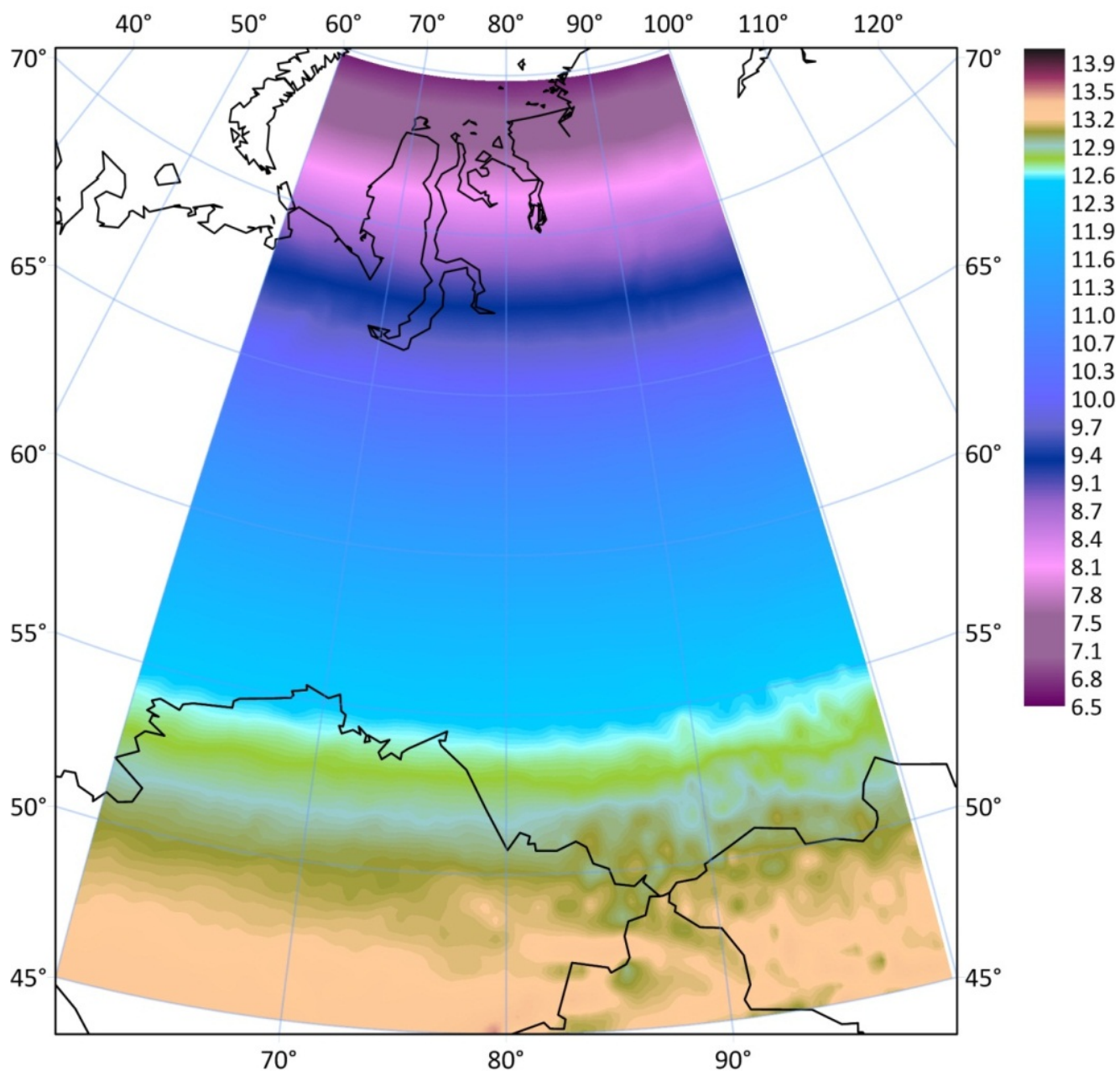


Рисунок 46 – Модуль вектора (в этвеш) горизонтального градиента
силы тяжести

Подставляя в формулу (33) вторые производные, вычисленные по формулам (133), получим выражение для вычисления разности радиусов гауссовой кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 в следующем виде:

$$\Delta K_G = \sqrt{\frac{g^2}{W_{xx}W_{yy} - (W_{xy})^2}} - \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B}, \quad (183)$$

где a – большая полуось эллипсоида;

e – первый эксцентрисет эллипсоида;

B – геодезическая широта;

g – сглаженное значение силы тяжести для трапеции размером $5' \times 5'$.

Результаты вычислений значений ΔK_G по формуле (183) для территории Западной Сибири приведены на рисунке 47.

Подставляя в уравнение (26) результаты вычисления второй производной потенциала силы тяжести по формулам (133), получим выражение для вычисления разности радиусов средней кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 в виде

$$\Delta K = -\frac{2W_z}{\omega^2 - W_{zz}} - \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B}. \quad (184)$$

Результаты вычислений значений ΔK по формуле (184) для территории Западной Сибири приведены на рисунке 48. На этом рисунке, кроме ΔK , приведены высоты геоида, вычисленного по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 с учетом гармоник до степени 2190 [73].

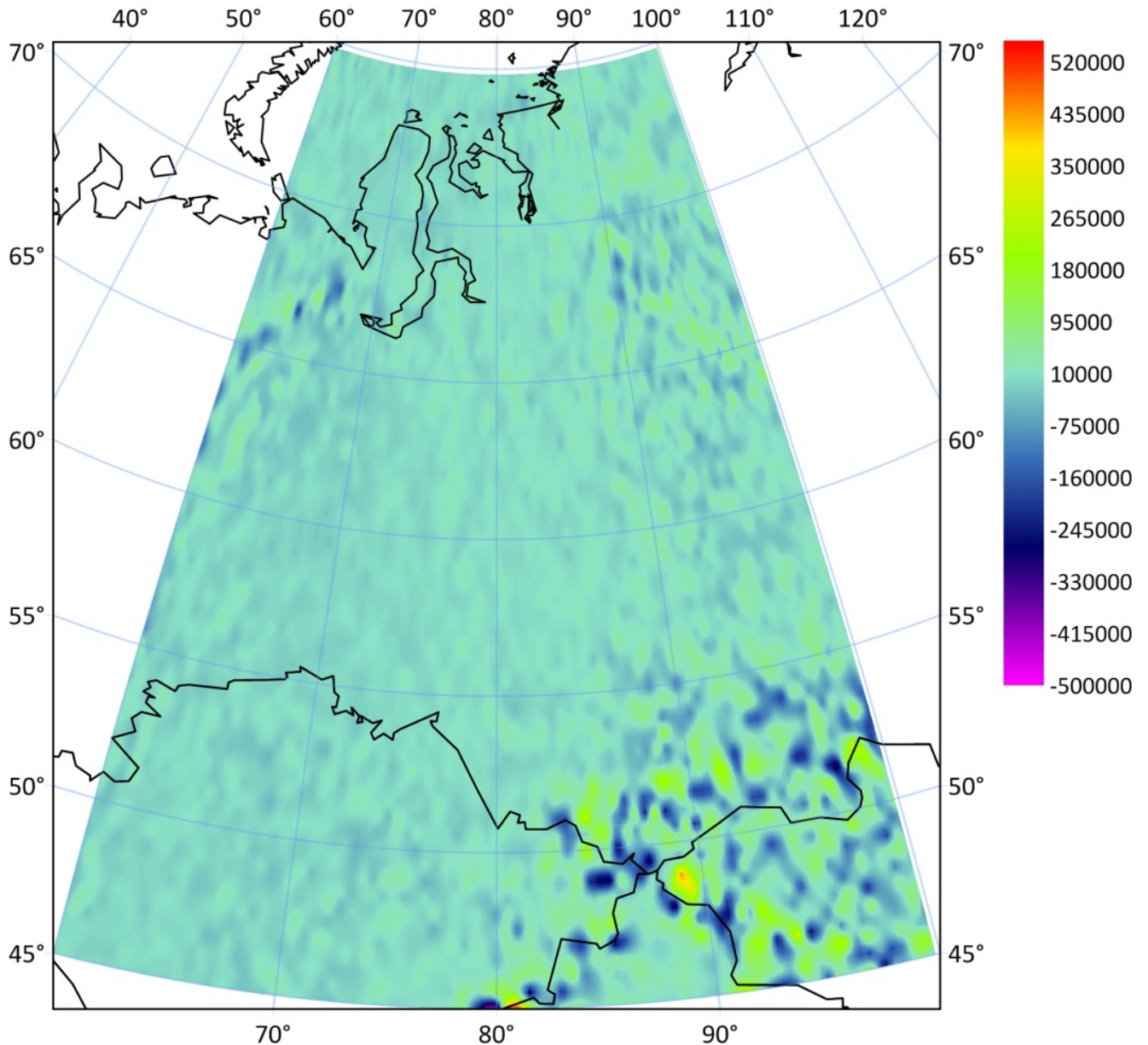


Рисунок 47 – Разности радиусов гауссовой кривизны (в метрах) уровневой поверхности потенциала силы тяжести и эллипсоида WGS-84

Приведенные на рисунке 48 разности ΔK имеют максимальные значения там, где ондуляции уровневой поверхности минимальны, и наоборот. Характер изолиний сильно отличается от ондуляций уровневой поверхности. Найденные значения ΔK имеют прямое приложение при решении локальных задач прикладной геодезии, когда за отсчетную поверхность для обработки местных геодезических сетей выбрана плоскость или эллипсоид. На рисунке 49 приведена гистограмма распределения разности ΔK .

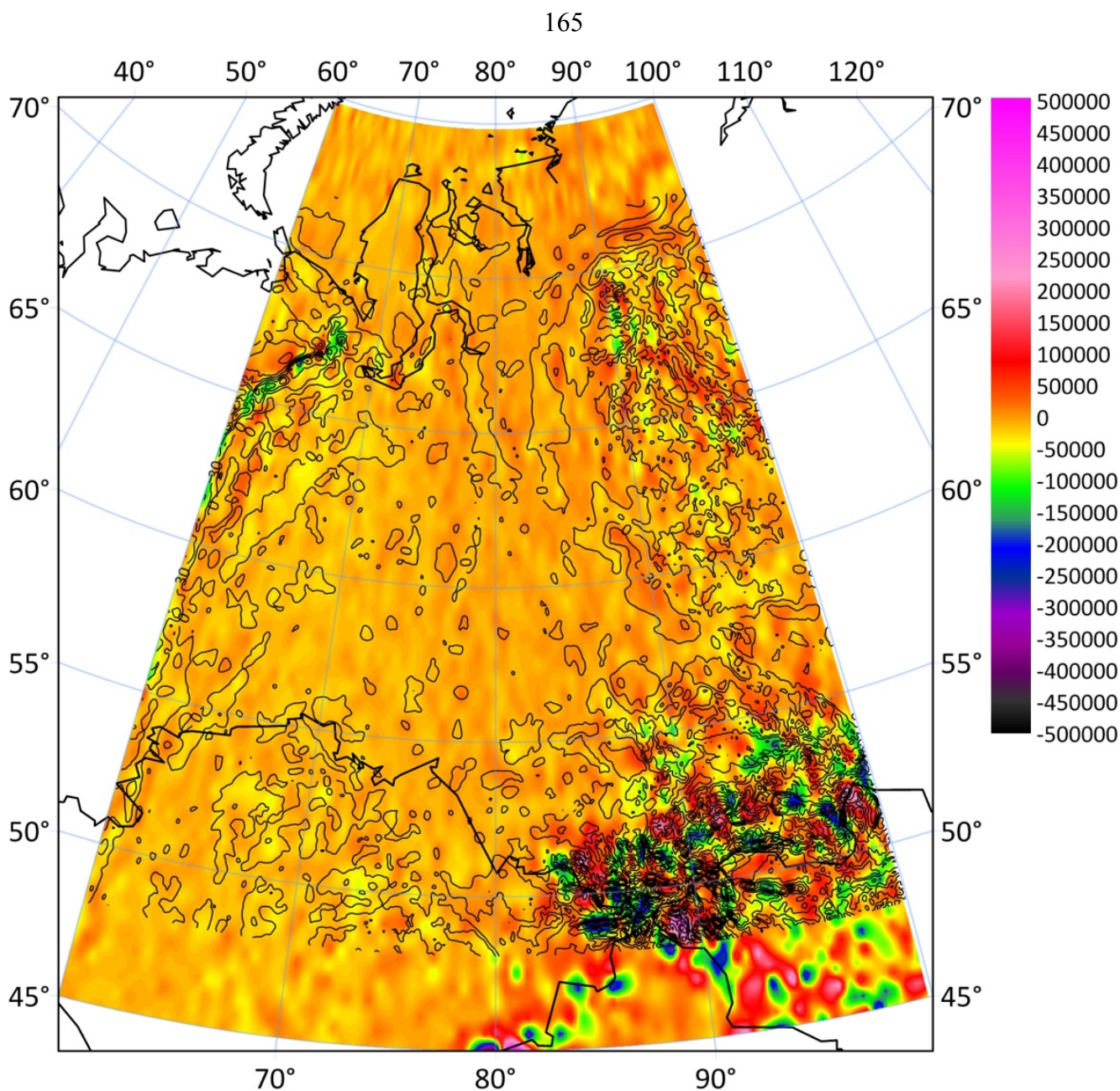


Рисунок 48 – Разности радиусов средней кривизны (в метрах) урвеной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 на территории Западной Сибири и высоты геоида (в горизонталях)

Статистические характеристики распределения вычисленных по формуле (184) значений разности радиусов средней кривизны урвеной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 на территории Западной Сибири приведены в таблице 19.

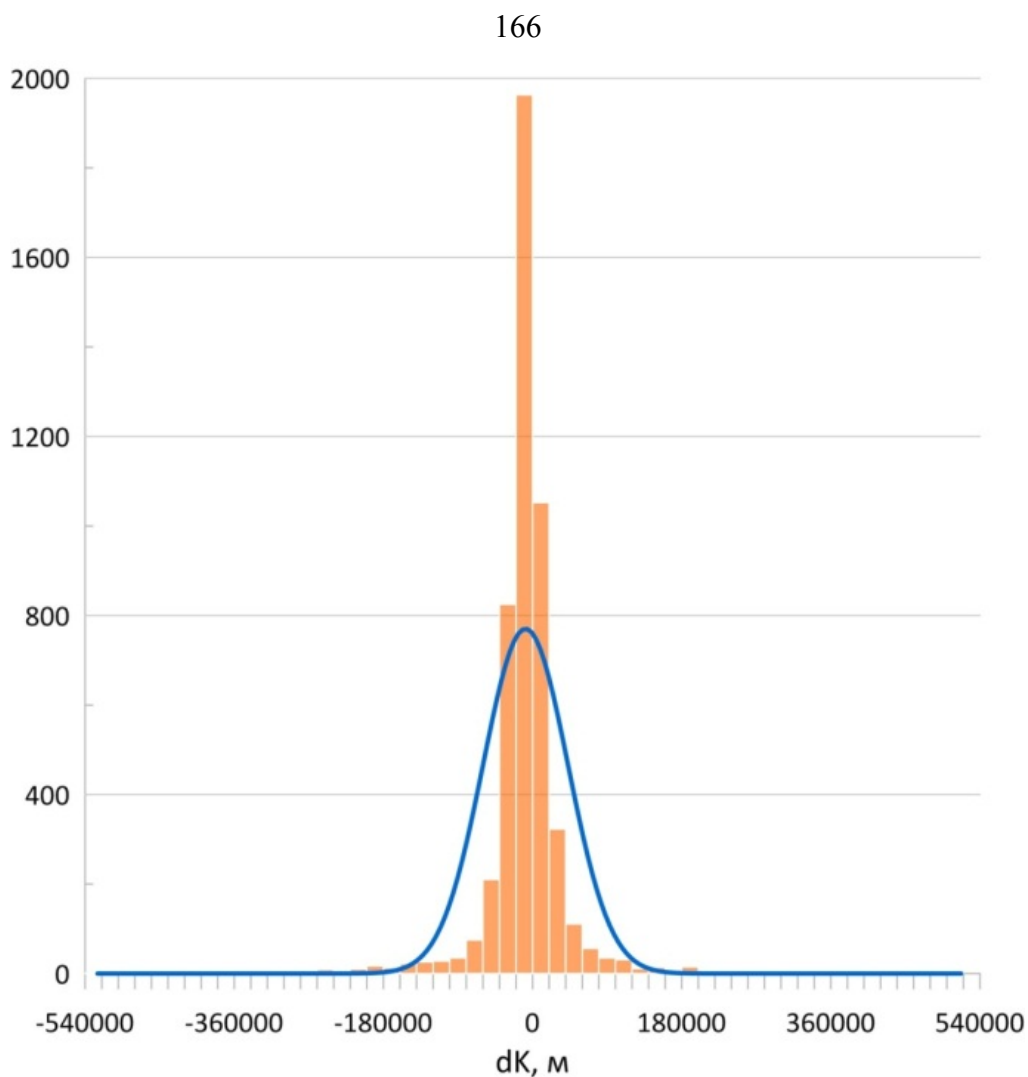


Рисунок 49 – Гистограмма распределения разности ΔK

Таблица 19 – Статистические характеристики распределения вычисленных по формуле (184) значений разности радиусов средней кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 на территории Западной Сибири

Параметр	Значение, м
Минимум	-525 012
Максимум	517 238
Диапазон	1 042 251
Среднее	-8 504
Стандартное отклонение	51 183
Асимметрия	-0,495
Эксцесс	21,014

Выводы по четвертому разделу

В ходе проведения исследований для различных компонентов тензора поля силы тяжести на поверхности Земли получены уравнения в виде рядов Фурье по системе сферических функций. По данным современной глобальной модели гравитационного поля Земли EIGEN-6C4 с помощью этих уравнений определены компоненты тензора на территории Западной Сибири, которые использовались для вычисления радиусов средней и гауссовой кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести.

В геодезии, при геометрических построениях на сфере или эллипсоиде является важным знание гауссовой и средней кривизны на данном участке геоида. В работе вычислены отклонения радиусов кривизны геоида от кривизны обще-земного эллипсоида WGS-84. Построены картосхемы и выполнен статистический анализ распределения отклонений радиуса средней кривизны. Максимальные отклонения наблюдаются в горных районах и могут достигать 535 км, минимальные – на равнинах при среднем отклонении на территории Западной Сибири 8 км.

Компоненты тензора силы тяжести, полученные в данной работе с помощью глобальных моделей гравитационного поля Земли, могут быть использованы для решения задач спутниковой гравиметрии для изучения специфических деталей внутреннего строения, эволюции недр и современных движений земной коры [2, 3, 4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги диссертационного исследования заключаются в следующем:

– выполнен анализ существующих методов моделирования геопотенциала, в результате которого выявлено, что при описании низкочастотных (планетарных) и среднечастотных (региональных) особенностей ГПЗ наилучший результат дает традиционное представление гравитационного потенциала разложением в ряд шаровых функций в сферических геоцентрических координатах (широта, долгота, геоцентрический радиус-вектор);

– разработан алгоритм оценки разрешающей способности и точности современных глобальных моделей геопотенциала на основе спектрального анализа, с помощью которого выполнена оценка погрешности аппроксимации для 15 моделей геопотенциала, показавшая, что наилучший результат обеспечивает модель геопотенциала EIGEN-6C4;

– разработаны методика и алгоритмы определения характеристик ГПЗ на физической поверхности Земли (потенциала силы тяжести, ускорения силы тяжести и ее аномалий, высот квазигеоида, составляющих уклонения отвесной линии, радиусов средней и гауссовой кривизны уровенной поверхности и силовой линии гравитационного поля, горизонтальных и вертикальных градиентов силы тяжести) с использованием глобальных моделей геопотенциала на основе математических моделей первых производных потенциала силы тяжести и всех компонент тензора силы тяжести в трехмерном пространстве, полученных путем дифференцирования потенциала силы тяжести в сферических координатах, представленного разложением в ряд Фурье по системе сферических и шаровых функций;

– разработаны методика и алгоритм учета гравитационного влияния топографических масс на уклонение отвесной линии в ближней зоне в горных районах, в которых радиус учитываемой области автоматически определяется по заданной плотности горных пород на основании геологических данных. В результате применения разработанной методики в горных районах Западной Сибири стандартные отклонения между составляющими уклонения отвеса, полученными

с помощью моделирования рядом Фурье по системе сферических функций с учетом гармоник модели геопотенциала EIGEN-6C4 до степени 2190, и астрономо-геодезическими отклонениями отвеса, полученными из измерений на пунктах Лапласа, уменьшились в 2 раза;

– разработан комплекс программ, реализующий весь процесс определения характеристик ГПЗ по данным современных глобальных моделей геопотенциала; впервые получены цифровые модели и построены картосхемы характеристик ГПЗ на территорию Западной Сибири;

– выполнено исследование методики комплексного определения характеристик ГПЗ и оценка точности полученных цифровых моделей характеристик ГПЗ (потенциала силы тяжести, ускорения силы тяжести и ее аномалий, высот квазигеоида, составляющих отклонения отвесной линии, радиусов средней и гауссовой кривизны уровенной поверхности и силовой линии гравитационного поля, горизонтальных и вертикальных градиентов силы тяжести) путем сравнения с независимыми наземными данными. Анализ результатов оценки точности показал возможность применения полученных цифровых моделей характеристик ГПЗ для решения широкого круга задач геодезии, геологии и навигации.

Таким образом, поставленная цель диссертационного исследования, направленная на разработку методики комплексного определения характеристик гравитационного поля по данным современных глобальных моделей геопотенциала, достигнута.

Методику комплексного определения характеристик ГПЗ рекомендуется использовать для решения задач, связанных с коррекцией инерциальных навигационных систем, развитием корреляционно-экстремальных систем навигации и наведения, развитием направления «Спутниковая гравиметрия», при проведении геолого-геофизических исследований.

Перспективы дальнейших исследований состоят в повышении точности определения характеристик ГПЗ на локальных участках земной поверхности и разработке динамических моделей характеристик ГПЗ для геофизического мониторинга территорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Алексеев, С. П. Современные направления реализации технологий навигационно-гидрографического и гидрометеорологического обеспечения морской деятельности [Текст] / С. П. Алексеев // Пятая Российская научно-техническая конференция «Современное состояние и проблемы навигации и океанографии». – 2004. – № 2 (32). – С. 30–32.

2 Антонов, Ю. В. Карта вертикального градиента силы тяжести центральной части Воронежского массива [Текст] / Ю. В. Антонов, К. Ю. Силкин, К. С. Черников // Геофизика. – 2006. – № 3. – С. 53–56.

3 Антонов, Ю. В. Плотностные неоднородности в земной коре [Текст] / Ю. В. Антонов // Геофизика. – 2005. – Вып. 1. – С. 62–68.

4 Ардюков, Д. Г. Современные движения земной коры Западно-Саянского региона [Текст] / Д. Г. Ардюков, Е. В. Бойко, Р. Г. Седусов // Трофимуковские чтения – 2008 : тр. Всероссийской молодежной науч. конф. с участием иностранных ученых, 5–12 октября 2008 г. – 2008. – Т. 2. – С. 181–183.

5 Балавадзе, Б. К. К методике определения вертикального градиента силы тяжести [Текст] / Б. К. Балавадзе // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1968. – Вып. 27. – С. 54–56.

6 Бальмино, Дж. Представление потенциала Земли с помощью совокупности точечных масс, находящихся внутри Земли [Текст] / Дж. Бальмино // Использование искусственных спутников для геодезии. – М. : Мир, 1975. – С. 178–183.

7 Бровар, В. В. Параметры лунных масконов [Текст] / В. В. Бровар, А. П. Юзефович // Современные проблемы позиционной астрономии. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – С. 303–312.

8 Бурша, М. Основы космической геодезии. Ч. II. Динамическая геодезия [Текст] / М. Бурша. – М. : Недра, 1975. – 280 с.

9 Бычков, С. Г. Вычисление аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках [Текст] / С. Г. Бычков, А. С. Долгаль, А. А. Симанов. – Пермь : УрОРАН, 2015. – 142 с.

10 Бычков, С. Г. Особенности обработки результатов современной гравиметрической съемки [Текст] / С. Г. Бычков // Геофизический вестник. – 2005. – № 12. – С. 9–13.

11 Веселов, К. Е. Кварцевые астазированные гравиметры [Текст] / К. Е. Веселов. – М. : Гостоптехиздат, 1961. – 176 с.

12 Вовк, И. Г. О точности представления внешнего гравитационного потенциала и силы тяжести разложением в ряд по сферическим функциям [Текст] / И. Г. Вовк, А. Л. Мирошников // II Орловская конференция «Изучение Земли как планеты методами геофизики, геодинамики и астрономии». – Киев, 1988. – С. 59–61.

13 Выгодский, М. Я. Дифференциальная геометрия [Текст] / М. Я. Выгодский. – М., Л. : ГИТТЛ, 1949. – 512 с.

14 Гиенко, Е. Г. Исследование точности получения нормальных высот и уклонов отвесной линии на территории Новосибирской области с помощью глобальной модели геоида EGM2008 [Текст] / Е. Г. Гиенко, А. А. Струков, А. П. Решетов // ГЕО-Сибирь-2011. VII Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2011 г.). – Новосибирск : СГГА, 2011. Т. 1, ч. 2. – С. 186–191.

15 ГКИНП (ГНТА)-06-278-04. Руководство пользователя по выполнению работ в системе координат 1995 года (СК-95) [Текст]. – М. : ЦНИИГАиК, 2004.

16 Глазунов, А. С. Современные тенденции в геодезической астрономии [Текст] / А. С. Глазунов // ГЕО-Сибирь-2008. IV Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 5 т. (Новосибирск, 22–24 апреля 2008 г.). – Новосибирск : СГГА, 2008. Т. 1, ч. 1. – С. 183–188.

17 Голдобин, Д. Н. Одномерное сферическое преобразование Фурье и его реализация для расчета глобальной модели квазигеоида в нулевом приближении

теории Молоденского [Текст] / Д. Н. Голдобин, Е. М. Мазурова, В. Ф. Канушин // Вестник СГУГиТ. – 2015. – Вып. 3 (31). – С. 45–52.

18 Голдобин, Д. Н. Определение геометрической структуры гравитационного поля на территории Западной Сибири по данным современных глобальных моделей геопотенциала [Текст] / Д. Н. Голдобин // Вестник СГУГиТ. – 2019. – Т. 24. № 2. – С. 19–34.

19 Голдобин, Д. Н. Проблема редуцирования наблюдаемого значения ускорения силы тяжести [Текст] / Д. Н. Голдобин, А. И. Шаповалова, В. Ф. Канушин // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. XIV Междунар. науч. конгр. : Магистерская научная сессия «Первые шаги в науке» : сб. материалов (Новосибирск, 23–27 апреля 2018 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2018. – С. 270–276.

20 Гравиразведка. Справочник геофизика [Текст] / Под ред. Е. А. Мудрецов, К. Е. Веселова. – 2-е изд. – М. : Недра, 1990. – 607 с.

21 Грушинский, Н. П. Основы гравиметрии [Текст] / Н. П. Грушинский. – М. : Наука, 1983. – 352 с.

22 Дмитриев, С. П. Инерциальные методы в инженерной геодезии [Текст] / С. П. Дмитриев. – СПб. : ГНЦ РФ – ЦНИИ «Электроприбор», 1997. – 208 с.

23 Закатов, П. С. Курс высшей геодезии [Текст] / П. С. Закатов. – М. : Недра, 1976. – 511 с.

24 Исследование современных глобальных моделей гравитационного поля Земли [Текст] : монография / В. Ф. Канушин, А. П. Карпик, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, А. М. Косарева, Н. С. Косарев. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 270 с.

25 Исследование спектральных характеристик глобальных моделей гравитационного поля Земли, полученных по космическим миссиям CHAMP, GRACE и GOCE [Текст] / А. П. Карпик, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, Е. М. Мазурова // Гироскопия и навигация. – 2014. – № 4 (87). – С. 34–44.

26 К вопросу влияния методов регуляризации на точность современных глобальных моделей геопотенциала [Текст] / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина,

Д. Н. Голдобин, Н. С. Косарев, А. М. Косарева // Гироскопия и навигация. – 2016. – Т. 24, № 2 (93). – С. 77–86.

27 К вопросу о необходимости учета неприливных изменений силы тяжести при деформационном мониторинге гидротехнических сооружений [Текст] / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, Н. С. Косарев // Изв. вузов. Строительство. – 2017. – № 11–12 (707–708). – С. 72–80.

28 К вычислению уклонений отвесной линии и превышений геоида по гравитационным аномалиям [Текст] / Э. А. Боярский, Л. В. Афанасьева, В. Н. Конешов, Ю. Е. Рожков // Физика Земли. – 2010. – № 6. – С. 80–85.

29 Карпик, А. П. Методологические и технологические основы геоинформационного обеспечения территорий [Текст] : монография / А. П. Карпик. – Новосибирск: СГГА, 2004. – 260 с.

30 Карпик, А. П. Реализация проекта наземной ифраструктуры глобальной навигационной спутниковой системы «ГЛОНАСС» на территории Новосибирской области [Текст] / А. П. Карпик, Г. А. Сапожников, А. В. Дюбанов // ГЕО-Сибирь-2010. VI Междунар. научн. конгр. : Пленарное заседание : сб. материалов (Новосибирск, 19–29 апреля 2010 г.). – Новосибирск : СГГА, 2010. – С. 54–59.

31 Кащеев, Р. А. Современные методы спутниковой гравиметрии [Текст] : конспект лекций / Р. А. Кащеев. – Казань : Казан. ун-т, 2015. – 45 с.

32 Конешов, В. Н. Методика расчета уклонения отвесной линии на основе S-аппроксимаций [Текст] / В. Н. Конешов, И. В. Осика, И. Э. Степанова // Физика Земли. – 2007. – № 6. – С. 19–25.

33 Конешов, В. Н. Об использовании современных моделей геопотенциала для исследования уклонений отвесных линий в Арктике [Текст] / В. Н. Конешов, В. Б. Непоклонов, И. А. Столяров // Гироскопия и навигация. – 2012. – № 2 (77). – С. 44–55.

34 Конешов, В. Н. Об одном способе детализации глобальных моделей гравитационного поля Земли [Текст] / В. Н. Конешов, В. Б. Непоклонов, О. В. Половнев // Физика Земли. – 2017. – № 1. – С. 114–122.

35 Конешов, В. Н. Оценка навигационной информативности аномального гравитационного поля Земли [Текст] / В. Н. Конешов, В. Б. Непоклонов, Л. И. Августов // Гироскопия и навигация. – 2016. – № 2 (93). – С. 95–106.

36 Кононюк, А. Е. Дискретная математика. Поверхности. В 12 кн. Кн. 6. Ч. 1. [Текст] / А. Е. Кононюк. – Киев : Освіта України, 2013. – 564 с.

37 Краснорылов, И. И. Основы космической геодезии [Текст] / И. И. Краснорылов, Ю. В. Плахов. – М. : Недра, 1976. – 216 с.

38 Кузьмин, В. И. Результаты измерения градиентов ускорения силы тяжести на пунктах государственной гравиметрической сети [Текст] / В. И. Кузьмин, А. В. Голушко // Вестник СГГА. – 1996. – Вып. 1. – С. 8–14.

39 Лундквист, С. А. Представление геопотенциала с помощью выборочных функций [Текст] / С. А. Лундквист, Е. О. Джакалия // Использование искусственных спутников для геодезии – М. : Мир, 1975. – С. 184–192.

40 Ляндрес, А. Ю. ООО «Гео Дейта консалтинг». Интерпретация аномалий гравитационного поля с применением значений его вертикального градиента [Электронный ресурс] / А. Ю. Ляндрес. – Режим доступа: <http://www.georazrez.ru>.

41 Макаров, Н. П. Геодезическая гравиметрия [Текст] / Н. П. Макаров. – М. : Недра, 1968. – 408 с.

42 Маловичко, А. К. Гравиразведка [Текст] / А. К. Маловичко, В. И. Костицын. – М. : Недра, 1992. – 357 с.

43 Машимов, М. М. Высшая геодезия [Текст] / М. М. Машимов. – М. : ВИА, 1991. – 552 с.

44 Методы определения уклонений отвесной линии на подвижном основании [Текст] / В. Н. Конешов, М. И. Евстифеев, И. Б. Челпанов, О. М. Яшникова // Гироскопия и навигация. – 2016. – № 3 (94). – С. 75–95.

45 Мещеряков, Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля [Текст] / Г. А. Мещеряков. – М. : Наука, 1991. – 216 с.

46 Мещеряков, Г. А. О многоточечных моделях геопотенциала [Текст] / Г. А. Мещеряков, А. Н. Марченко // Изучение Земли как планеты методами астрономии геофизики и геодезии. – Киев : Наук. думка, 1982. – С. 121–131.

47 Миронов, В. С. Курс гравиразведки [Текст] / В. С. Миронов. – Л. : Недра, 1972. – 512 с.

48 Молоденский, М. С. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли [Текст] / М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина // Тр. ЦНИИГАиК. – Вып. 131. – М. : Геодезиздат, 1960. – 250 с.

49 Мориц, Г. Современная физическая геодезия [Текст] / Г. Мориц. – М. : Недра, 1983. – 392 с.

50 Нейман, Ю. М. Вариационный метод физической геодезии [Текст] / Ю. М. Нейман. – М. : Недра, 1979. – 200 с.

51 Нейман, Ю. М. Сферические функции и их применение в геодезии [Текст] : учеб. пособие для студентов геодез. фак. / Ю. М. Нейман, Л. С. Сугаипова. – М. : МИИГАиК, 2005. – 87 с.

52 Непоклонов, В. Б. Методики определения составляющих уклонений отвесных линий и высот квазигеоида по гравиметрическим данным [Текст] / В. Б. Непоклонов // Гравиметрия и геодезия (отв. ред. Б. В. Бровар). – М. : Научный мир, 2010. – С. 455–464.

53 О возможности применения результатов аэрогравиметрических измерений для вычисления уклонений отвесной линии в труднодоступных районах [Текст] / Ю. Е. Рожков, Н. В. Дробышев, В. В. Клевцов, В. Н. Конешов // Физика Земли. – 2005. – № 2. – С. 84–87.

54 О результатах сравнения определения уклонений отвесной линии на территории Западной Сибири [Текст] / Н. С. Косарев, В. Ф. Канушин, В. И. Кафтан, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, Г. Н. Ефимов // Гироскопия и навигация. – 2017. – Т. 25, № 4 (99). – С. 72–83.

55 Огородова, Л. В. Нормальное поле и определение аномального потенциала [Текст] : учеб. пособие / Л. В. Огородова. – М. : Изд-во МИИГАиК, 2010. – 105 с.

56 Огородова, Л. В. Представление аномального гравитационного поля Луны полем точечных масс [Текст] / Л. В. Огородова, А. П. Юзефович, Г. В. Бобко //

Современные проблемы позиционной астрономии. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – С. 312–317.

57 Определение допустимой погрешности планового положения пунктов гравиметрической съемки [Текст] / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Н. С. Косарев, Н. Н. Федотова // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. XIV Междунар. науч. конгр. : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия» : сб. материалов (Новосибирск, 23–27 апреля 2018 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2018. – С. 146–153.

58 Определение составляющих уклонения отвесной линии на территории Западной Сибири методом численного дифференцирования [Текст] / А. П. Карпик, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, Н. С. Косарев, А. М. Косарева // Вестник СГУГиТ. – 2018. – Т. 23, № 3. – С. 15–29.

59 Остач, О. М. Аппроксимация внешнего гравитационного поля Земли моделью гравитирующих масс [Текст] / О. М. Остач, Н. Н. Агеева // Изучение Земли как планеты методами астрономии геофизики и геодезии. – Киев : Наук. думка, 1982. – С. 106–114.

60 Оценка разрешающей способности и точности ультравысокостепенной глобальной гравитационной модели EGM-2008 [Текст] / А. П. Карпик, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, А. М. Косарева, Н. С. Косарев // Сборник материалов. – М. : Проспект, 2014. – С. 23–28.

61 Параметры Земли 1990 (ПЗ 90.11). Справочное руководство [Текст]. – М. : Научно-исследовательский центр топогеодезического и навигационного обеспечения «27 ЦНИИ» Минобороны России, 2014. – 52 с.

62 Пеллинен, Л. П. О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида в горах [Текст] / Л. П. Пеллинен // Тр. ЦНИИГАиК. – Вып. 176. – М. : Недра, 1969. – С. 99–112.

63 Пеллинен, Л. П. Влияние топографических масс на вывод характеристик гравитационного поля Земли [Текст] / Л. П. Пеллинен // Тр. ЦНИИГАиК. – Вып. 145. – М. : Геодезиздат, 1962. – С. 23–42.

64 Пеллинен, Л. П. Высшая геодезия (теоретическая геодезия) [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. П. Пеллинен. – М. : Недра, 1978. – 264 с.

65 Пеллинен, Л. П. Статистический анализ силы тяжести [Текст] / Л. П. Пеллинен // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1970. – № 5. – С. 43–50.

66 Плахов, Ю. В. О роли точечного представления внешнего геопотенциала в астродинамике [Текст] / Ю. В. Плахов // Исслед. по геодезии, аэрофотосъемке и картографии. – 1978. – № 3 (1). – С. 51–56.

67 Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии [Текст] / П. К. Рашевский. – М., Л. : ГИТТЛ, 2004. – 428 с.

68 Рекуррентный алгоритм определения уклонения отвесной линии по данным гравиметрической съемки, основанный на стохастическом подходе [Текст] / Н. В. Дробышев, В. Н. Конешов, И. А. Папуша, М. Ю. Попеленский, Ю. Е. Рожков // Гироскопия и навигация. – 2006. – № 2 (53). – С. 75–84.

69 Сагитов, М. У. Лунная гравиметрия [Текст] / М. У. Сагитов. – М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. литературы, 1979. – 432 с.

70 Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2018665784 Geo_PlaneGraviGrad ver. 1.0 в реестре программ для ЭВМ [Текст] / Д. Н. Голдобин ; правообладатель Сиб. гос. ун-т геосистем и технологий (RU) ; дата поступления 26.11.2018 ; дата регистрации 11.12.2018.

71 Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2017614543 Geo_VAGRD ver. 1.0 в реестре программ для ЭВМ [Текст] / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин ; правообладатель Сиб. гос. ун-т геосистем и технологий (RU) ; дата поступления 10.01.2017 ; дата регистрации 19.04.2017.

72 Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2015660860 GeoPot ver. 1.0 [Текст] в реестре программ для ЭВМ / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина ; правообладатель Сиб. гос. ун-т геосистем и технологий (RU) ; дата поступления 26.08.2015 ; дата регистрации 12.10.2015.

73 Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2015661197 GeoUnd 1.0 в реестре программ для ЭВМ [Текст] / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Н. С. Косарев ; правообладатель Сиб. гос. ун-т геосистем и технологий (RU) ; дата поступления 26.08.2015 ; дата регистрации 20.10.2015.

74 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018666260 Geo_ABSGRAV в реестре программ для ЭВМ [Текст] / Д. Н. Голдобин ; правообладатель Сиб. гос. ун-т геосистем и технологий (RU) ; дата поступления 26.11.2018; дата регистрации 13.12.2018.

75 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018665784 Geo_PlaneGraviGrad в реестре программ для ЭВМ [Текст] / Д. Н. Голдобин ; правообладатель Сиб. гос. ун-т геосистем и технологий (RU) ; дата поступления 26.11.2018 ; дата регистрации 11.12.2018.

76 Серкеров, С. А. Спектральный анализ гравитационных и магнитных аномалий [Текст] / С. А. Серкеров. – М. : Недра, 2002. – 437 с.

77 Современные глобальные модели гравитационного поля Земли и их погрешности [Текст] / В. Н. Конешов, В. Б. Непоклонов, Р. А. Сермягин, Е. А. Лидовская // Гироскопия и навигация. – 2013. – № 1 (80). – С. 107–118.

78 Современные глобальные модели квазигеоида: точностные характеристики и разрешающая способность [Текст] / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, Е. М. Мазурова, Н. С. Косарев, А. М. Косарева // Вестник СГУГиТ. – 2017. – Т. 22, № 1. – С. 30–49.

79 Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли [Текст] / В. Г. Пешехонов, О. А. Степанов, Л. И. Августов, Б. А. Блажнов, Ю. В. Болотин, А. К. Вершовский, Л. Ф. Витушкин, В. С. Вязьмин, С. В. Гайворонский, А. А. Голован, М. И. Евстифеев, Г. И. Емельянец, Л. К. Железняк, В. Н. Конешов, А. А. Краснов, Н. В. Михайлов, П. С. Михайлов, А. В. Моторин, В. Н. Непоклонов, А. С. Носов, Н. А. Парусников, В. В. Погорелов, Ю. Л. Смоллер, А. В. Соколов, В. Н. Соловьев, А. П. Степанов, А. Б. Торопов,

В. В. Цодокова, И. Б. Челпанов, Л. С. Элинсон, С. Ш. Юрист, О. М. Яшникова. – СПб. : Электроприбор, 2017. – 390 с.

80 Сравнение спутниковых моделей проекта GOCE с различными наборами независимых наземных гравиметрических данных [Текст] / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, Е. М. Мазурова, А. М. Косарева, Н. С. Косарев // Вестник СГУГиТ. – 2014. – Вып. 3 (27). – С. 21–35.

81 Стандартная Земля. Геодезические параметры Земли на 1966 г. [Текст] / Под ред. К. Лунквиста, Г. Вейса; перевод с англ. П. П. Медведева; под ред. Л. П. Пеллинен. – М. : Мир, 1969.

82 Сугаипова, Л. С. О планируемых проектах спутниковой гравиметрии [Текст] / Л. С. Сугаипова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № 6. – С. 3–8.

83 Телеганов, Н. А. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем [Текст] : учеб. пособие / Н. А. Телеганов, А. В. Елагин. – Новосибирск : СГГА, 2004. – 216 с.

84 Титчмарш, Е. К. Теория дзета-функции Римана [Текст] / Е. К. Титчмарш. – М. : Наука, 1953. – 409 с.

85 Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 248 с.

86 Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 288 с.

87 Торге, В. Гравиметрия [Текст] / В. Торге // Пер. с англ. Г. А. Шанурова; под ред. А. П. Юзефовича. – М. : Мир, 1999. – 429 с.

88 Холшевников, К. В. О величине коэффициентов разложения потенциала [Текст] / К. В. Холшевников // Вестник ЛГУ. – 1965. – № 13. – С. 155–158.

89 Церклевич, А. Л. Об одном методе построения модели точечных масс гравитационного поля планеты [Текст] / А. Л. Цирклевич, С. Д. Волжанин // Письма в АЖ. – 1984. – 10, № 7. – С. 559–563.

- 90 Цуриков, А. А. Исследование точности определения астрономо-геодезических уклонений отвеса с применением GPS/ГЛОНАСС-технологий [Текст] / А. А. Цуриков // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – № 2. – С. 13–16.
- 91 Численные методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, А. В. Гончаровский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 230 с.
- 92 Чуйкова, Н. А. Геометрическая фигура Луны, представленная в виде разложения по сферическим и выборочным функциям [Текст] / Н. А. Чуйкова // Астрон. журн. – 1975. – Т. 52, № 6. – С. 1279–1292.
- 93 Шимбирев, Б. П. Теория фигуры Земли [Текст] / Б. П. Шимбирев. – М. : Недра, 1975. – 432 с.
- 94 Шкодров, В. Г. О совместном определении гравитационного поля Земли по измерениям силы тяжести на поверхности Земли и по движению ИСЗ [Текст] / В. Г. Шкодров, Э. И. Ягудина // Наблюдения искусственных спутников Земли. – 1973. – № 13. – С. 69–89.
- 95 Юркина, М. И. Методы исследования фигуры Земли в горном районе [Текст] / М. И. Юркина // Тр. ЦНИИГАиК. – Вып. 103. – М. : Геодезиздат, 1954. – С. 65–117.
- 96 Яшкин, С. Н. Некоторые аспекты спутниковой градиентометрии [Текст] / С. Н. Яшкин. – ГНОПРОФИ, 2007.
- 97 Ager, C. A. Vertical Gravity Gradient Surveys: Field Results and Interpretation in British Columbia, Canada [Text] / C. A. Ager, S. O. Liard // Geophysics. – 1982. – V. 47. – № 7. – PP. 19–91.
- 98 An improved 10-day time series of the geoid from GRACE and LAGEOS data [Electronic resource] / R. Biancale, J. Lemoine, S. Bruinsma, S. Gratton, S. Bourgoigne. – Mode of access: ftp://ftp.csr.utexas.edu/pub/grace/Proceedings/Presentations_GSTM2008.pdf.
- 99 Analyzing spectral characteristics of the global earth gravity field models obtained from the CHAMP, GRACE and GOCE space missions [Text] / A. P. Karpik [et al.] // Gyroscopy and Navigation. – 2015. – Vol. 6, № 2. – PP. 101–108.

100 Andersen, O. B. DNSC08 mean sea surface and mean dynamic topography models [Text] / O. B. Andersen, P. Knudsen, P. Berry // Journal of Geophysical Research. – 2009. – Vol. 114.

101 Andersen, O. B. The DTU10 Gravity field and Mean sea surface, Second international symposium of the gravity field of the Earth (IGFS2) [Electronic resource] / O. B. Andersen. – Mode of access: http://www.space.dtu.dk/english/Research/Scientific_data_and_models/Global_Marine_Gravity_Field.

102 Buchar, E. The Motion of the Orbita Node of Sputnik 2 (1957 β) and the Oblateness of the Earth [Text] / Buchar E. // Studia Geophysica et Geodaetica. – 1958. – Volume 2. – PP. 306–321.

103 CNES/GRGS 10-day gravity field models (release 2) and their evaluation [Text] / S. Bruinsma, J. Lemoine, R. Biancale, N. Vales // Advanced Space Research. – 2010. – Vol. 45. – PP. 587–601.

104 Colombo, O. L. Ephemeris errors of GPS satellites [Text] / O. L. Colombo // Bull. Geod. – 1986. – 60 (1). – PP. 64–86.

105 Determining deflections of the vertical in the Western Siberia region: The results of comparison [Text] / N. S. Kosarev, V. F. Kanushin, V. I. Kaftan, I. G. Ganagina, D. N. Goldobin, G. N. Efimov // Gyroscopy and Navigation. – 2018. – Vol. 9, № 2. – PP. 124–130.

106 Development of the global geoid model based on the algorithm of one dimensional spherical Fourier transform [Text] / E. M. Mazurova, V. F. Kanushin, I. G. Ganagina, D. N. Goldobin, V. V. Bochkareva, N. S. Kosarev, A. M. Kosareva // Gyroscopy and Navigation. – 2016. – Vol. 7, № 3. – PP. 269–276.

107 Dill, J. C. Color Graphics and Ship Hull Surface Curvature [Text] / J. C. Dill, D. F. Rogers // Proc. of the Fourth International Conference on Computer Applications in the Automation of Shipyard Operation and Ship Design (ICCAS 82). – North Holland, 1982. – PP. 197–205.

108 EIGEN-6C: A High-Resolution Global Gravity Combination Model Including GOCE Data [Text] / R. Shako, C. Förste, O. Abrikosov, S. Bruinsma, J. Marty,

J. Lemoine, F. Flechtner, H. Neumayer, C. Dahle // In Observation of the System Earth from Space – CHAMP, GRACE, GOCE and future missions. Science Report. – 2014. – No. 20. – PP. 155–161.

109 EIGEN-6C4: The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. GFZ Data Services [Electronic resource] / Christoph Förste, Sean L. Bruinsma, Oleg Abrikosov, Jean-Michel Lemoine; Jean Charles Marty, Frank Flechtner, G. Balmino, F. Barthelmes, R. Biancale. – Mode of access: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/Foerste-et-al-EIGEN-6C4.pdf>.

110 Evaluation of recent earths global gravity field models with terrestrial gravity data [Text] / A. P. Karpik, V. F. Kanushin, I. G. Ganagina, D. N. Goldobin, N. S. Kosarev, A. M. Kosareva // Contributions to Geophysics and Geodesy. – 2016. – Vol. 46, № 1. – PP. 1–11.

111 Faikiewicz, Z. Gravity Vertical Measurements for the Detection of Small and Antropogenic form [Text] / Z. Faikiewicz // Geophysics. – 1976. – V. 41. – № 5. – PP. 1016–1030.

112 Geophys, J. Martian year of tracking [Text] / J. Geophys // Res. – 1979. – 84, H BI4. – PP. 8443–8456.

113 Giacaglia, G. E. O. Sampling functions as an alternative to spherical harmonics [Text] / G. E. O. Giacaglia, C. A. Lundquist // Sp. Proc. of IAU Symp., Rotation of the Earth; ed. by S. Jumi, Sasaki, Printing and Publ. C°, Sendai, Japan, Morioka. – 1971. – May, № 48. – PP. 149–153.

114 Giacaglia, G. E. O. Sampling functions for geophysics [Text] / G. E. O. Giacaglia, C. A. Lunquist // Smith. Astrophys. obs., Spec, rep. – 1972. – 1 July, IT 344. – 94 p.

115 Hansen, P. C. Rank-deficient and discrete ill-posed problems [Text] / P. C. Hansen. – Philadelphia : SIAM, 1998. – 247 p.

116 ICGEM – International Center for Global Gravity Field Models [Electronic resource]. – Mode of access: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html>.

117 ITSG-Grace 2014 [Electronic resource] / A. Kvas, T. Mayer-Gürr, N. Zehenter, B. Klinger. – Mode of access: http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/TU_Graz/Einrichtungen/Institute/Homepages/i5210/research/ITSG-Grace2014.

118 Kaula, W. H. Statistical and Harmonic Analysis of Gravity [Text] / W. H. Kaula // Journal of Geophysical Research. – 1959. – Vol. 64. – PP. 2401–2421.

119 Koch, K. R. Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components [Text] // K. R. Koch, J. Kusche // Journal of Geodesy. – 2002. – Vol. 76. – PP. 259–268.

120 Mayer-Guerr, T. ITG-Grace03s: the latest GRACE gravity field solution [Electronic resource] / T. Mayer-Guerr. – Mode of access: http://www.massentransporte.de/fileadmin/20071015-17-Potsdam/mo_1050_06_mayer.pdf.

121 Modern determination of vertical deflections using digital zenith cameras [Text] / C. Hirt, B. Bürki, A. Somieski, G. Seeber // Journal Surveying Engineering. – 2010. – Vol. 136, issue 1. – PP. 1–12.

122 Moritz, H. The computation of the external gravity field and the geodetic boundary value problem. Symp. on the extension of the gravity anomalies to unsurveyed areas [Text] / H. Moritz. – Columbus, Ohio, 1964.

123 Save, H. Improvements in GRACE gravity fields using regularization [Electronic resource] / H. Save, S. Bettadpur, B. D. Tapley. – Mode of access: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008AGUFM.G13A0628S>.

124 Save, H. Reducing errors in the GRACE gravity solutions using regularization [Text] / H. Save, S. Bettadpur, B. D. Tapley // Journal of Geodesy. – 2012. – Vol. 86. – PP. 695–711.

125 Save, H. The use of regularization for global GRACE solutions [Electronic resource] / H. Save, S. Bettadpur, B. D. Tapley. – Mode of access: ftp://ftp.csr.utexas.edu/pub/grace/Proceedings/Presentations_GSTM2008.pdf.

126 Save, H. Using regularization for error reduction in GRACE gravity estimation [Text] : dissertation, the University of Texas at Austin / H. Save. – 2009. – 174 p.

127 Schmidt, H. F. Darstellung des Geoidpotentials mit Hilfe von «Sampling Functions» [Text] / H. F. Schmidt // Veroff. Bayer Kommiss. Inst. Erdmess. Bayer Akad. Wiss. Astron.-Geod. Arb. – 1973. – № 30. – PP. 63–70.

128 Schmidt, H. F. Die Bestimmung der Koeffizienten der Sampling Funktionen [Text] / H. F. Schmidt // Veroff. Bayer Kommiss. Inst. Erdmess. Bayer Akad. Wiss. Astron.-Geod. Arb. – 1974. – H 32. – PP. 51–59.

129 Seeber, G. Satellite Geodesy [Text] / G. Seeber. – Berlin : Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2003. – 612 p.

130 Tapley, B. D. Statistical orbit determination [Text] / B. D. Tapley, B. E. Schutz, G. H. Born. – Academic Press, New York, 2004. – 547 p.

131 Temporal gravity field models inferred from GRACE data [Text] / J. Lemoine, S. Bruinsma, S. Loyer, R. Biancale, J. Marty, F. Perosanz, G. Balmino // Advanced Space Research. – 2007. – Vol. 39. – PP. 1620–1629.

132 The influence of regularization methods on the accuracy of modern global geopotential models [Text] / V. F. Kanushin, I. G. Ganagina, D. N. Goldobin, N. S. Kosarev, A. M. Kosareva // Gyroscopy and Navigation. – 2016. – Vol. 7, № 4. – PP. 337–342.

133 Thyissen-Bornemisza, S. Observation of the Vertical Gradient of Gravity in the Field [Text] / S. Thyissen-Bornemisza, W. Stalklew // Geophysics. – 1956. – V. 21. – № 3. – PP. 771–741.

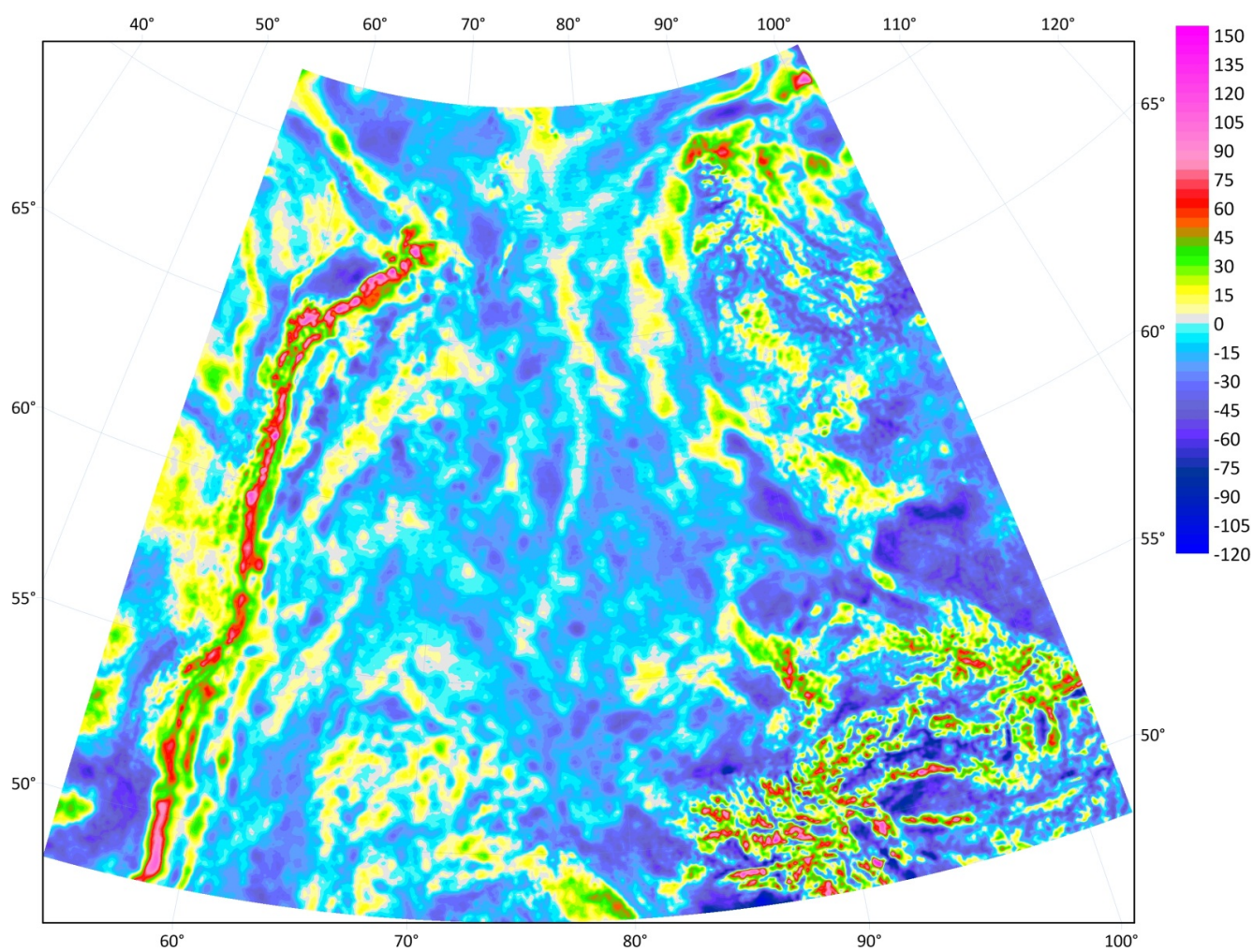
134 Weighiman, J. A. Gravity, geodesy and artificial satellites [Text] / J. A. Weighiman // A unified approach, in The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Edited by G. Veis, National Technical University, Athens, Greece. – 1967. – Vol. 2. – PP. 467–486.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(обязательное)

Картосхема аномалий силы тяжести на территорию Западной Сибири

по данным модели EIGEN-6C4 (мГал)

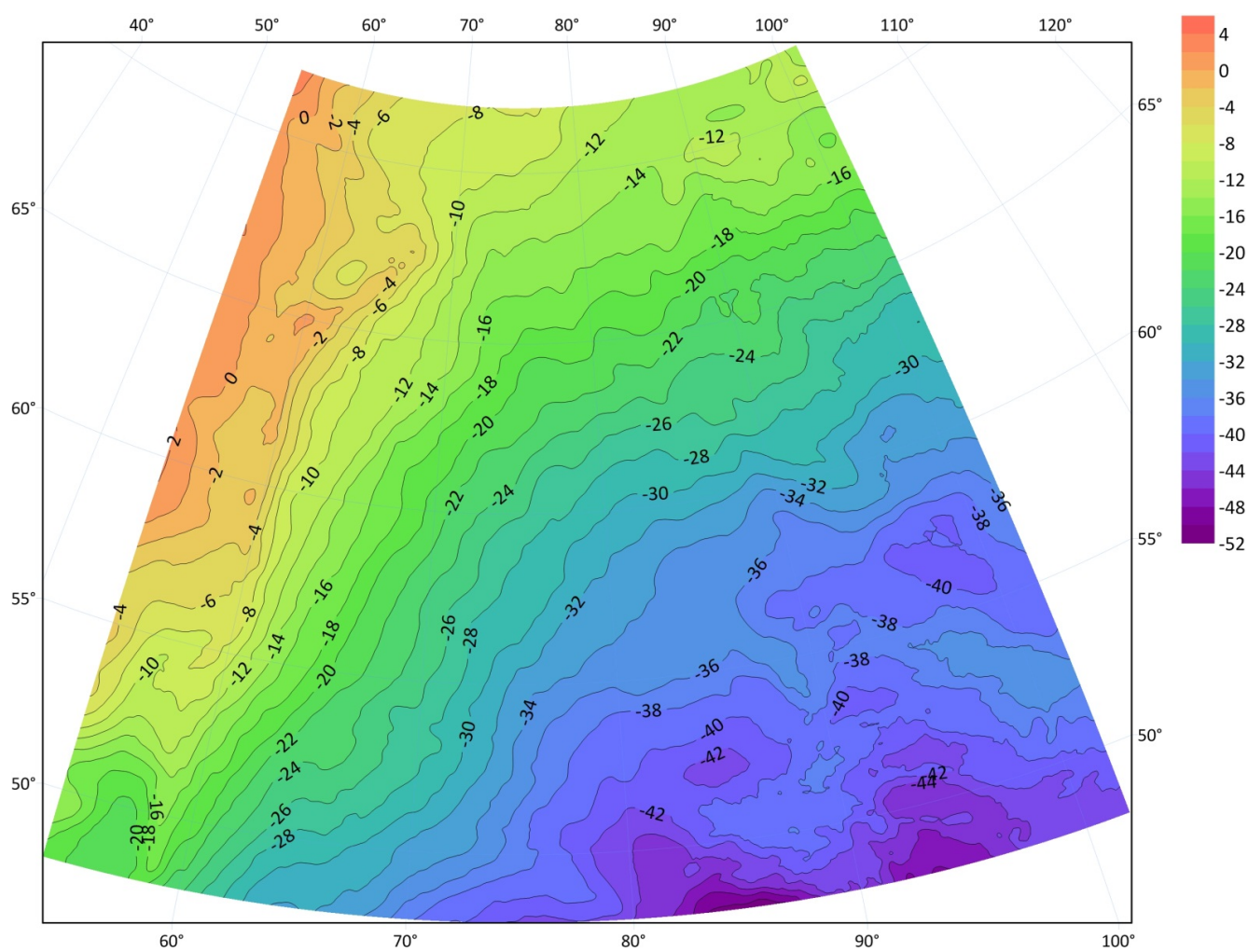


ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(обязательное)

Картосхема высот квазигеоида на территорию Западной Сибири

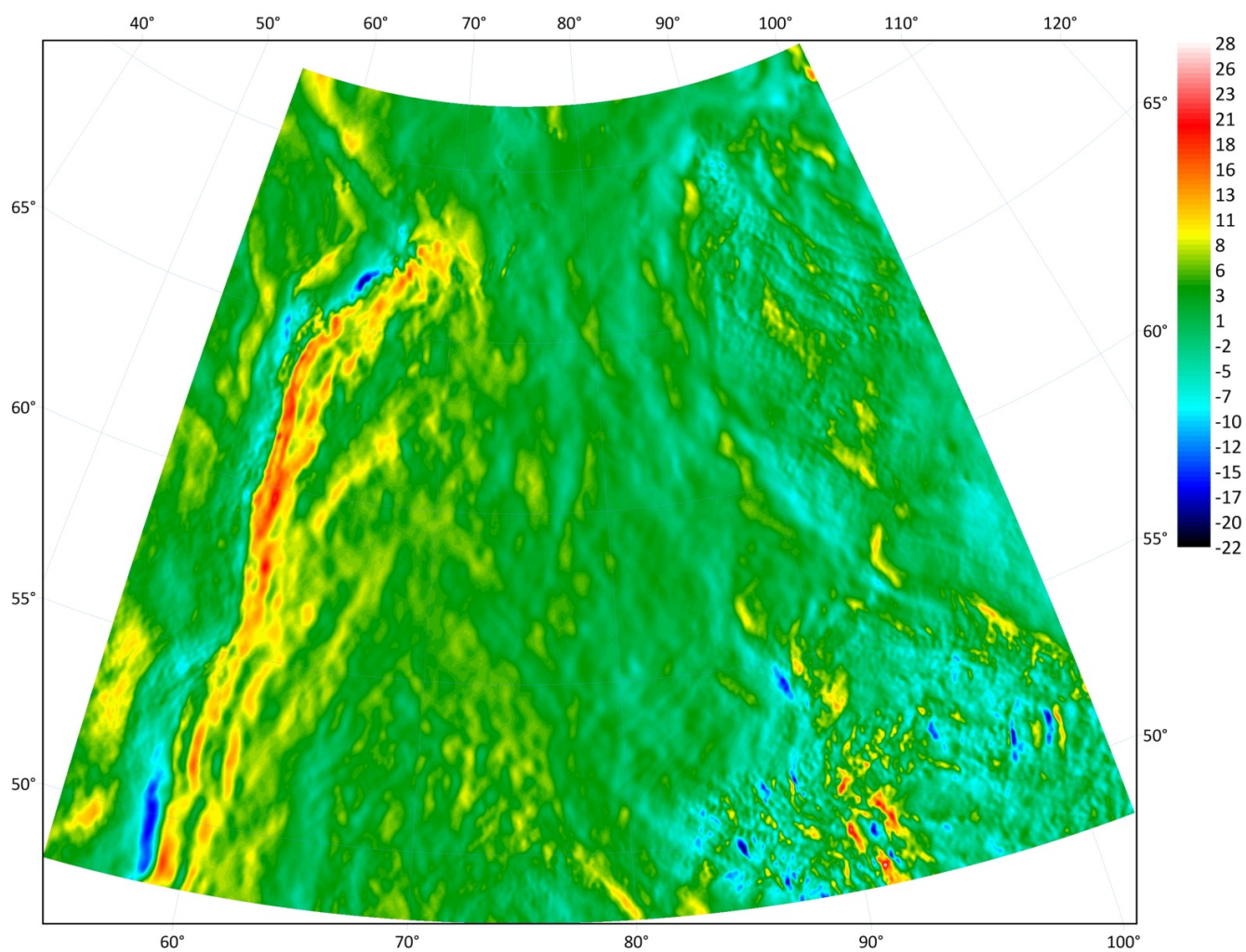
по данным модели EIGEN-6C4 (м)



ПРИЛОЖЕНИЕ В

(обязательное)

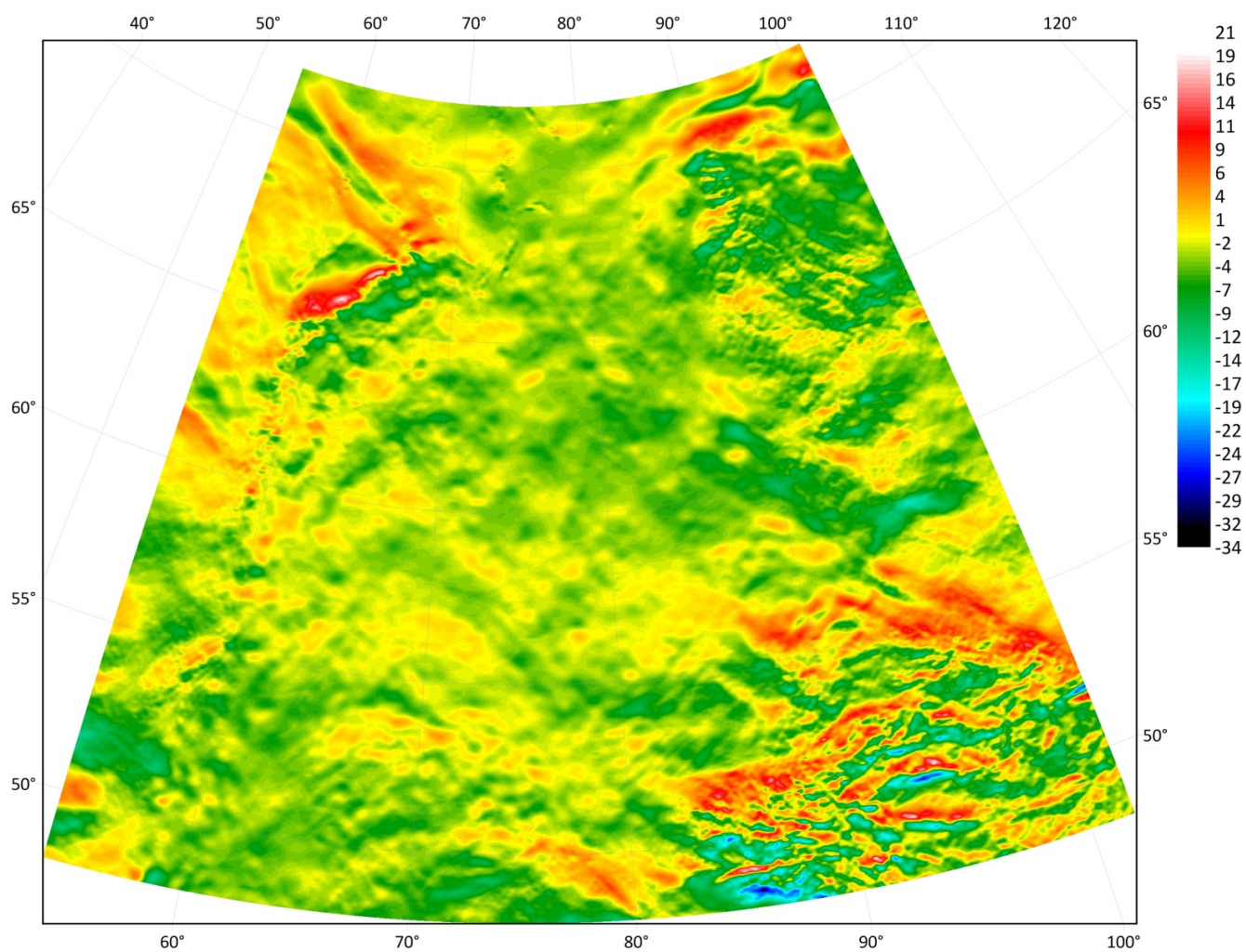
Картосхема уклонений отвесной линии в плоскости первого вертикала
на территорию Западной Сибири по данным
модели EIGEN-6C4 (угл. с)



ПРИЛОЖЕНИЕ Г

(обязательное)

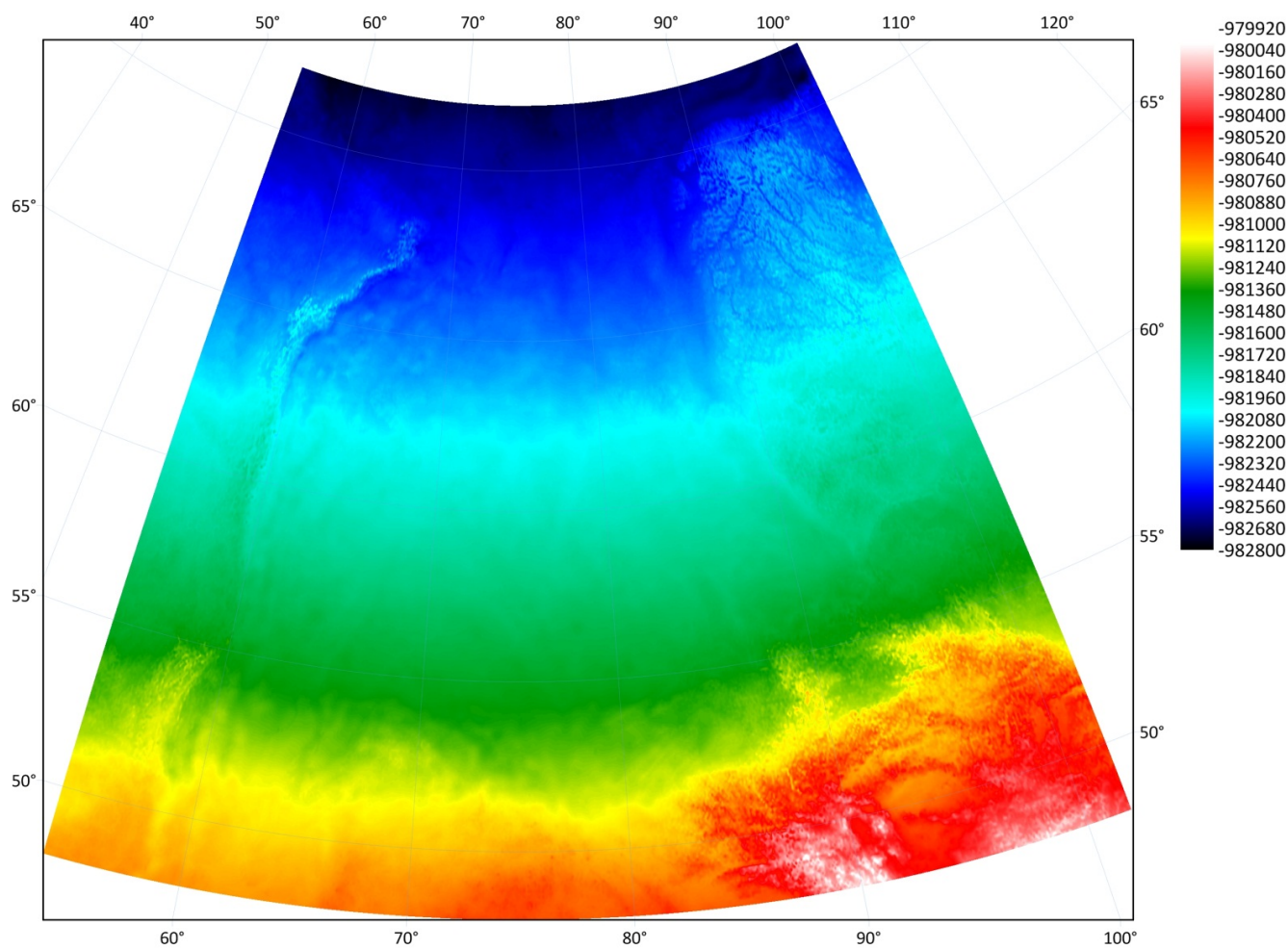
Картосхема уклонений отвесной линии в плоскости меридиана
на территорию Западной Сибири по данным
модели EIGEN-6C4 (угл. с)



ПРИЛОЖЕНИЕ Д

(обязательное)

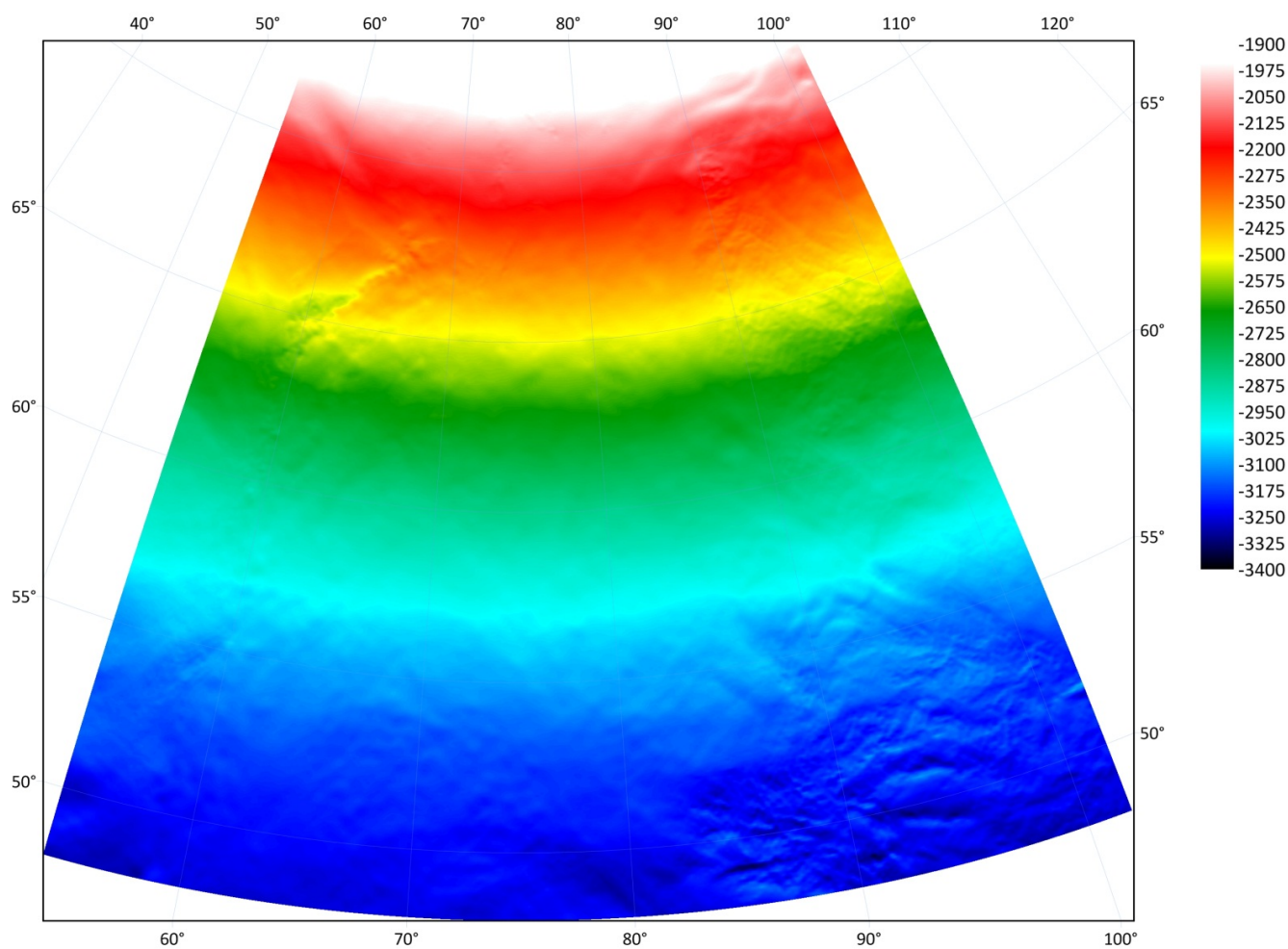
Картосхема вертикальной составляющей вектора силы тяжести
на территорию Западной Сибири по данным
модели EIGEN-6С4 (мГал)



ПРИЛОЖЕНИЕ Е

(обязательное)

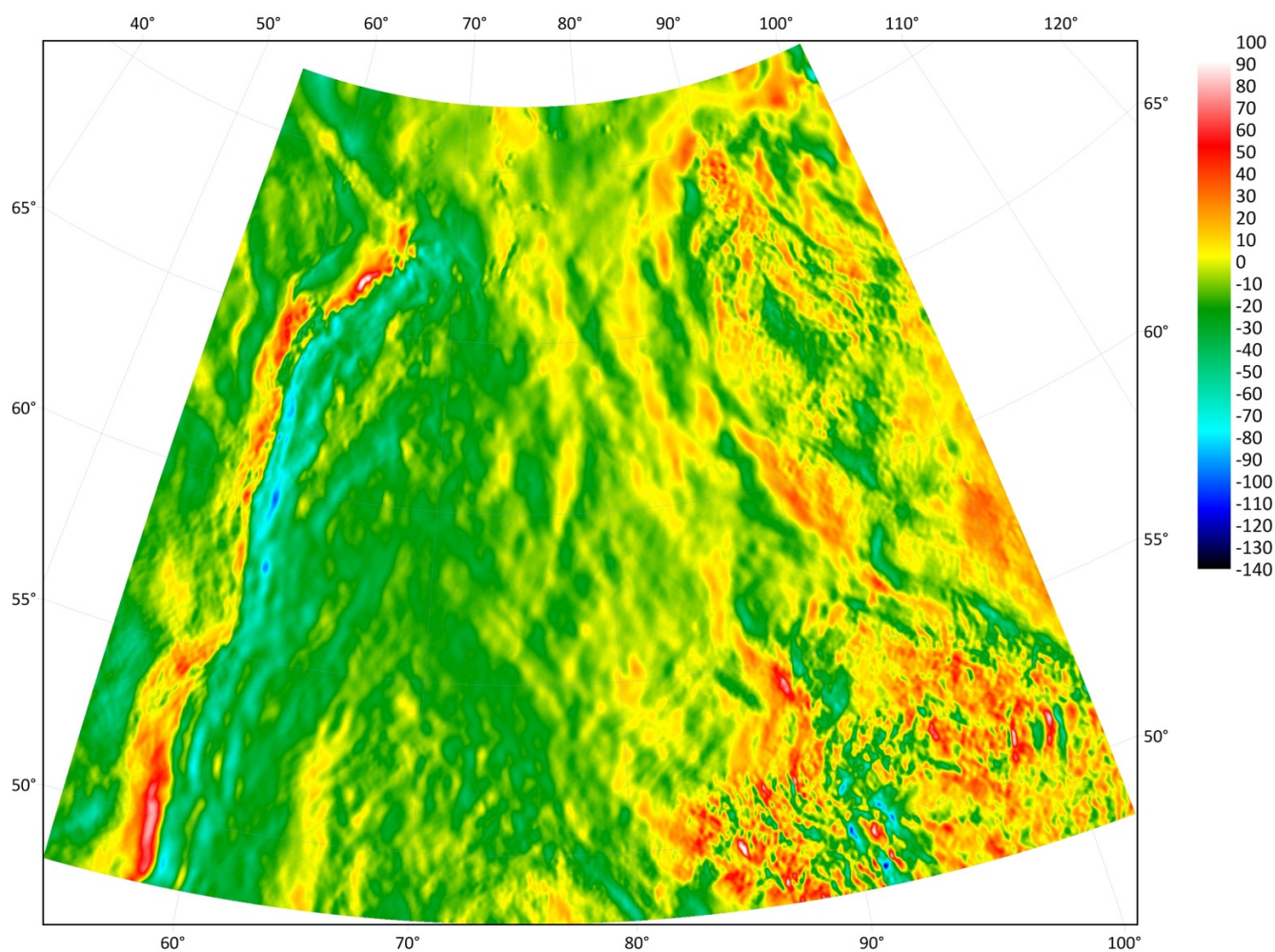
Картосхема горизонтальной составляющей вектора силы тяжести
в плоскости меридиана на территорию Западной Сибири
по данным модели EIGEN-6C4 (мГал)



ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

(обязательное)

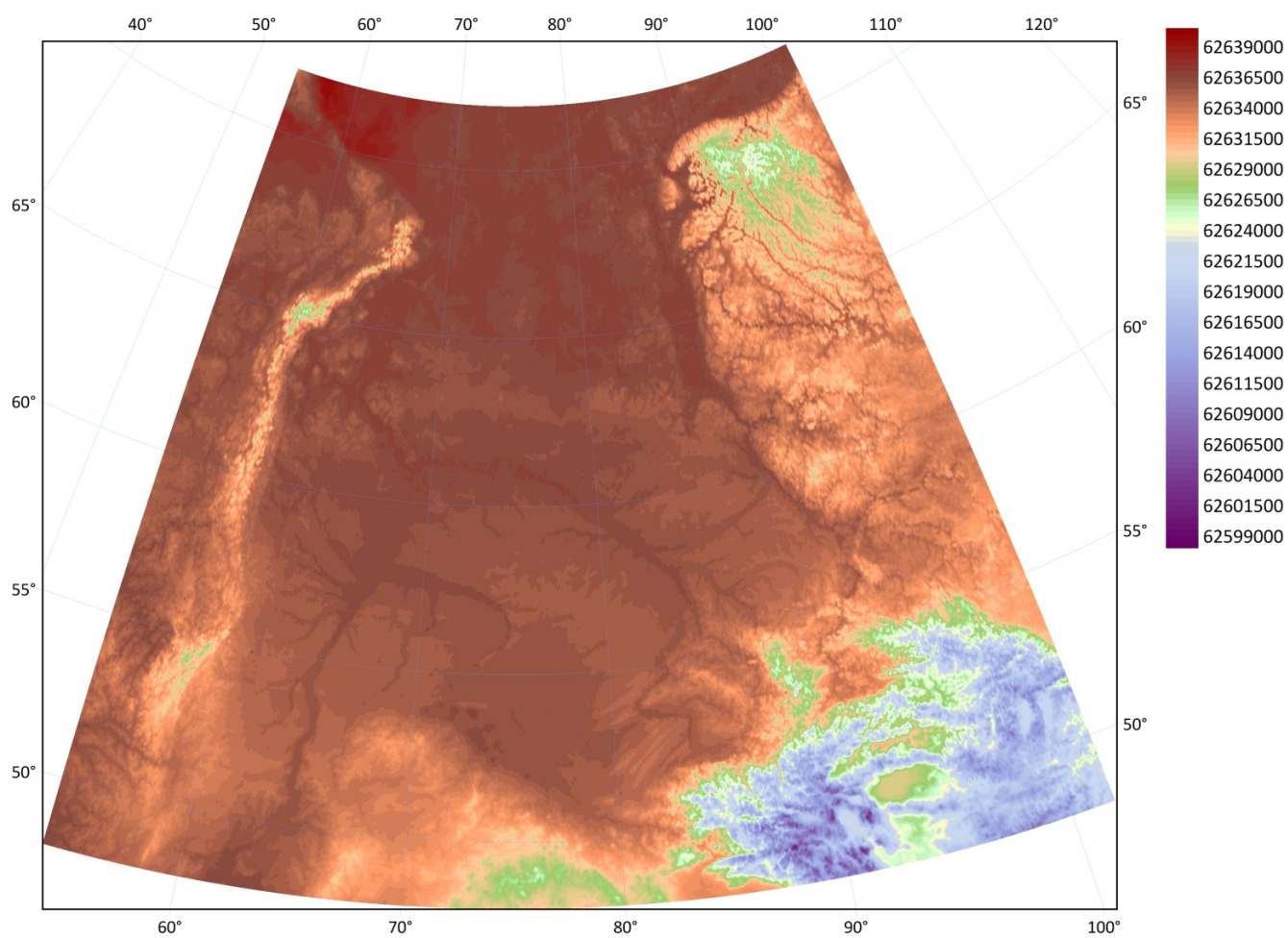
Картосхема горизонтальной составляющей вектора силы тяжести
в плоскости первого вертикала на территорию Западной Сибири
по данным модели EIGEN-6C4 (мГал)



ПРИЛОЖЕНИЕ И

(обязательное)

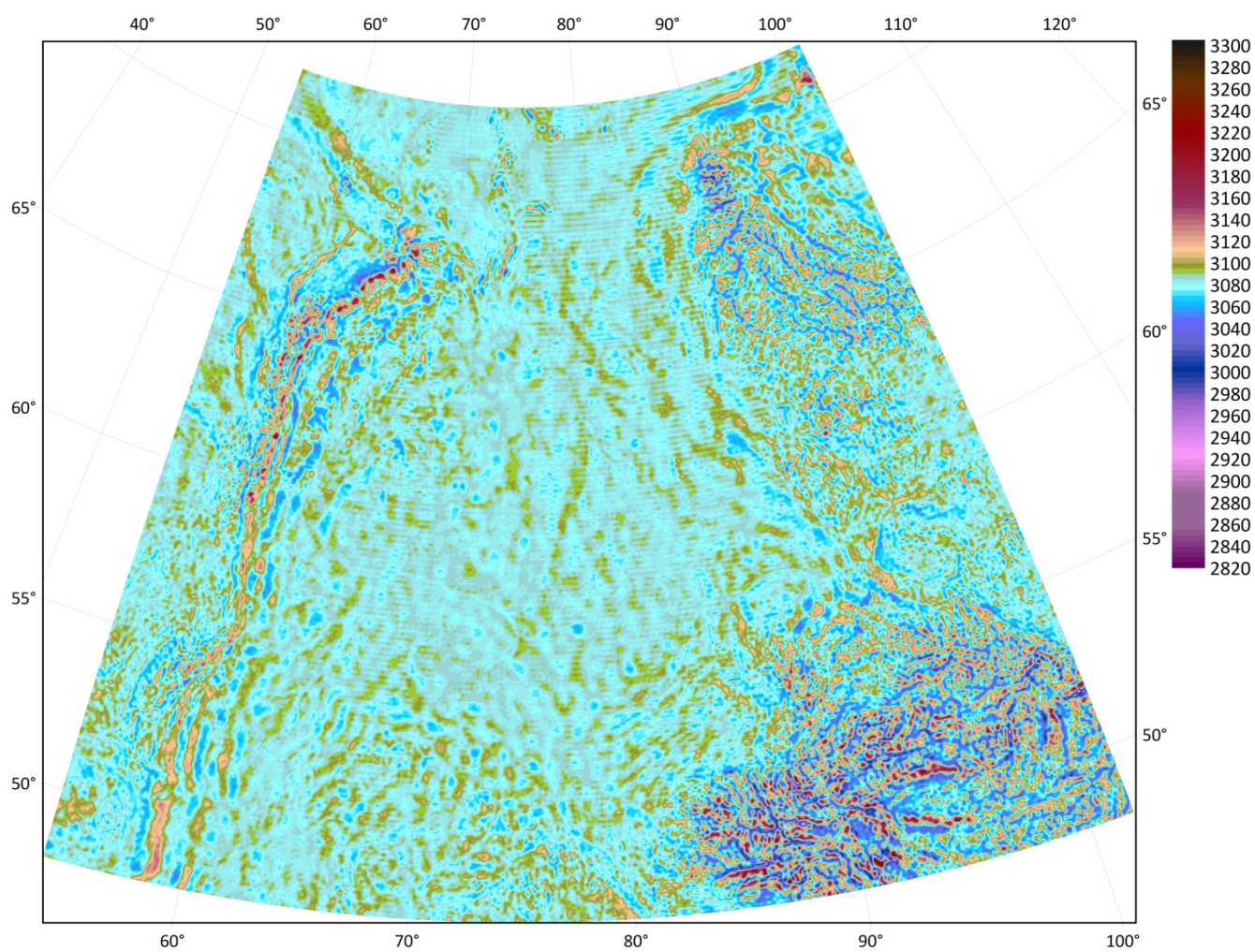
Картосхема потенциала силы тяжести на территорию
Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (m^2/c^2)



ПРИЛОЖЕНИЕ К

(обязательное)

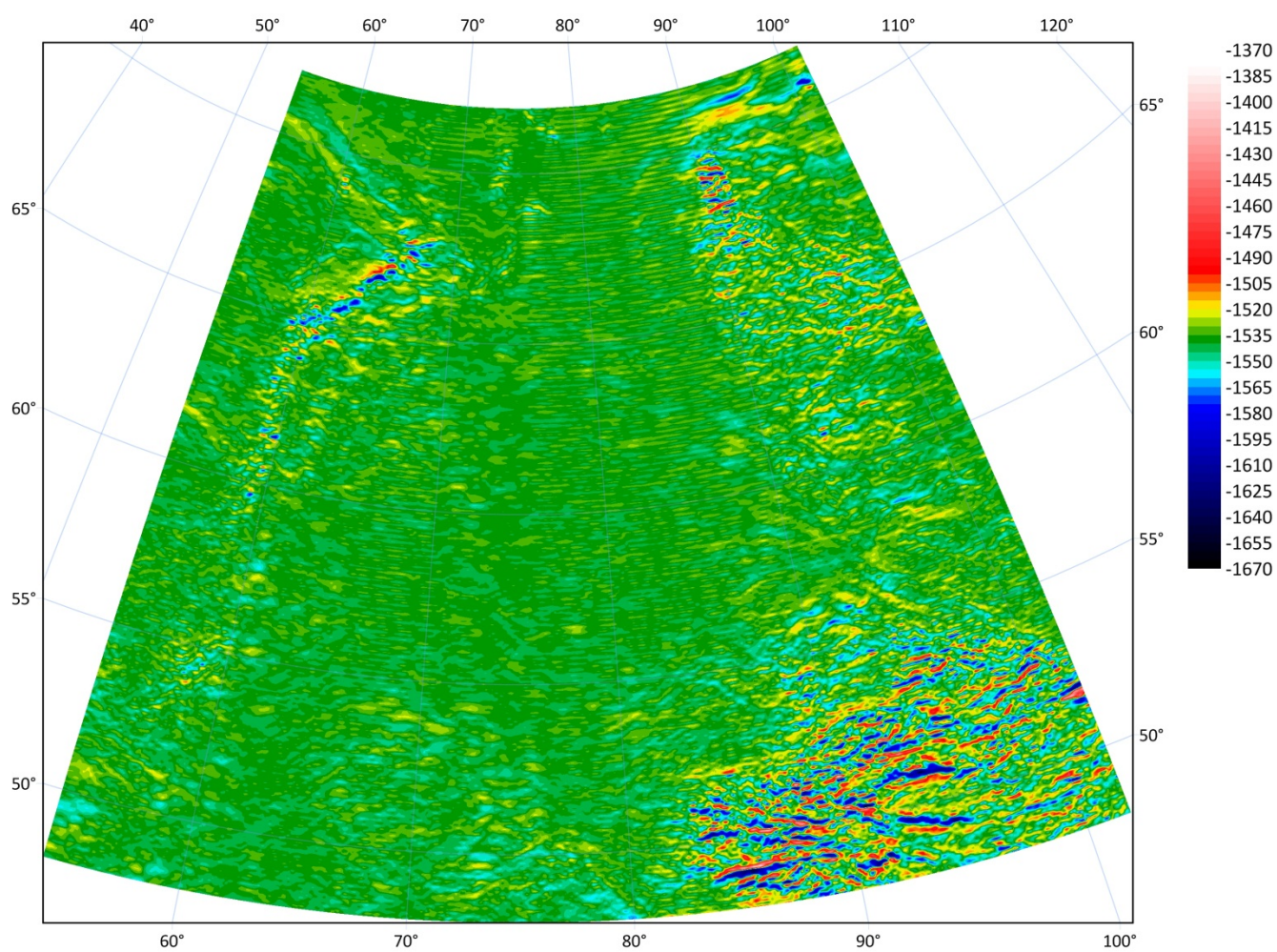
Картосхема градиента силы тяжести W_{zz} на территорию
Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (этовеш)



ПРИЛОЖЕНИЕ Л

(обязательное)

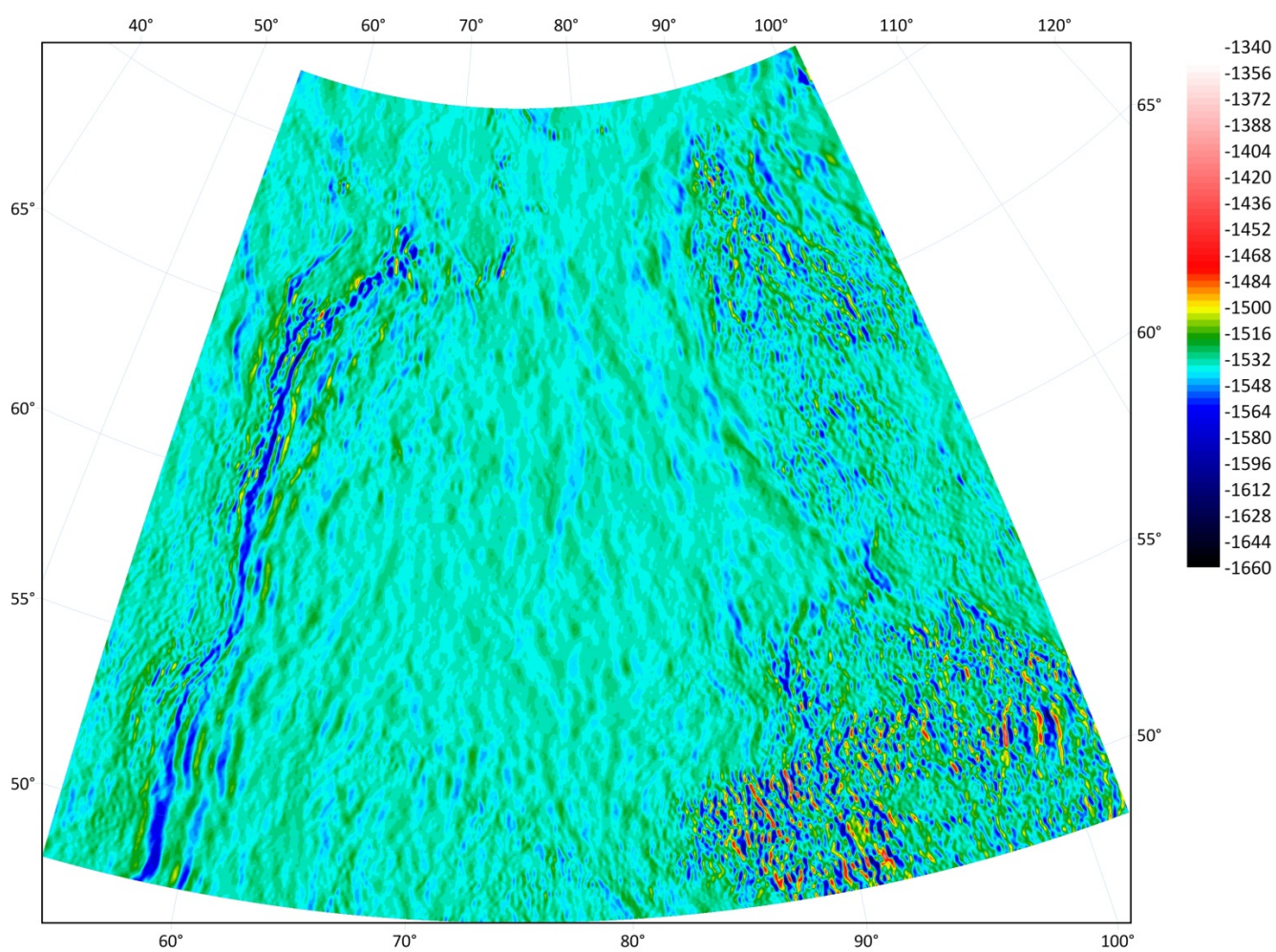
Картосхема градиента силы тяжести W_{xx} на территорию
Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (эТВеш)



ПРИЛОЖЕНИЕ М

(обязательное)

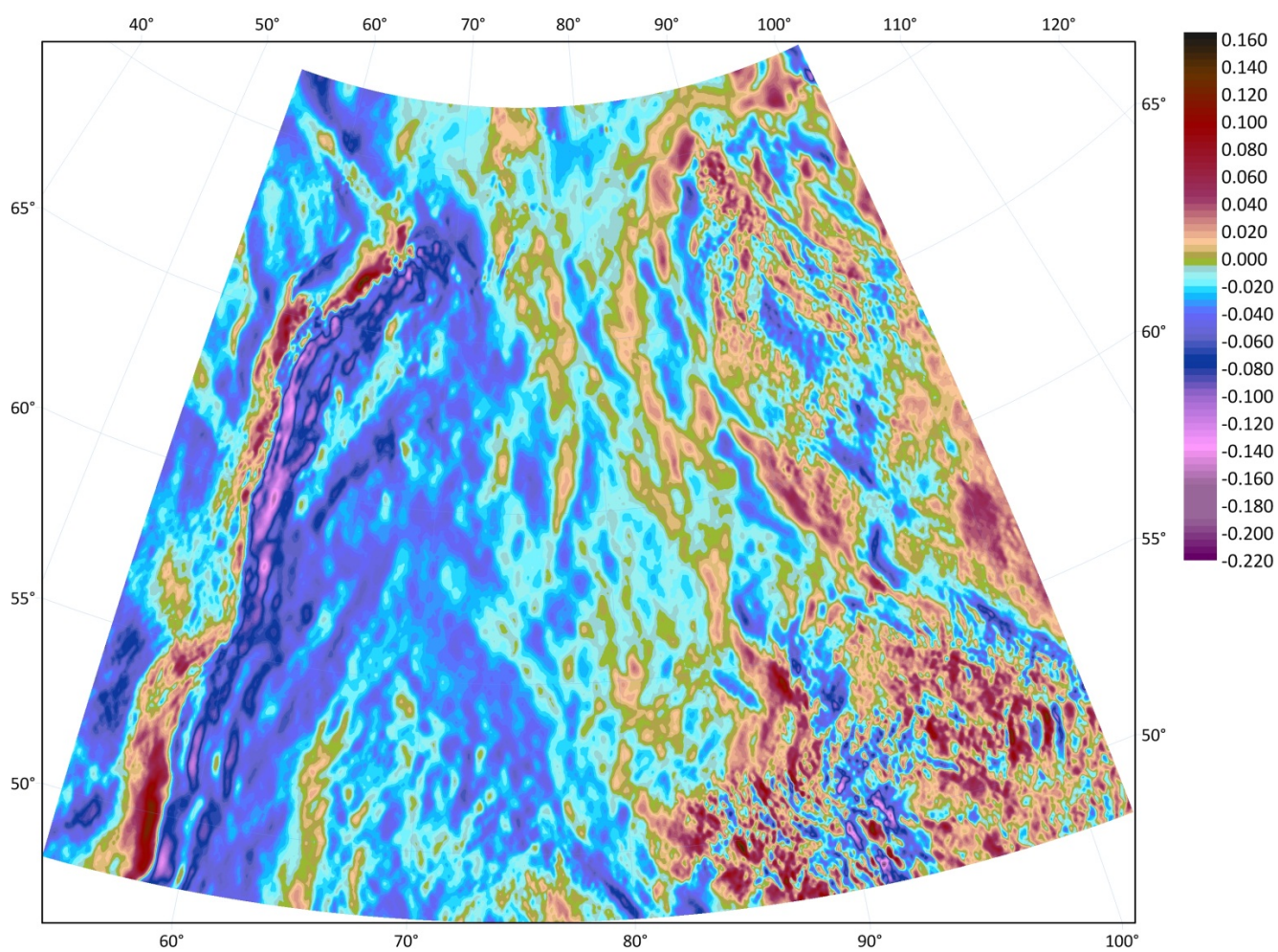
Картосхема градиента силы тяжести W_{uu} на территорию
Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (эТВеш)



ПРИЛОЖЕНИЕ Н

(обязательное)

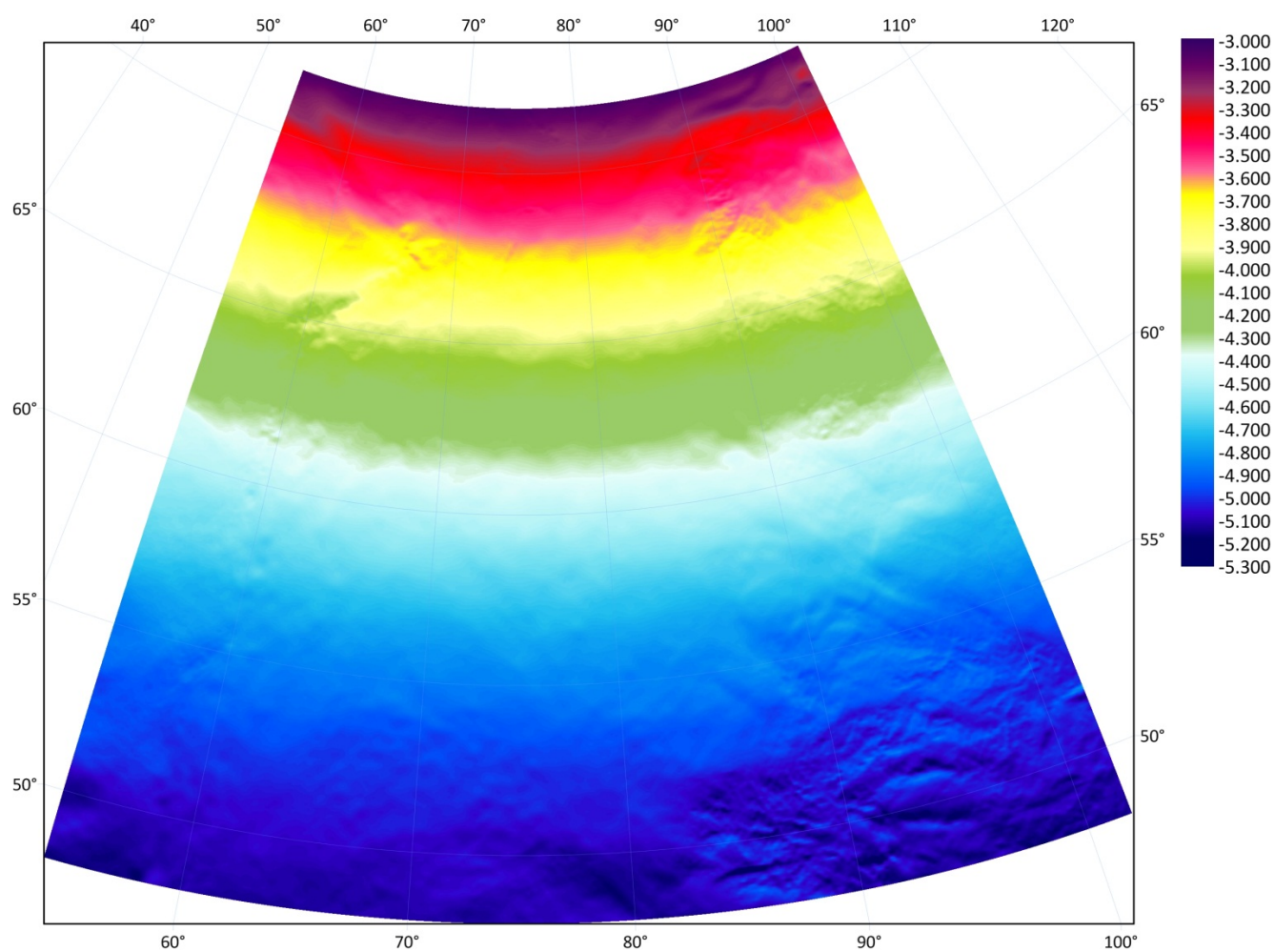
Картосхема градиента силы тяжести W_{zy} на территорию
Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (этвеш)



ПРИЛОЖЕНИЕ О

(обязательное)

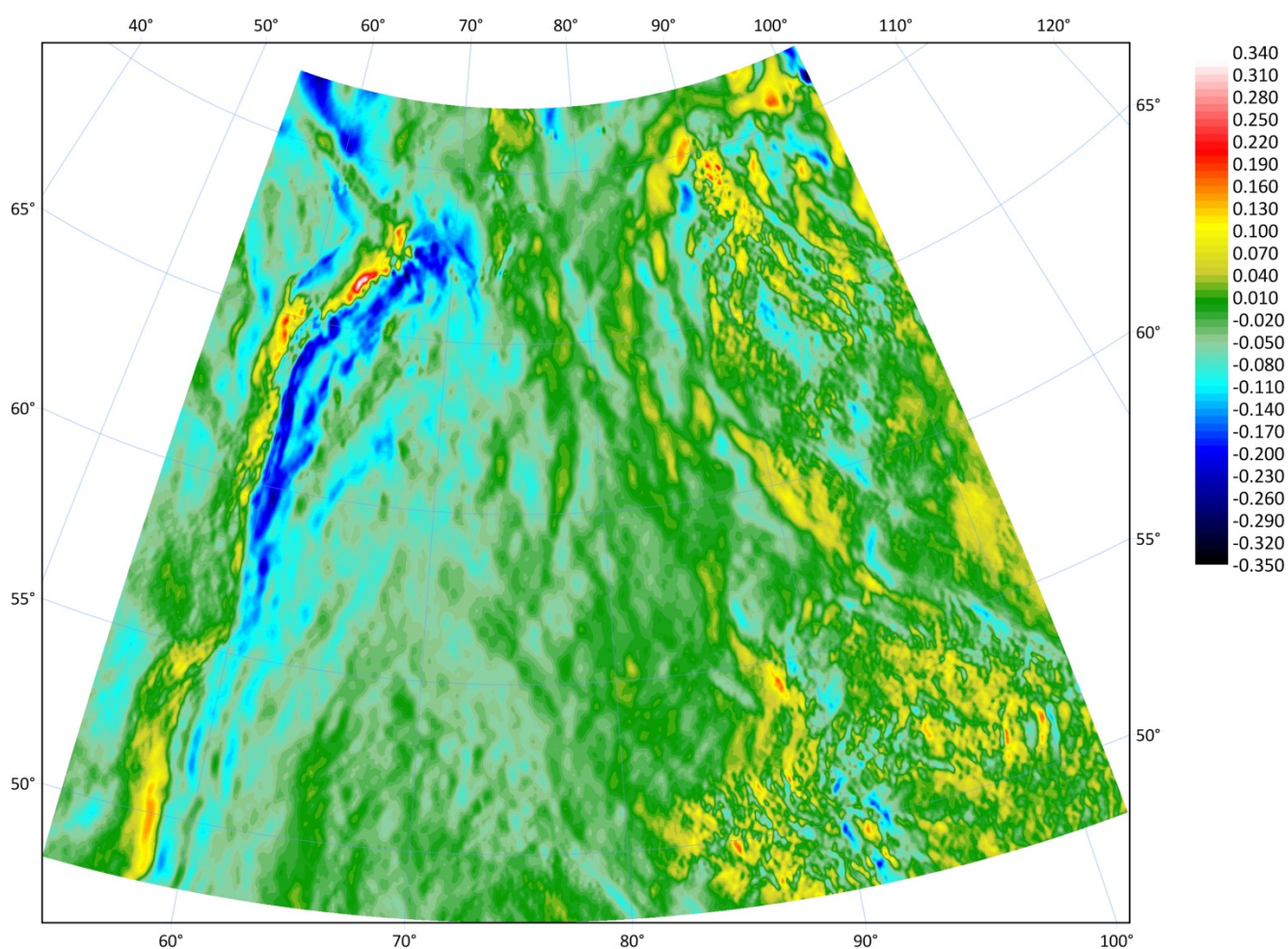
Картосхема градиента силы тяжести W_{zx} на территорию
Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (этвеш)



ПРИЛОЖЕНИЕ П

(обязательное)

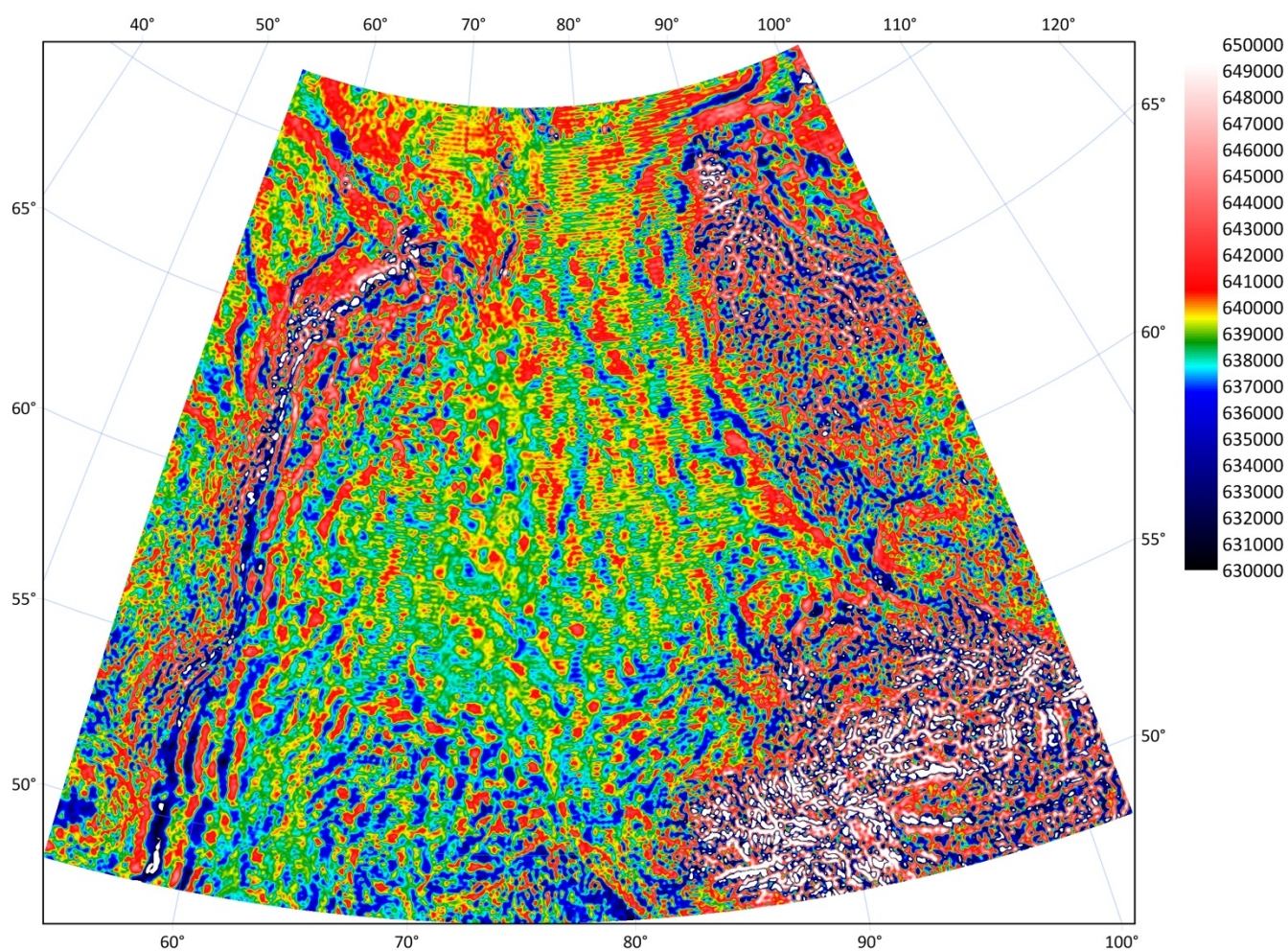
Картосхема градиента силы тяжести $W_{\text{ху}}$ на территорию
Западной Сибири по данным модели EIGEN-6С4 (этвеш)



ПРИЛОЖЕНИЕ Р

(обязательное)

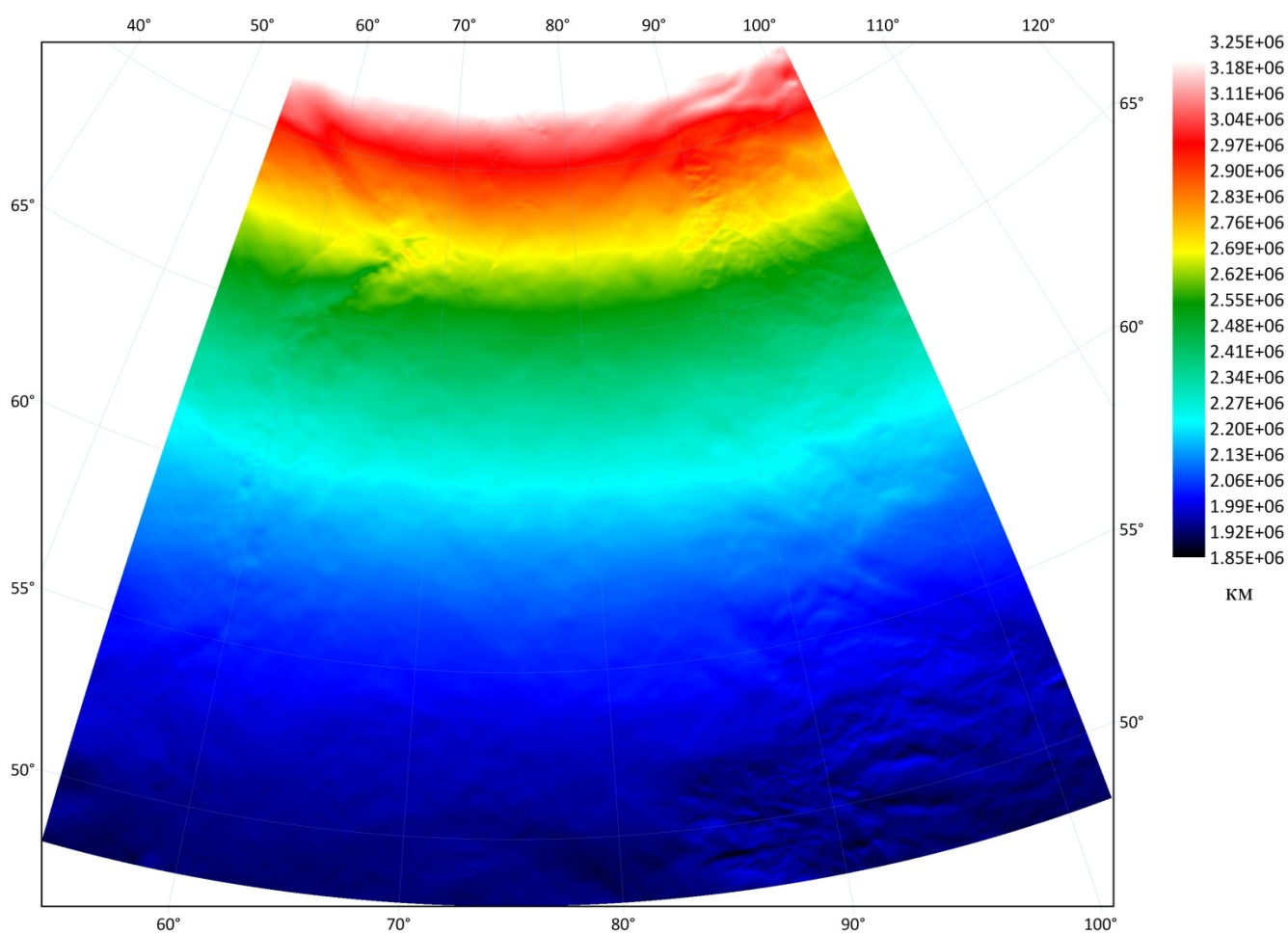
Картограмма Гауссовой кривизны уровенной поверхности на территорию
Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (м)



ПРИЛОЖЕНИЕ С

(обязательное)

Картограмма кривизны силовой линии в плоскости меридиана
на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (м)



ПРИЛОЖЕНИЕ Т

(обязательное)

Картосхема кривизны силовой линии в плоскости первого вертикала на территорию Западной Сибири по данным модели EIGEN-6C4 (м)

